



PROF. DR. SÁNDOR FEKETE

Abteilung Algorithmik, TU Braunschweig

THEMA

GEHT'S NICHT NOCH ETWAS SCHNELLER?

Eine Rundreise durch gelöste und ungelöste
Probleme des algorithmischen Alltags

Algorithmen

Datenstrukturen

I get the job done.
What the hell do
you want?

I don't make
things difficult.
That's the way
they get, all by
the

Locker drauf,
zielorientiert

Then don't.



Can you make it
without killing
yourself?

Ordentlich,
hält Regeln ein
work with you.

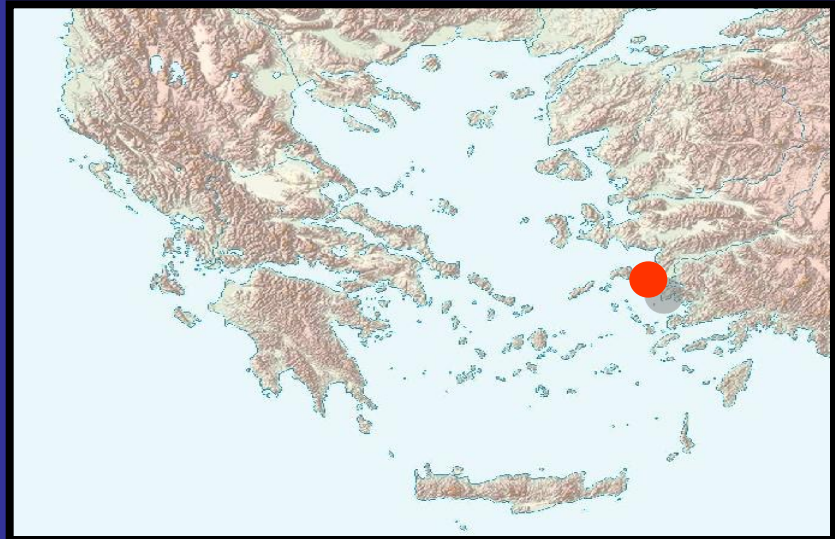
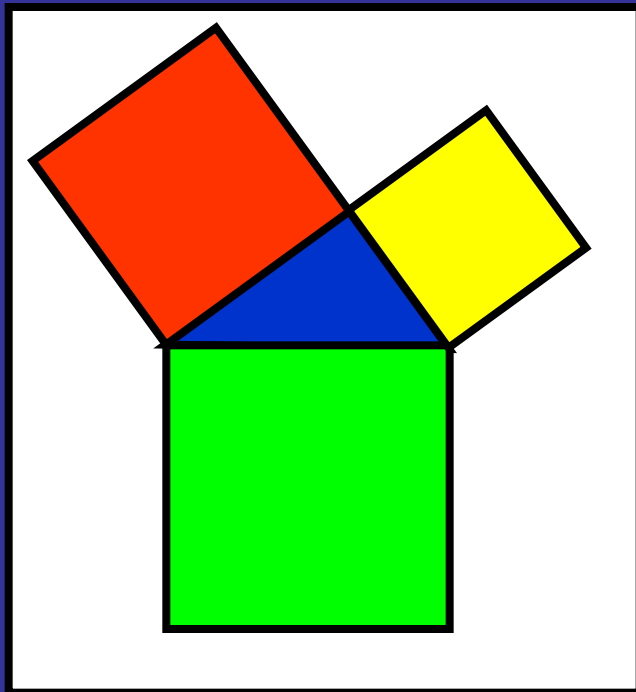
Ain't got no choice.

I'm getting too old
for this...

