Technische Universität Braunschweig

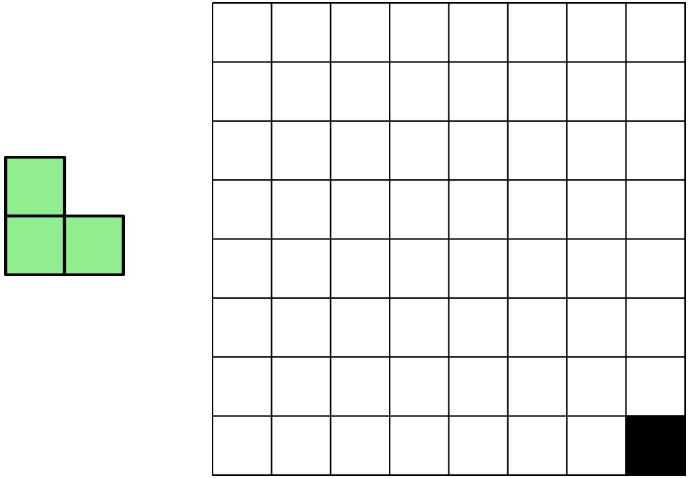
Algorithmen und Datenstrukturen
Übung 3

Ramin Kosfeld und Chek-Manh Loi

14.12.2023

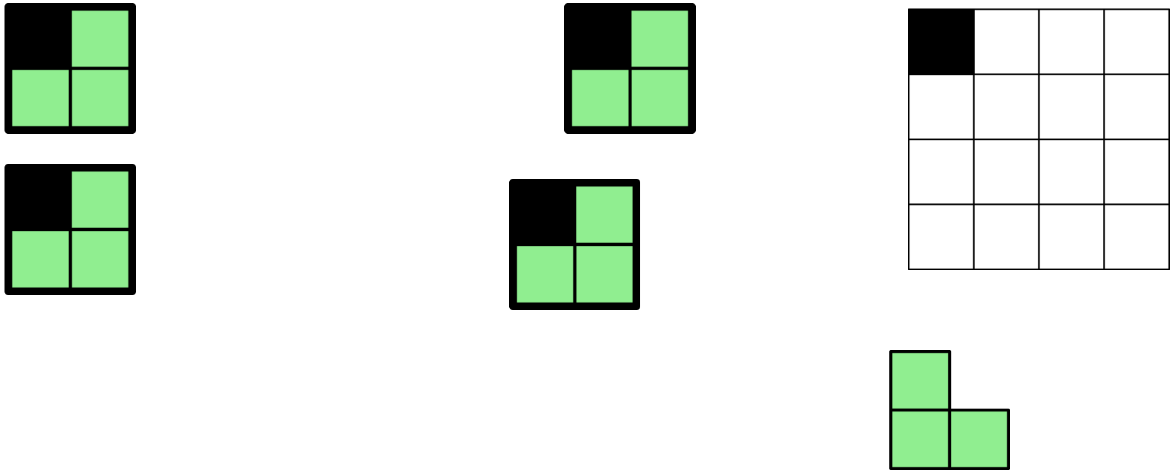
Einführendes Beispiel

Kann man ein 8x8 Schachbrett mit L-Trominos füllen, wenn man eine beliebige Ecke des Feldes löscht?

