

3.7 WACHSTUM VON FUNKTIONEN

Im letzten Abschnitt haben wir Funktionen abgeschätzt und auf die "wesentlichen" Bestandteile reduziert, um Größenordnungen und Wachstumsverhalten zu beschreiben. Ein bisschen formaler:

DEFINITION 3.9 (Θ -Notation)

Seien $f, g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen.

Dann gilt

$$f \in \Theta(g) \Leftrightarrow \text{Es gibt positive Konstanten } c_1, c_2, n_0 \text{ mit} \\ 0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n) \text{ für alle } n \geq n_0.$$

Man sagt: f wächst asymptotisch in derselben Größenordnung wie g .

Beispiele: $2n^2 - 1 \in \Theta(n^2)$

$$\frac{n^3}{1000} + n^2 + n \log n \in \Theta(n^3)$$

Manchmal hat man nur untere oder obere Abschätzungen:

(18)

DEFINITION 3.10 (O -Notation)

Seien $f, g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen.

Dann gilt $f \in O(g) \Leftrightarrow$ Es gibt positive Konstanten c, n_0 mit
 $0 \leq f(n) \leq c g(n)$ für alle $n \geq n_0$.

Man sagt: f wächst ~~exponentiell~~ höchstens in derselben Größenordnung wie g .

Beispiele:
 $2n^2 - 1 \in O(n^2)$
 $2n^2 - 1 \in O(n^3)$
 $n \log n \in O(n^2)$

DEFINITION 3.11 (Ω -Notation)

Seien $f, g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen.

Dann gilt $f \in \Omega(g) \Leftrightarrow$ Es gibt positive Konstanten c, n_0 mit
 $0 \leq c g(n) \leq f(n)$ für alle $n \geq n_0$.

Beispiele: $2n^2 - 1 \in \Omega(n^2)$
 $2n^2 - 1 \in \Omega(n^2)$

Einige einfache Eigenschaften:

SATZ 3.12

Seien $f, g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen.

- Dann gilt
- (1) $f \in O(g) \Leftrightarrow g \in O(f)$
 - (2) $f \in O(g) \Leftrightarrow f \in O(g)$ und $f \in \Omega(g)$.
 - (3) $f \in O(g) \Leftrightarrow g \in \Omega(f)$

Beweis: Übung!