mathematische

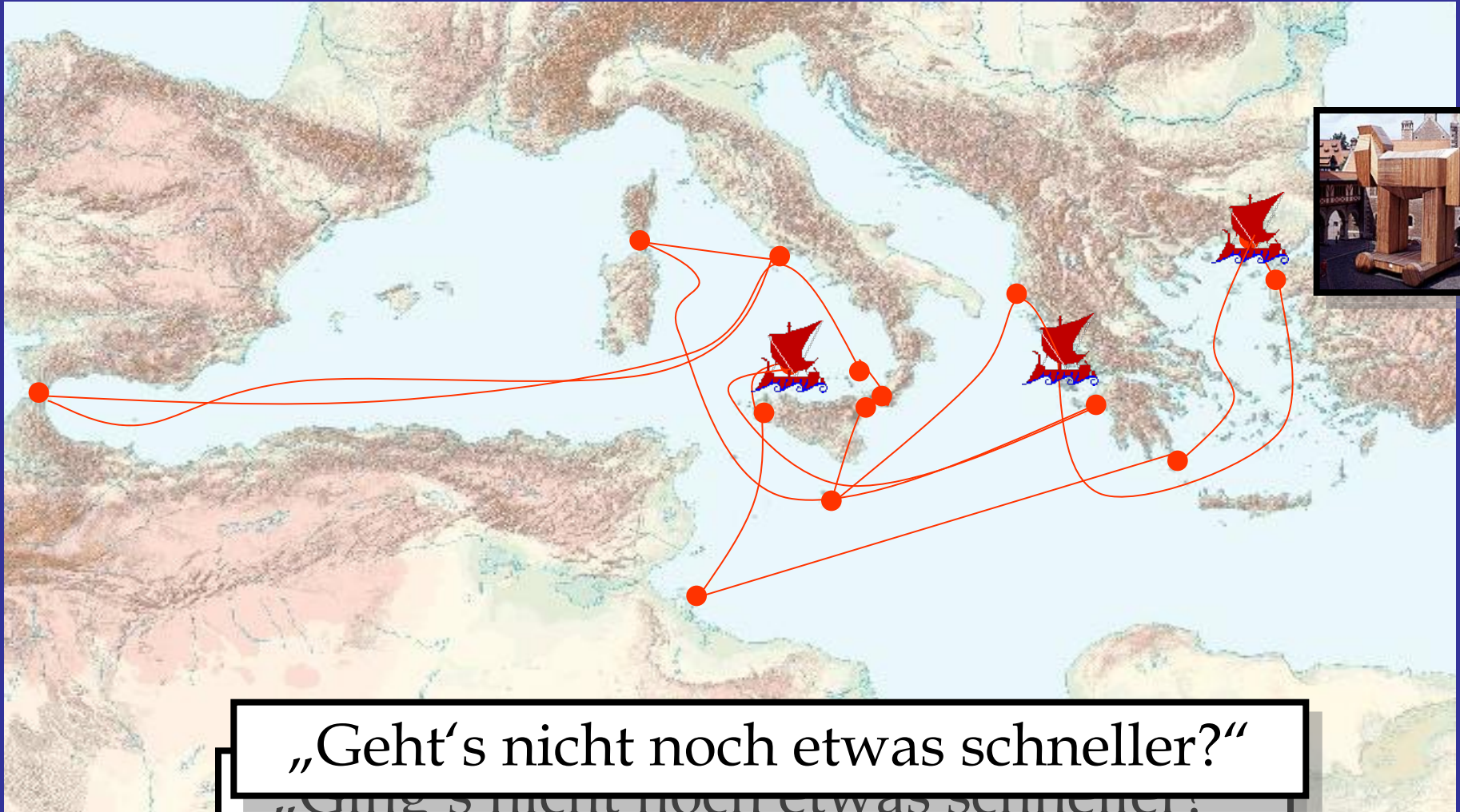
Die bekannteste Formel aller Zeiten

$$a^2 + b^2 = c^2$$



Pythagoras (ca. 500 v.Chr.)

Ein 20 Jahre früher

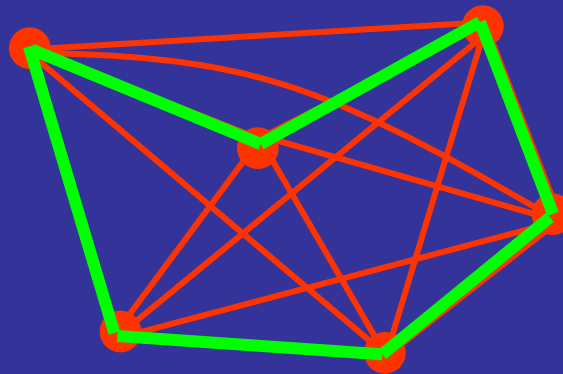


„Geht's nicht noch etwas schneller?“

„Ging's nicht noch etwas schneller.“

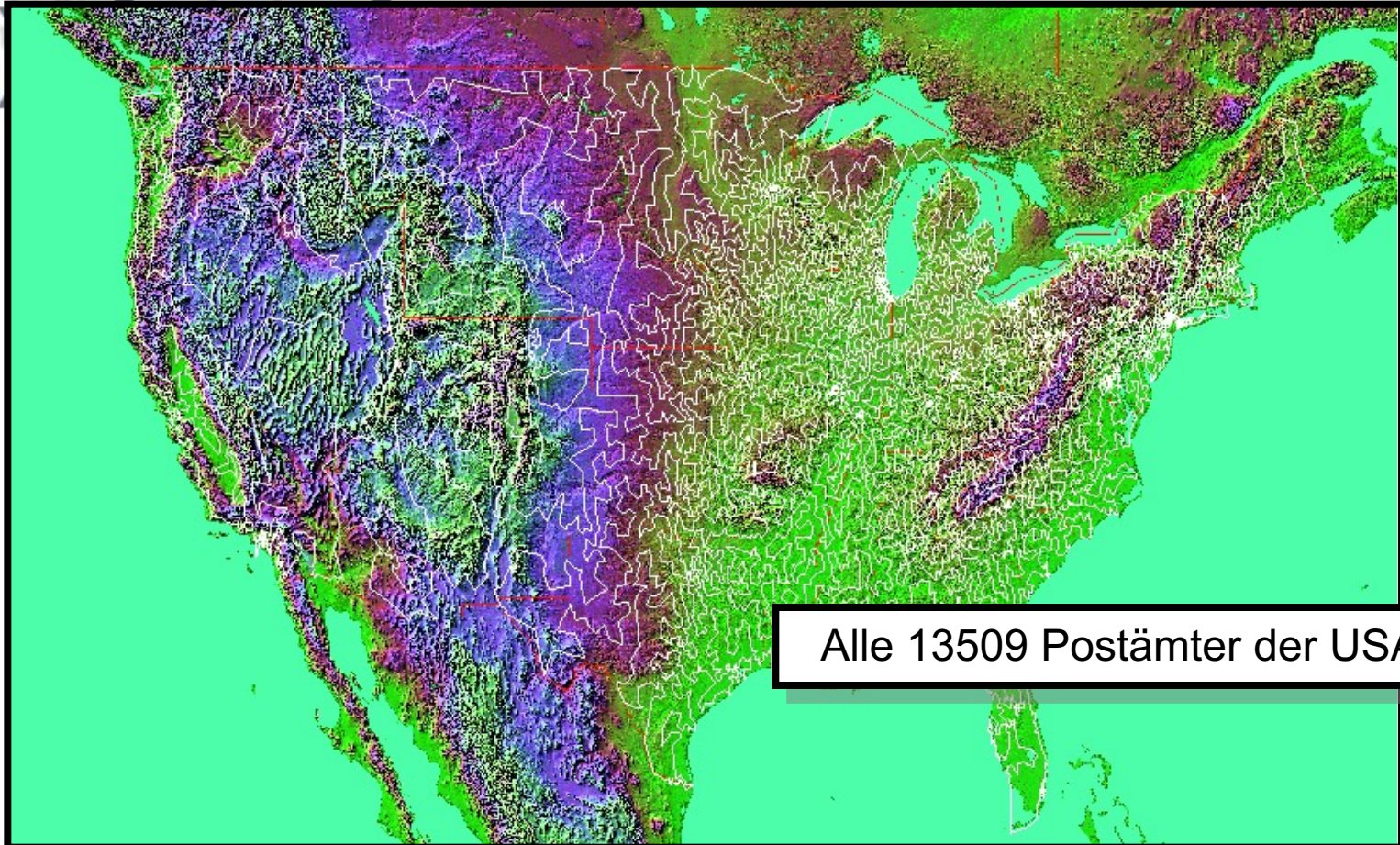
Das Rundreiseproblem

Gegeben: Ein Graph $G = (V, E)$
mit Kantenlängen w_e



Gesucht: Eine kürzeste Rundreise

Eine optimale Rundreise in der Neuen Welt



Alle 13509 Postämter der USA

What's the complexity class of the best linear programming cutting-plane techniques? I couldn't find it anywhere. Man, the Garfield guy doesn't have these problems.