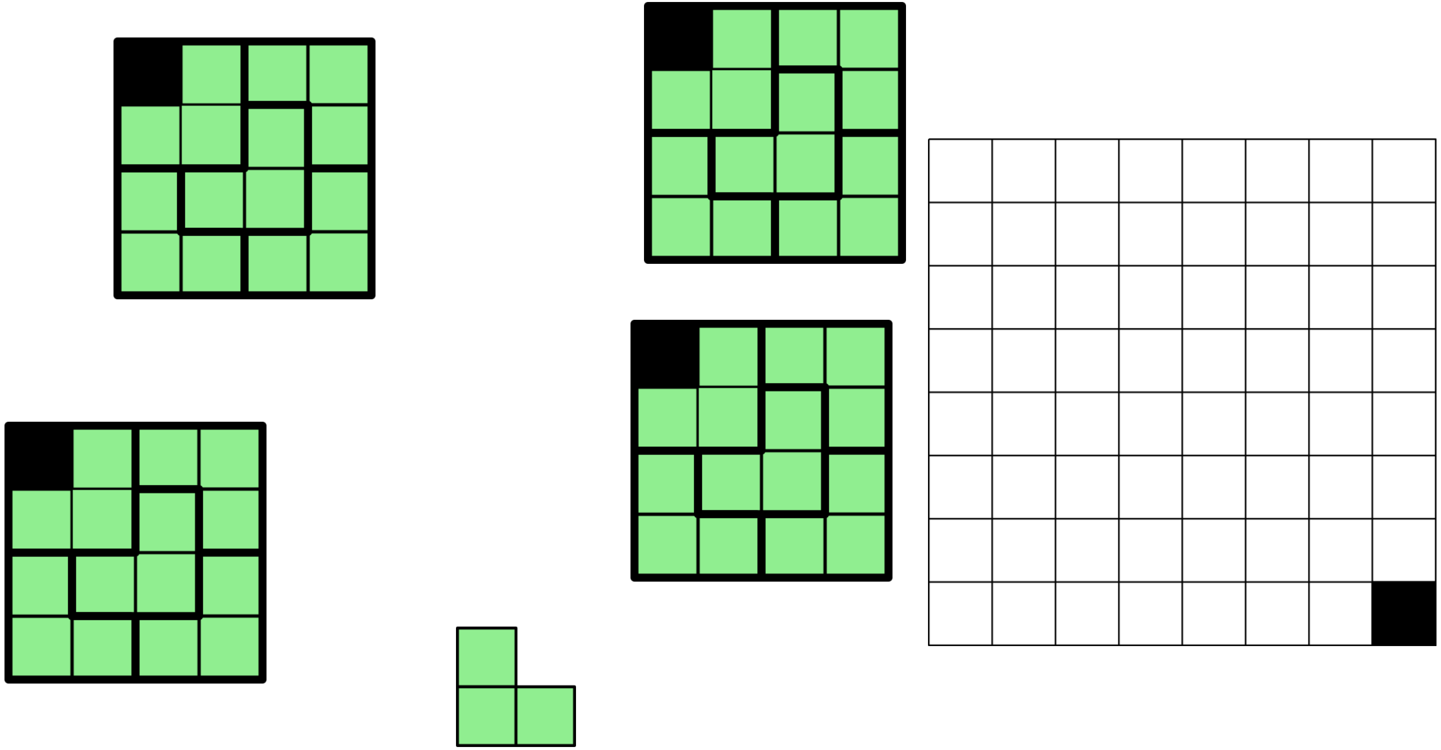


Einführendes Beispiel

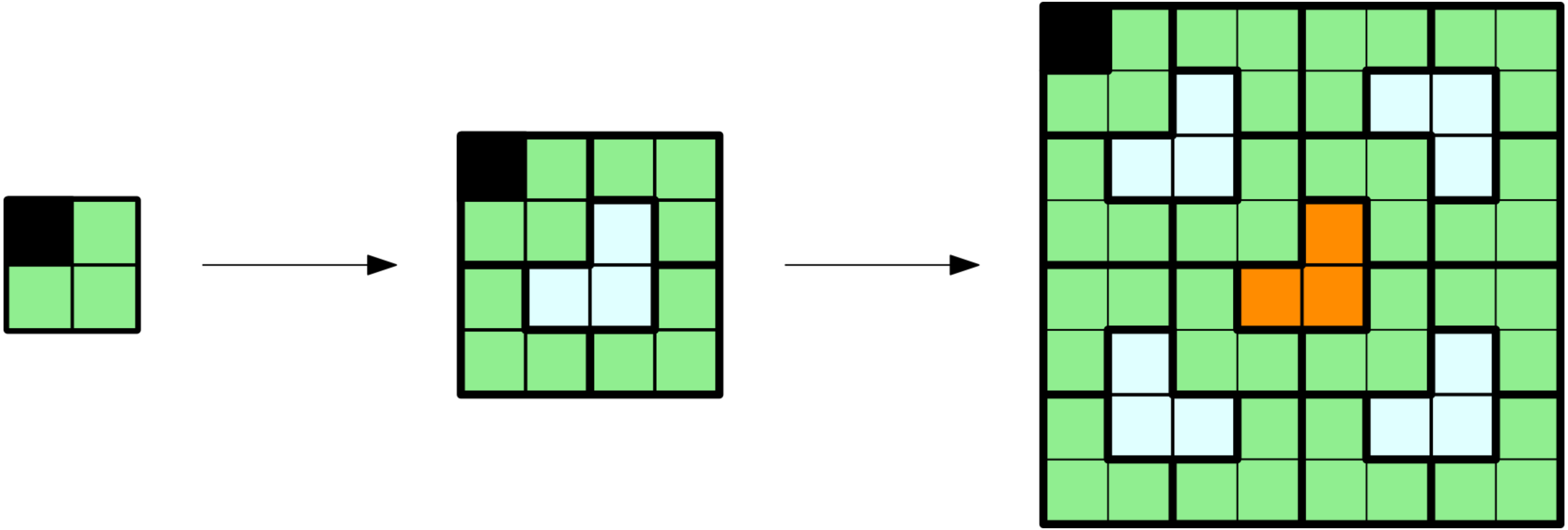
Einführendes Beispiel



Einführendes Beispiel



Einführendes Beispiel



L-Trominos und das Schachbrett

Satz: Jedes $2^n \times 2^n$ Schachbrett (minus eine Ecke) kann mit L-Trominos gepflastert werden.

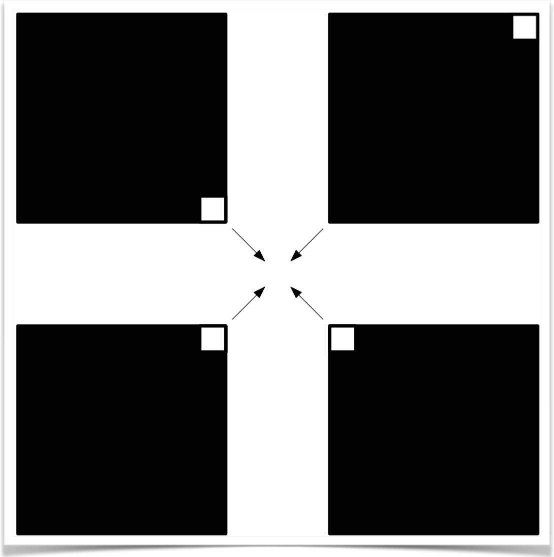
Beweis:
Für $n = 1$: $2^1 \times 2^1$ Schachbrett mit einer Ecke weniger. Es bleibt ein L-Tromino übrig. Dort können wir also ein L-Tromino pflastern.

Annahme: Wir haben den obigen Satz für ein bel., aber festes n beweisen.

Wir zeigen nun: Wir können die Aussage auch für $n + 1$ beweisen.

L-Trominos und das Schachbrett

Zunächst: Wir können ein $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ Schachbrett in vier $2^n \times 2^n$ Schachbretter disjunkt unterteilen (teile horizontal und vertikal in der Mitte)



Wir wissen:

1. Wir können die vier Schachbretter mit L-Trominos pflastern.
2. Die vier Schachbretter sind unabhängig. Wir können sie also so anordnen, dass drei Schachbretter ihre fehlende Ecke in die Mitte drehen.
   Dadurch entsteht ein L-Tromino, welches wir füllen können.

Also können wir auch ein $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ mit L-Trominos pflastern.

Frage: Warum ist damit der Beweis fertig?

