

Satz 3.18

- (3) Am Ende ist für jeden erreichbaren Knoten $v \in V$ die Länge eines kürzesten Weges von s nach v im Baum (Y, T) durch $l(v)$ gegeben.
- (4) Am Ende ist für jeden erreichbaren Knoten $v \in V$ die Länge eines kürzesten Weges von s nach v im Graphen (V, E) durch $l(v)$ gegeben.

Beweis:

(3) Sei $d_{(Y, T)}$ die Länge eines kürzesten Weges von s nach v in (Y, T) .
Dann zeigen wir durch Induktion über $d_{(Y, T)}(s, v)$, dass für alle Knoten $d_{(Y, T)}(s, v) = l(v)$ gilt:

Induktionsanfang:

$d_{(Y, T)}(s, v) = 0$ gilt für $v=s$, und $l(s)=0$

Induktionsannahme:

Sei $d_{(Y, T)}(s, v) = l(v)$ für alle $v \in V$ mit $d_{(Y, T)}(s, v) \leq k-1$

Induktionsschritt:

sei $w \in V$ ein Knoten mit $d_{(Y, T)}(s, w) = k$.

Dann gibt es im Baum (Y, T) einen eindeutigen Weg von s zu w .
Sei v der Vorgänger von w in diesem Weg, also $\{v, w\} \in T$.

Nach Induktionsannahme gilt

$d_{(Y, T)}(s, v) = l(v),$

außerdem ist

$d_{(Y, T)}(s, w) = d_{(Y, T)}(s, v) + 1$

(Abstand im Baum)
(wird in Alg 3.17 gesetzt)

und

$l(w) = l(v) + 1.$

Also auch $d_{(Y, T)}(s, w) = l(w)$

- und die Behauptung gilt.

(4) Wir brauchen zunächst eine Eigenschaft der Warteschlange R:

(*) Zu jedem Zeitpunkt gilt für die Warteschlange R: $v_i, v_{i+1}, \dots, v_k$,
dass $l(v_i) \leq \dots \leq l(v_k) \leq l(v_i) + 1$.

Beweis durch Induktion über die Zahl z der aufgenommenen Kanten:

Induktionsanfang: $z=0$

Hier besteht die Warteschlange nur aus s, und (*) gilt.

Induktionsannahme:

Die Aussage gelte nach z-1 Kanten. Sei $R: v_i, v_{i+1}, \dots, v_k$ und
 $l(v_i) \leq l(v_{i+1}) \leq \dots \leq l(v_k) \leq l(v_i) + 1$

Induktionsschritt:

Wir fügen eine weitere Kante ein. Werden dafür zunächst Knoten aus R gelöscht (weil sie keine neuen Nachbarn haben), ändert das nichts an (*). Sei v_j danach der erste Knoten, für den eine neue Kante $e = \{v_j, v_{k+1}\}$ eingefügt wird. Dann bekommt man

$$R: v_i, v_{j+1}, \dots, v_k, v_{k+1}$$

mit $l(v_i) \leq \dots \leq l(v_j) \leq \dots \leq l(v_k) \leq l(v_i) + 1$

Wegen $l(v_i) \leq l(v_j)$ gilt auch $l(v_i) + 1 \leq l(v_j) + 1 = l(v_{k+1})$.

Damit erhält man

$$l(v_j) \leq \dots \leq l(v_k) \leq l(v_i) + 1 \leq l(v_j) + 1 = l(v_{k+1}),$$

und (*) gilt weiterhin.

Jetzt nehmen wir an, dass es am Ende des Algorithmus 3.17 einen Knoten w gibt, für den nicht ein kürzester Weg gefunden wurde, also

$$d(s, w) \leq d_{(Y, T)}(s, w) = \ell(w).$$

Unter den Knoten mit dieser Eigenschaft wählen wir einen mit minimalem Abstand von s in G .

Sei P ein kürzester s - w -Weg in G , und sei $e = \{v, w\}$ die letzte Kante in P , d.h.

$$d(s, w) = d(s, v) + 1.$$

Wir haben $d(s, v) = d_{(Y, T)}(s, v)$,
 aber $d(s, w) < d_{(Y, T)}(s, w)$,
 also gehört e nicht zu T .

Außerdem ist

$$\begin{aligned} \ell(w) = d_{(Y, T)}(s, w) &> d(s, w) = d(s, v) + 1 \\ &= d_{(Y, T)}(s, v) + 1 = \ell(v) + 1. \end{aligned}$$

Wäre $w \in R$, hätten wir wegen

$$\ell(w) > \ell(v) + 1$$

also einen Widerspruch zu Eigenschaft (*).

Also wäre $w \notin Y$. Dann wäre die Kante $e = \{v, w\}$ zum Zeitpunkt der Entfernung von v aus R aber eine Verbindung von v mit einem Knoten $w \notin Y$, im Widerspruch zur Abfrage in

□