10 Jahre (!) CPU-Zeit

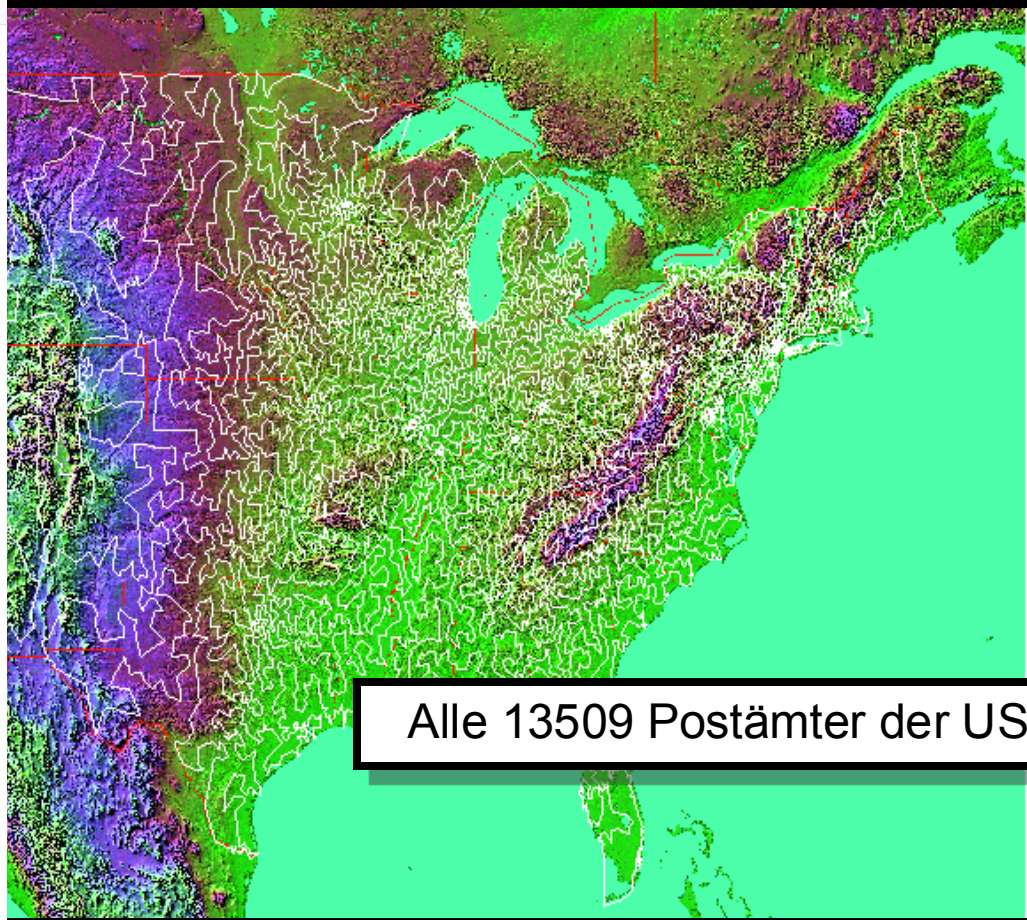
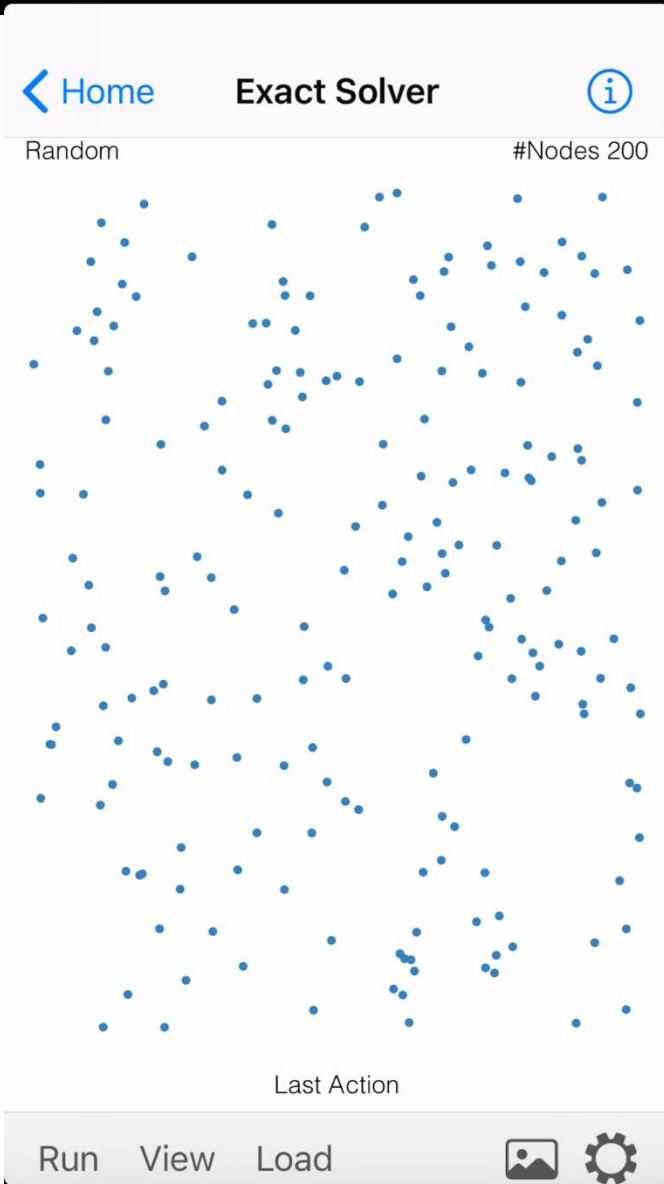
Beale-Orchard-Hayes-Preis 2000

schneller?“

22:51



Rundreise in der Neuen Welt



Alle 13509 Postämter der USA

y, Chvátal, Cook (1998)