Beweistechniken – Teil 2
Vollständige Induktion

Beweise – Vollständige Induktion

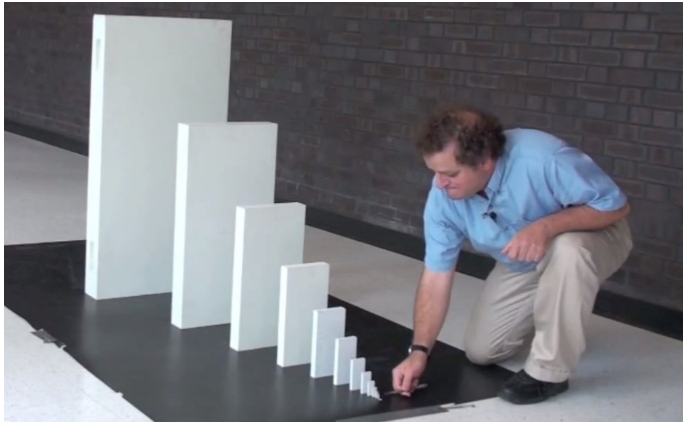
Beweise – Vollständige Induktion

… beweise die Aussage

„Für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ gilt $\boldsymbol{P(n)}$“

durch Beweisen von

1. $\boldsymbol{P(n_0)}$ und
2. „Für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ gilt $\boldsymbol{P(n)} \Rightarrow \boldsymbol{P(n+1)}$“



Funktioniert, wenn sich alle Elemente inkrementell aufbauen lassen

- Natürliche Zahlen
- Graphen
- …

Beweise – Vollständige Induktion

Aufbau eines Induktionsbeweises. Immer immer immer:

Induktionsanfang (IA)

Die Aussage gilt für einen oder mehrere Startwerte.

Induktionsvoraussetzung (IV)

Eine Zeile von wegen „Nimm an, die Aussage gilt schon für ein n." (genaue Formulierung folgt)

Ist konzeptionell wichtig! Hinschreiben! Gibt oft schon einen Punkt in den HA.

Induktionsschritt (IS)

Der Kern: Nutze die IV, um $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ zu zeigen.

1. $\boldsymbol{P(n_0)}$
2. „Für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ gilt $\boldsymbol{P(n) \Rightarrow P(n+1)}$"

Ein Klassiker: Die Gaußsche Summenformel

Zeige: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

Induktionsanfang:

Für $n = 1$ ist $\sum_{i=1}^{n} i = 1 = \frac{2}{2} = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}$. Diese Aussage stimmt also.

Induktionsvoraussetzung:

Es gelte $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ mit n beliebig, aber fest.

Induktionsschritt: $(n \rightarrow n+1)$

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = (n+1) + \sum_{i=1}^{n} i$$

$$\overset{IV}{\triangleq} (n+1) + \frac{n(n+1)}{2}$$

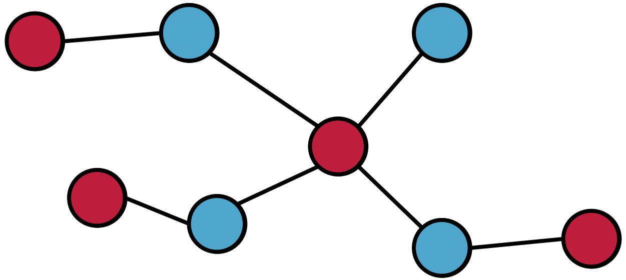
$$= \frac{2(n+1) + n(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Induktion auf Graphen: Färbbarkeit

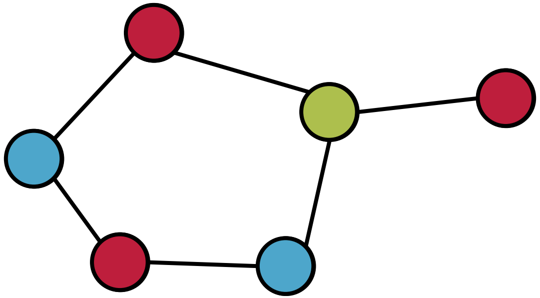
Problem: Färbe Knoten eines Graphen so, dass benachbarte Knoten nicht dieselbe Farbe besitzen!

(Die Zahl der Farben ist begrenzt)

Reichen 2 Farben aus, um diese Graphen zu färben?



Ja! → 2-färbbar.



Nein! → *Nicht* 2-färbbar. Aber 3-färbbar.

Induktion auf Graphen: Färbbarkeit

Behauptung: Ein Graph G mit Maximalgrad k ist $(k+1)$-färbbar. $k \in \mathbb{N}\ (k \geq 1)$

Beweis: Induktion über die Anzahl n der Knoten des Graphen.

