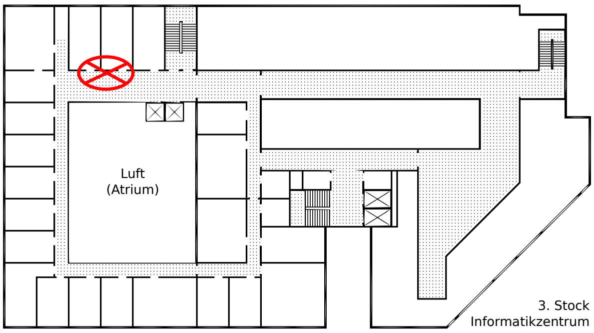
Algorithmen und Datenstrukturen **Winter 2024/25**
Prof. Dr. Sándor P. Fekete
Ramin Kosfeld
Chek-Manh Loi

Abgabe: 10.12.2024
Rückgabe: ab 16.12.2024

Hausaufgabenblatt 3

Abgabe der Lösungen bis zum Dienstag, den 10.12.2024 um 13:00 Uhr im Hausaufgabenschrank bei Raum IZ 337 (siehe Skizze rechts). Es werden nur mit einem dokumentenechten Stift (kein Rot!) geschriebene Lösungen gewertet.
Schreibe auf die Abgabe unbedingt deinen Namen, Matrikel- und Gruppennummer! Mehrere Blätter tackern!



Hausaufgabe 1 (Algorithmentwurf): **(5 Punkte)**
Cliquen sind ein wichtiges Grundkonzept in Graphen, das an verschiedensten Stellen in der Informatik und Mathematik Anwendung findet.

In einem einfachen, ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ ist eine *Clique* C eine Knotenmenge in G, in der alle Knoten benachbart sind, d.h. es existiert eine Kante zwischen allen Paaren von Knoten in C. Damit sind C die Knoten eines vollständigen Teilgraphen in G.

Entwirf einen Algorithmus IsClique wie folgt:

- Eingaben: Ein einfacher Graph $G = (V, E)$ und Knotenmenge $C \subseteq V$ mit $C \neq \emptyset$.
- Ausgabe: True, falls C eine Clique in G ist; sonst False.

Gib deinen Algorithmus als Pseudocode von maximal 14 Zeilen an.

(Hinweis: Ein Korrektheitsbeweis ist nicht notwendig.)

Hausaufgabe 2 (Asymptotisches Wachstum): **(6+3+6 Punkte)**

a) Bestimme jeweils geeignete Konstanten, um zu zeigen, dass
  (i) $f(n) := 2n^3 - 2n + \log_2 n \in \Theta(n^3)$
  (ii) $f(n) := n^2 + \sqrt{17} \cdot n - 2 \in \Omega(n^2)$
  (iii) $f(n) := \frac{1}{n^2} + 1234 \in \mathcal{O}(1)$.

b) Ordne folgende Klassen nach Inklusion. Markiere außerdem identische Klassen.

(Hinweis: Schreibe $A \subset B$, wenn jedes Element aus A auch in B vorkommt. Schreibe $A = B$ für identische Klassen. Schreibe alle Klassen in einer richtigen Reihenfolge in einer Zeile hintereinander, also zum Beispiel $A \subset B = C \subset D \subset E \ldots$.)

$$\mathcal{O}(1), \quad \mathcal{O}\left(\frac{n}{2}\right), \quad \mathcal{O}(n^2), \quad \mathcal{O}(n+5), \quad \mathcal{O}(n^2-n), \quad \mathcal{O}(2^n), \quad \mathcal{O}(n \log n)$$

c) Betrachte die Funktionen $f, g, h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.
Zeige oder widerlege:

(i) $f(n) \in \mathcal{O}(g(n))$ und $g(n) \in \Theta(h(n)) \implies f(n) \in \Theta(h(n))$

(ii) $f(n) \in \Omega(g(n))$ und $g(n) \in \Omega(h(n)) \implies f(n) \in \Omega(h(n))$

(Hinweis: Falls eine Aussage gilt, sollte dein Beweis die Definition der $\mathcal{O}$-Notation einsetzen und zeigen, wie die neuen Konstanten aus den ursprünglichen zu berechnen sind. Falls eine Aussage nicht gilt, hilft es oft, als Gegenbeispiel Funktionen für f, g und h zu finden, für die die Aussage nicht gilt.)