10 Jahre (!) CPU-Zeit

ayes-Preis 2000

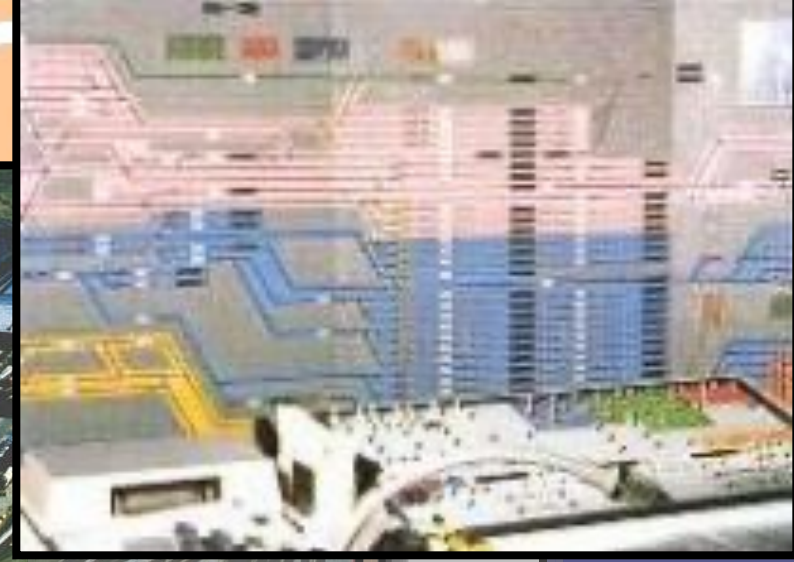
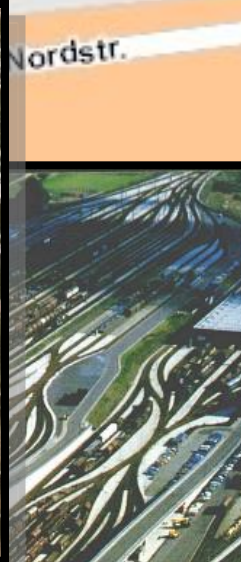
Eine optimale Rundreise in der Neuen Welt



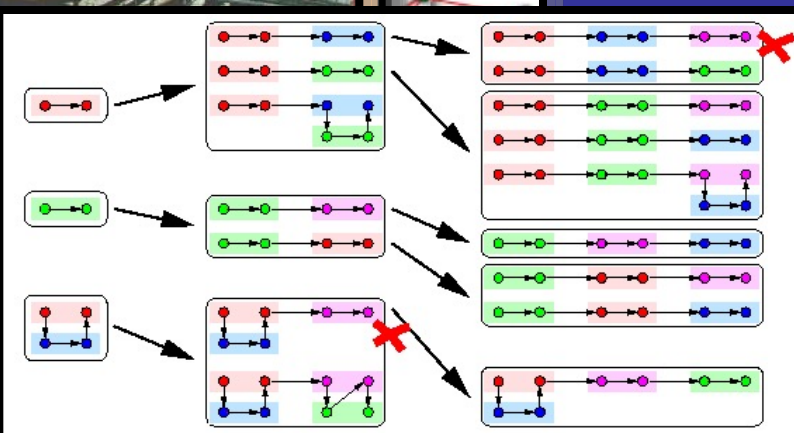
What's the complexity class of the best linear programming cutting-plane techniques? I couldn't find it anywhere. Man, the Garfield guy doesn't have these problems...

„Geht's nicht noch etwas schneller?“

Probleme optimaler Reisegestaltung



Eisenbahnplanung



Andere diskrete Optimierungsprobleme



Stabile Kommunikationsnetzwerke

Ein algorithmisches Problem

Gegeben: n Puzzleteile

Einfach so:

$$O(n^2)$$

Für $n=6$: 21

Für $n=100$: 5.050

Für $n=5000$: 12.502.500

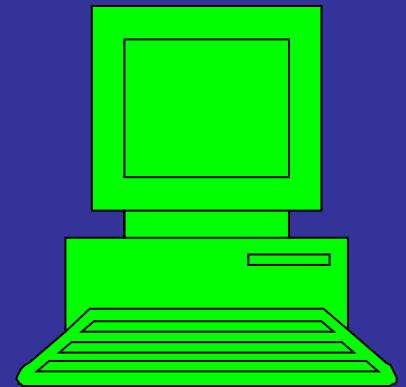
Raffiniert sortiert:

$$O(n \log n)$$

Gesucht: Eine systematische Anordnung der Teile

Konstruktives Lösen von Problemen

Gegeben: Eine Problembeschreibung



Gesucht: Ein Algorithmus, der das Problem löst

„Geht’s nicht noch etwas schneller?“

Die Laufzeit von Algorithmen

Gegeben: Eine Problembeschreibung der Größe $O(n)$

Gegeben: $O(n)$ Zahlen

Gesucht: $O(n)$ Zahlen



$O(n^k)$

Die Klasse P

Gesucht: Ein polynomieller Algorithmus

Sortieren von Objekten

Gegeben: n Objekte unterschiedlicher Größe

23 17 13 19 33 28 15

Zahl der Vergleiche:

$O(n \log n)$

Gesucht:

Eine Sortierung nach Größe

„Geht's nicht noch etwas schneller?“

Ein untere Laufzeitschranke

Gegeben: n Objekte in einer beliebigen Anordnung

(1)

Insgesamt gibt es $n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$ mögliche Anordnungen

(2)

Jeder Vergleich teilt die verbleibenden Anordnungen in zwei Mengen

(3)

Im schlechtesten Fall bleibt die größere Menge übrig

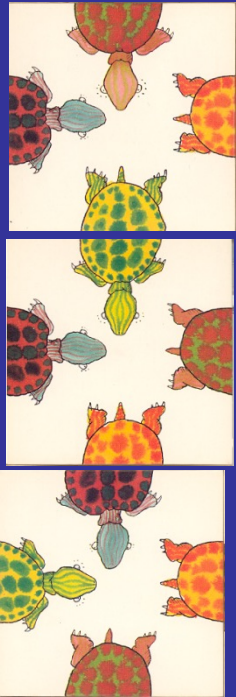
(4)

Insgesamt benötigen wir
 $\log(n!) = \Omega(n \log n)$
Vergleiche.