- $P(n)$: Ein Graph mit n Knoten und Maximalgrad maximal k ist $(k+1)$-färbbar.

Induktionsanfang:

Betrachte den Fall $n = 1$:

- Ein Graph mit nur einem Knoten hat Maximalgrad 0
- Dieser Graph ist offensichtlich mit einer Farbe färbbar.
- $P(1)$ gilt.

Induktion auf Graphen: Färbbarkeit

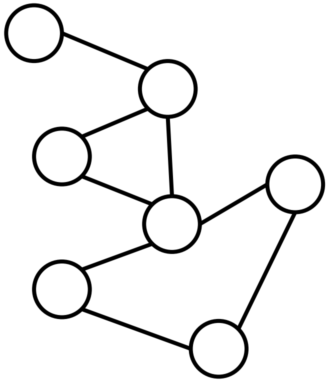
Induktionsvoraussetzung:

Gelte die Behauptung $P(n)$ für n, k beliebig; n fest.

Induktionsschritt: $(\boldsymbol{n} \rightarrow \boldsymbol{n}+\mathbf{1})$

- Sei $P(n)$ wahr und sei G ein Graph mit $n+1$ vielen Knoten und Maximalgrad k.
- Entferne beliebigen Knoten v und alle inzidenten Kanten.
  - Es resultiert Graph $G‘$.
  - $G‘$ hat n Knoten.
  - Der Maximalgrad ändert sich nicht, bleibt k.

→ Für $G‘$ gilt die IV: $G‘$ ist mit $k+1$ vielen Farben färbbar.



Induktion auf Graphen: Färbbarkeit

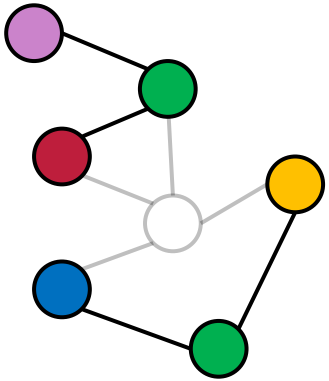
Induktionsvoraussetzung:

Gelte die Behauptung $P(n)$ für n, k beliebig; n fest.

Induktionsschritt: $(\boldsymbol{n} \rightarrow \boldsymbol{n}+\mathbf{1})$

- Sei $P(n)$ wahr und sei G ein Graph mit $n+1$ vielen Knoten und Maximalgrad k.
- Entferne beliebigen Knoten v und alle inzidenten Kanten.
  - Es resultiert Graph G‘.
  - G‘ hat n Knoten.
  - Der Maximalgrad ändert sich nicht, bleibt k.

→ Für G‘ gilt die IV: G‘ ist mit $k+1$ vielen Farben färbbar.



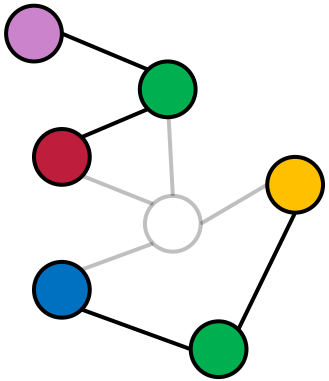
Induktion auf Graphen: Färbbarkeit

Induktionsschritt: $(\boldsymbol{n} \rightarrow \boldsymbol{n}+\mathbf{1})$

- Sei $P(n)$ wahr und sei G ein Graph mit $n+1$ vielen Knoten und Maximalgrad k.
- Entferne beliebigen Knoten v und alle inzidenten Kanten.
  - Es resultiert Graph G‘.
  - G‘ hat n Knoten.
  - Der Maximalgrad ändert sich nicht, bleibt k.

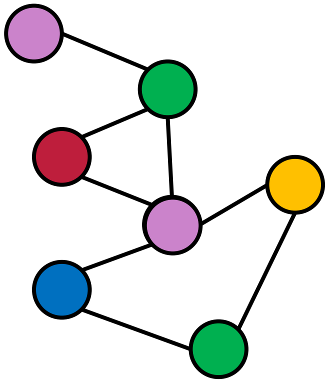
  → Für G‘ gilt die IV: G‘ ist mit $k+1$ vielen Farben färbbar.

  - Füge Knoten v (und seine inzidenten Kanten) wieder zu G‘ hinzu.



Induktion auf Graphen: Färbbarkeit

Induktionsschritt: $(\boldsymbol{n} \rightarrow \boldsymbol{n}+\mathbf{1})$



- Sei $P(n)$ wahr und sei G ein Graph mit $n+1$ vielen Knoten und Maximalgrad k.
- Entferne beliebigen Knoten v und alle inzidenten Kanten.
  - Es resultiert Graph G‘.
  - G‘ hat n Knoten.
  - Der Maximalgrad ändert sich nicht, bleibt k.

  → Für G‘ gilt die IV: G‘ ist mit $k+1$ vielen Farben färbbar.

  - Füge Knoten v (und seine inzidenten Kanten) wieder zu G‘ hinzu.
  - Da v maximal k viele Nachbarn hat und wir $k+1$ viele Farben zur Verfügung haben, können wir v mit der übrigen Farbe färben.

  Damit folgt die Behauptung nach dem Prinzip der Induktion.

Induktion auf Graphen, generell

Worüber lasse ich die Induktion laufen?

- Über die Zahl der Knoten?
  - Dann muss ich alle möglichen gleichzeitig hinzukommenden Kanten *gleichzeitig* in der Argumentation berücksichtigen
- Über die Zahl der Kanten?
  - Wie behandele ich dann Knoten?
- (Oder sogar über beide zusammen - beweise zwei Fälle, wenn jeweils eine Kante oder ein Knoten hinzukommt?)
  - (Advanced stuff)

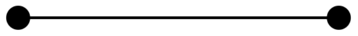
→ Alle diese Optionen sind möglich.
Was funktioniert, hängt direkt mit dem Beweis zusammen.

Zusammenhang in Graphen

<u>Behauptung:</u> Alle Graphen (mit mind. zwei Knoten), bei denen alle Knoten mindestens den Grad 1 haben, sind zusammenhängend.

„Beweis“:

I.A.: Der kleinste Graph, bei dem jeder Knoten (mind.) Grad 1 besitzt zwei Knoten und eine Kante.



I.V.: Für ein bel., aber festes n, sind alle Graphen mit n Knoten und Minimalgrad 1 zusammenhängend.

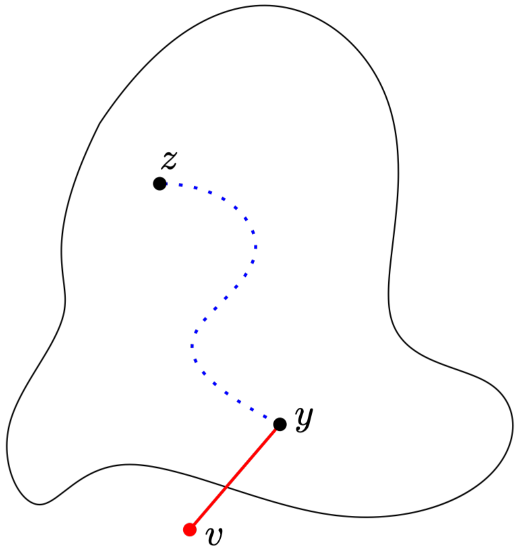
Zusammenhang in Graphen

I.S.: $n \to n+1$

Betrachte einen Graphen G mit n Knoten, in dem jeder Knoten mindestens den Grad 1 hat.

Nach Annahme ist dieser Graph zusammenhängend; es existiert also ein Pfad zwischen je zwei Knoten.

Nun fügen wir einen neuen Knoten plus eine Kante hinzu, um einen Graphen mit $n+1$ Knoten zu erhalten.



Damit ist der neue Knoten zu einem Knoten G verbunden, wodurch es zwischen allen $n+1$ Knoten einen Pfad gibt.
$\Rightarrow$ Der neue Graph ist zusammenhängend!