Ein algorithmisches Problem

Gegeben: n Puzzleteile

 Das Bild kann nicht angezeigt werden.



Probieren:

$$\Omega(n! 4^{n-1})$$

Für n=9: 23.781.703.680

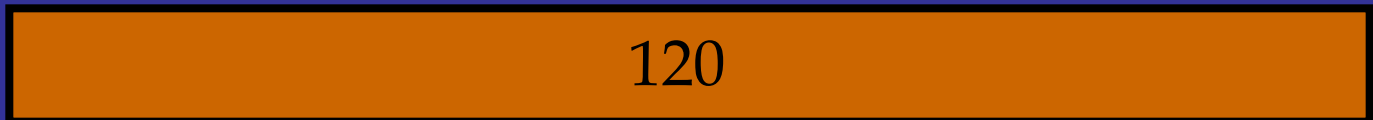
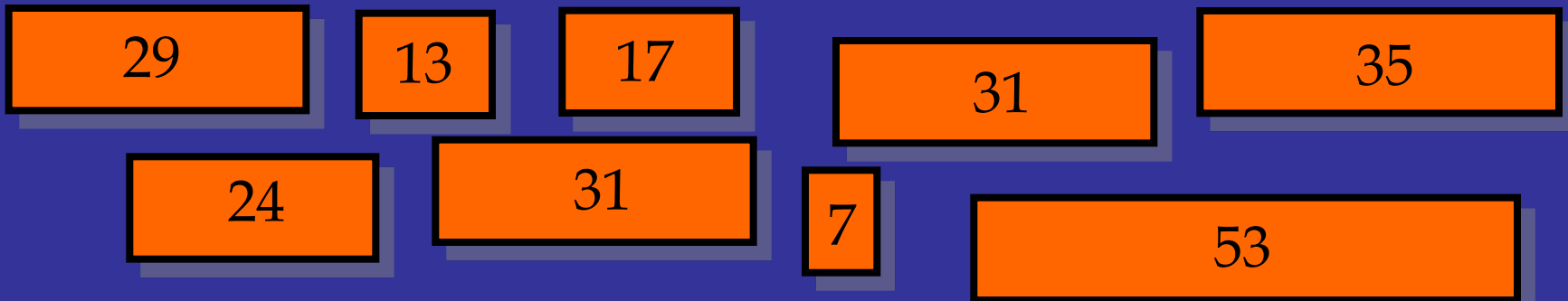
Raffiniert?!

Problem: „Sackgassen“!

Gesucht: Eine systematische Annahemethode zum Finden einer Lösung

Kofferpacken für die Reise

Gegeben: Eine Menge von n Objekten, jedes mit einer Größe l_i ; Gesamtgröße $\sum_{i=1}^n l_i = 2K$



„Geht's nicht noch etwas schneller?“

Gesucht: Eine Verteilung auf zwei Koffer der Größe K

Eigenschaften des Problems

(1)

Wenn es eine Lösung gibt, so lässt sie sich ziemlich schnell *NachPrüfen*.

Die Klasse NP

(2)

Wenn es *keine* Lösung gibt, lässt sich das anscheinend nur schlecht *beweisen*.

Alle 2^{n-1} Möglichkeiten?

Probleme, für die man pfiffig „schnell“ eine Lösung *Pfinden* kann:

Die Klasse P

(Echt pfundig - gepfundes Pfressen für Algorithmiker!)

Wo ist mein Schlüssel??

All

Ein

komplexitätstheoretischer

Glaubenssatz



Universalaussagen
lassen sich nicht
verifizieren,
sondern nur
falsifizieren.

ativ

als

egründen.

Ni

Also. Nachprüfen allein ist noch lange nicht Pfindig!

Karl Popper (1902-1994)

(Oder Pfiffig)

Noch schlechtere Nachrichten

Ein

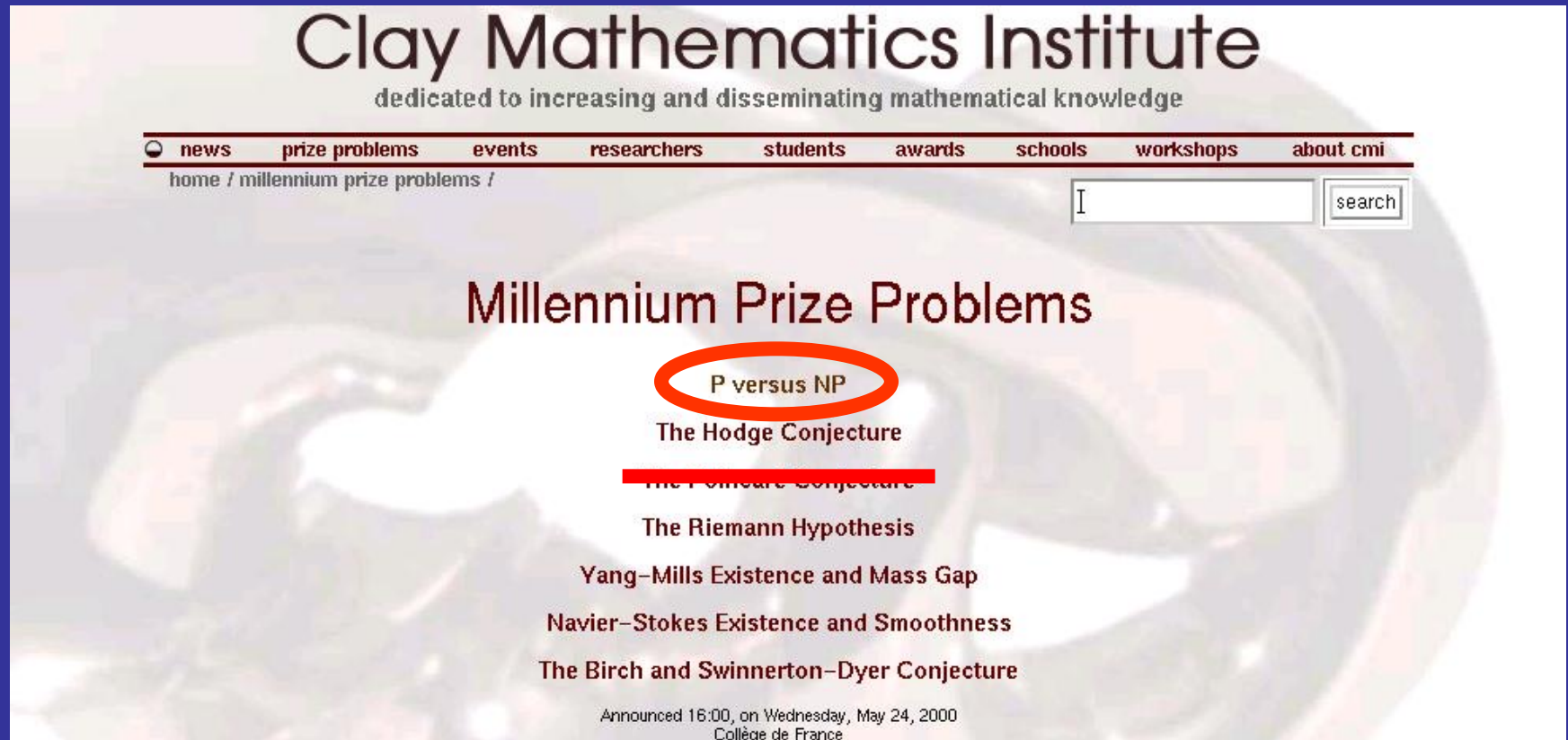
Satz von Cook (1973):