Zusammenhang in Graphen

Behauptung: Alle Graphen (mit mind. zwei Knoten), bei denen alle Knoten mindestens den Grad 1 haben, sind zusammenhängend.

Die Aussage gilt gar nicht: Was lief im Beweis schief?

Konnten wir über unsere Methode alle möglichen Graphen mit $n+1$ Knoten erzeugen?

Build-up Error

Dies ist ein typischer “***build-up error***”.

Fehlerhafte Annahme: Jeder Graph mit $n + 1$ Knoten mit einer Eigenschaft A kann aus einen Graphen mit n Knoten und derselben Eigenschaft konstruiert werden.

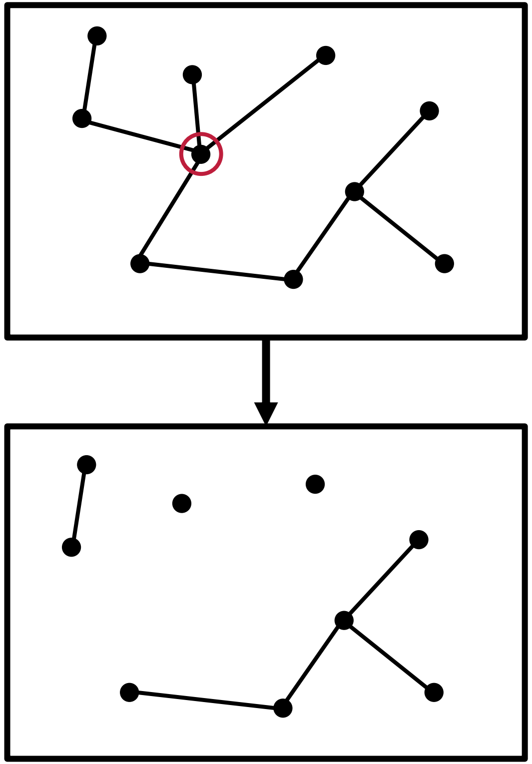
Ausweg: “***Shrink down, grow back***”

Nimm einen bel. Graphen mit $n + 1$ Knoten, entferne einen Knoten, wende I.V. an, füge Knoten wieder an und argumentiere, warum die Eigenschaft immer noch gilt.

Zusammenhang in Graphen

I.S.: $n \to n + 1$

Betrachte einen Graphen G mit $n + 1$ Knoten in dem jeder Knoten mindestens den Grad 1 hat.



Nimm einen beliebigen Knoten (samt Kanten) aus G heraus.

Der Restgraph enthält n Knoten, welche alle den Grad…mind. 0 besitzen…

Darauf können wir I.V. nicht anwenden!

Beliebte Fehler

Beliebte Fehler

- Build-Up-Error:

  Füge etwas hinzu, um den Induktionsschritt zu zeigen.

  So werden ggf. nicht alle Strukturen berücksichtigt!

- Kein Induktionsanfang, -voraussetzung oder -schritt.

  IA, IV und IS müssen vorhanden sein!

- Zu wenig Induktionsanfänge (z.B. bei Rekursionen mit mehreren Anfängen)

Induktionsvoraussetzung falsch angewendet

<u>Behauptung:</u> $a^n = b^n$ für alle $a, b \in \mathbb{R}, n \geq 0$

„Starke Induktion“.
Manchmal reicht der direkte Vorgänger nicht aus.

„Beweis:“

I.A.: $n = 0: a^0 = 1 = b^0$

I.V.: $a^x = b^x$ gilt für alle $x \leq n$ mit n bel., aber fest.

I.S.: $a^{n+1} = a^n a^1 = b^n b^1 = b^{n+1}$

→ IV wird falsch genutzt /
IA deckt nicht alle benötigten Fälle ab

Was ist eigentlich, wenn ich die Induktionsvoraussetzung gar nicht anwende?