Es gibt schwerste
Probleme in NP,
sogenannte
„NP-vollständige
Probleme“

bede

$$P = NP$$

Ein Millenniumproblem



Clay Mathematics Institute
dedicated to increasing and disseminating mathematical knowledge

news prize problems events researchers students awards schools workshops about cmi

home / millennium prize problems /

search

Millennium Prize Problems

- P versus NP
- The Hodge Conjecture
- ~~The Poincaré Conjecture~~
- The Riemann Hypothesis
- Yang–Mills Existence and Mass Gap
- Navier–Stokes Existence and Smoothness
- The Birch and Swinnerton–Dyer Conjecture

Announced 16:00, on Wednesday, May 24, 2000
Collège de France

Preisgeld: 1.000.000 \$

Was tun bei ~~NP-Vollständigkeit~~?

Idealer Algorithmus:

Liefert

1. ~~immer~~
2. ~~schnell~~
3. ein ~~optimales~~ Ergebnis.

Strategien in schwierigen Situationen:

- (A) Mit dem Schicksal hadern + diskutieren
- (B) Auf Glück vertrauen
- (C) Hart arbeiten
- (D) Erwartungen zurückschrauben

Algorithmische Strategien:

- (A) Komplexitätsanalyse: Gibt es Fälle, die nicht NP-vollständig sind?
- (B) Heuristiken: Raten und hoffen
- (C) Algorithmen-Tuning, um konkrete Instanzen optimal lösen zu können.
- (D) „Gut“ statt „optimal“:
Approximationsalgorithmen

Das bekannteste mathematische Problem für 350 Jahre

$$a^n + b^n = c^n$$

Fermatsche Vermutung (ca. 1650):

Es gibt keine ganzzahlige
Lösung für $n > 2$.

Beweis (Fermat)

Beweis: Wiles 1997

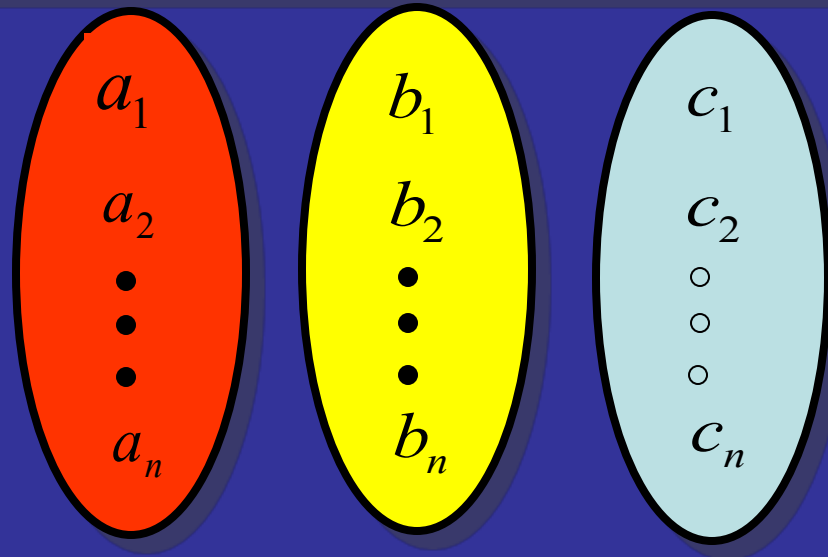
„Wannhat wunderbar, leider ist der Platz z

Ein ungelöstes algorithmisches Problem der Gegenwart

$$a^n + b^n = c^n$$

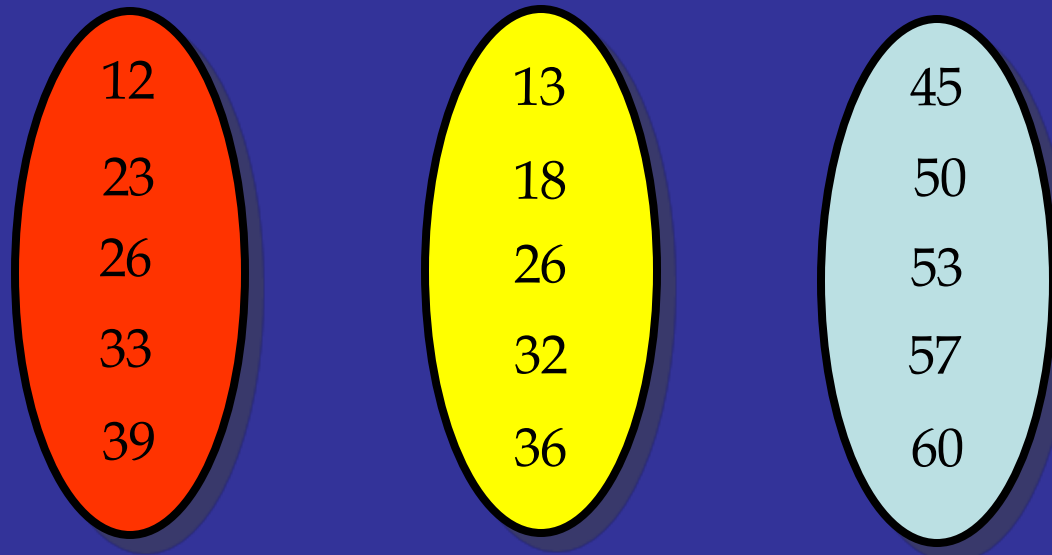
3SUM

Gegeben: Mengen A, B, C



Gesucht: i, j, k mit $a_i + b_j = c_k$

Wie schwer ist 3SUM?

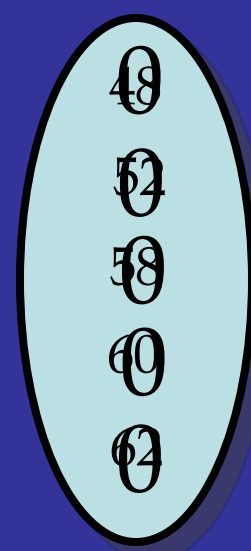
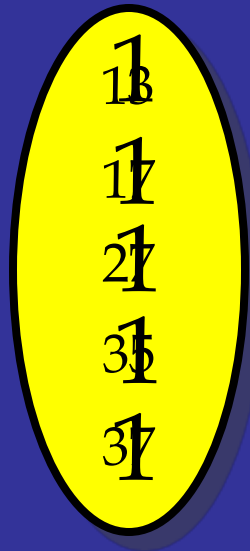
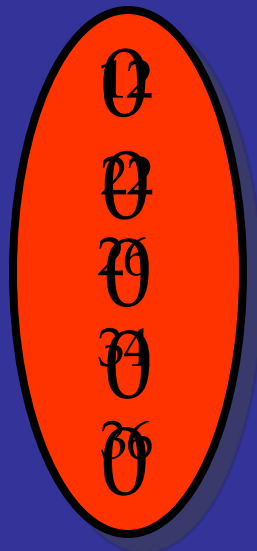


Gesucht: i, j, k mit $a_i + b_j = c_k$

Gibt es einen Algorithmus schneller als $O(n^2)$?

Demaine et al. 2008: $O(n^2 \log \log n / \log n)$

Wie schwer ist 3SUM?



modulo 2

Gesucht: i, j, k mit $a_i + b_j = c_k$

Gibt's nicht!!

Warum ist 3SUM interessant?

Komplexitätstheorie

5SUM

Objekt mit n Kanten

Gegeben: ~~n~~ ^{n^2} Zahlen

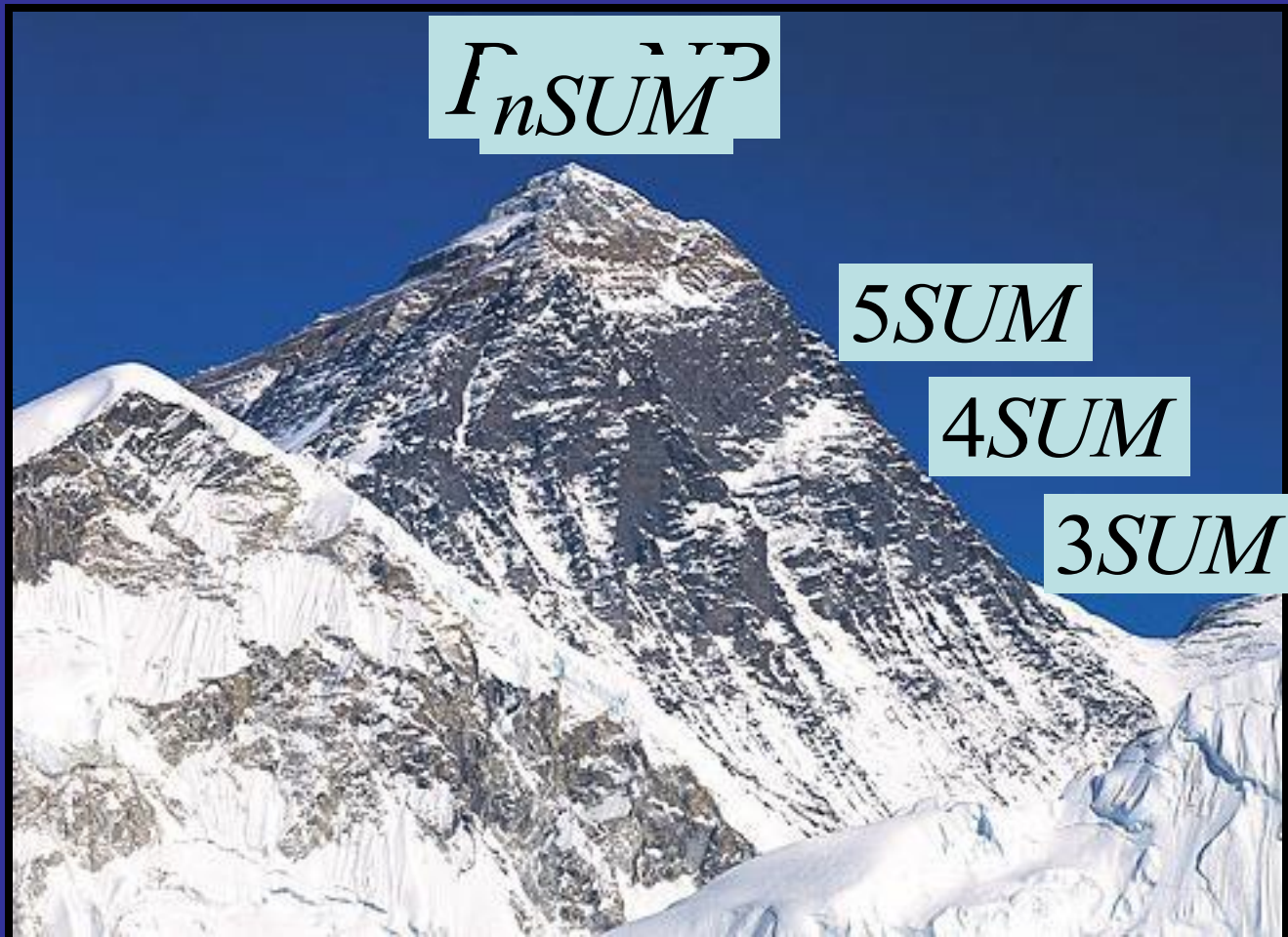
Gesucht: ~~n~~ ^{k} Zahlen

$\Omega(n^{n-1})?!$

Noch ein bewegtes Objekt mit n Kanten

Kollidieren die Objekte?

Eine Idealroute zum Gipfel



Mt. Everest Südwestflanke

Mehrdimensionales Kofferpacken

BRAUNSCHWEIGER ZEITUNG WOLFENBÜTTELER ZEITUNG UND ANZEIGER

Samstag, 28. Januar 2006

unabhängig · nicht parteigebunden

Nr. 24 · 61. Jahrgang · 1,20 €

Wenn Mathematiker Autos beladen

TU-Professor Sándor Fekete tüftelt an ganz handfesten Alltagsproblemen, kombiniert und optimiert

Von Cornelia Steiner

Sieben große Probleme müssen Mathematiker weltweit lösen, jeweils eine Million Dollar Preisgeld sind dafür ausgeschrieben. Bei manchen von ihnen versteht man selbst die Fragestellung erst nach einigen Fachsemestern. Das gesteht sogar Sándor Fekete, Professor für mathematische Optimierung an der TU Braunschweig. Er hat auch nicht den Anspruch, eines dieser abstrakten Probleme zu lösen. Stattdessen widmet er sich mit Kollegen und Studenten den handfesten Fragen des alltäglichen Lebens. Denn Ma-

thematik hat eben doch etwas mit dem Hier und Jetzt zu tun: mit Routenplanung zum Beispiel, mit dem Packen eines Kofferraumes oder sogar mit Rasenmähen. All das sind Probleme, bei denen es darum geht, aus einer bestimmten Menge möglicher Kombinationen die beste Lösung zu finden.

In jedem Fall gilt: „Man braucht immer einen Algorithmus, der unabhängig vom Einzelfall eine systematische Lösung anbietet“, sagt Fekete. Für die Routenplanung bedeutet das: Ein einziger Algorithmus liefert sowohl den kürzesten Weg von

„Spannend wird das Lösen von Optimierungsproblemen dadurch, dass man oft nicht alle Informationen zur Verfügung hat.“

Sándor Fekete

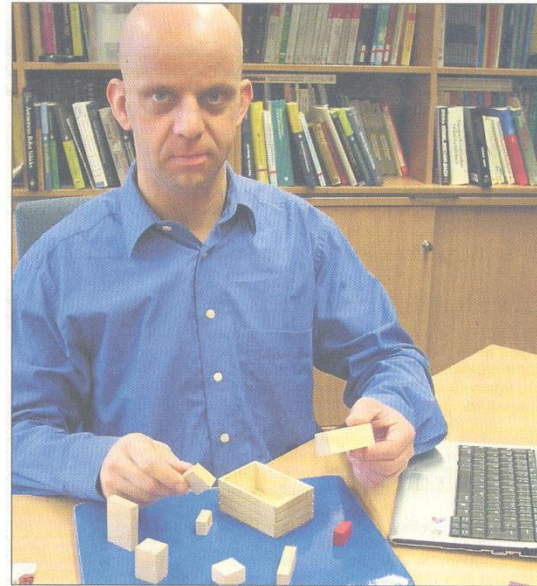
dar. In unserem Fall wären die Knoten Kreuzungen und die Verbindungen Wege. Bevor gerechnet wird, muss der Umfang des Graphen allerdings eingeschränkt werden: Für die Fahrt nach Peine ist schließlich das Umfeld von Helmstedt uninteressant. „Wenn so eine Struktur vorhanden ist, kann man sehr gut ermitteln, wie man am schnellsten zum Wunschort kommt“, sagt er.

Doch alles hat auch seine Tücken, denn es gibt einfache und schwere Probleme: Einfach ist es, den kürzesten Weg zwischen zwei Punkten zu berechnen. Einfach ist es auch, die schnellste Verbindung in einem

Fahrplan zu finden, oder die billigste Flugverbindung zu ermitteln.

Schwierig wird das Ganze aber, sobald mehrere Wegeprobleme ineinander greifen: Das ist der Fall, wenn der kürzeste Weg über mehrere Punkte in unbestimmter Reihenfolge berechnet wird. Wer also eine schnelle Rundreise

durch alle Braunschweiger Kneipen plant, sollte wissen, wie das funktioniert. Kompliziert ist es auch, einen guten Bahnfahrplan zu erstellen, oder Flugpläne. Denn dann müssen zusätzliche Aspekte beachtet werden – Art der Flugzeuge, Größe der Besatzung, Strecken, Anzahl der



Professor Sándor Fekete zeigt auf einfache Weise die Probleme, die sich beim Packen und Beladen eines Kofferraumes ergeben können. Fotos (2): Steiner

nicht alle wichtigen Informationen zur Verfügung hat“, sagt er. So ist zum Beispiel ungewiss, ob ein Stau auftritt oder wie viele Passagiere tat-

sich mit modernen Computersystemen und großen Kommunikationsnetzen beschäftigen, aber auch mit selbsttätigen Robotern und de-

Es gibt noch viele Gipfel...



Literaturtipp:



Peter Gritzmann, Renè Brandenburg:
Das Geheimnis des kürzesten Weges