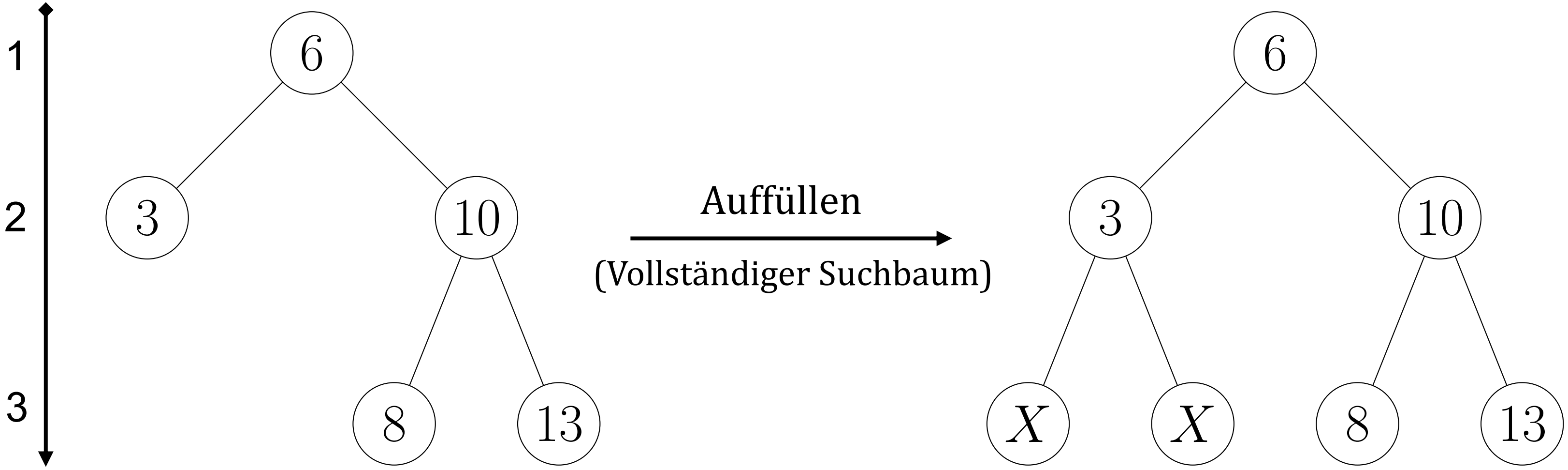
→ Dann brauche ich gar keine Induktion für den Beweis – hat ja ohne geklappt!

- (… oder unser Beweis ist fehlerhaft.)

Beispiele für Vollständige Induktion

Knoten in binären Suchbäumen

Satz: Sei B ein binärer Suchbaum der Höhe h mit n Knoten. Dann ist $n \leq 2^h - 1$.



$h = 3, n = 5 \leq 7 = 2^3 - 1$

Höhe bleibt gleich.
Anzahl an Knoten ist maximal!

Knoten in binären Suchbäumen

Satz: Sei B ein ***vollständiger*** binärer Suchbaum der Höhe h mit n Knoten. Dann ist $n = 2^h - 1$.

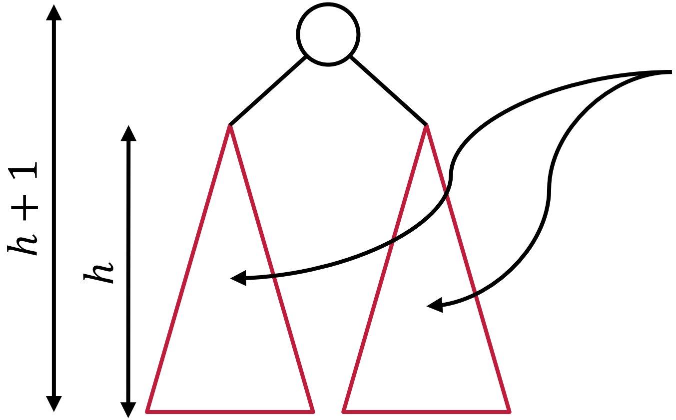
Induktionsanfang:
Vollständiger Suchbaum der Höhe 1 besitzt einen Knoten.
Außerdem ist $2^1 - 1 = 1 = n$.

Induktionsvoraussetzung:
Jeder vollständige binäre Suchbaum der Höhe h besitzt $n = 2^h - 1$ mit h beliebig, aber fest.

Knoten in binären Suchbäumen

Satz: Sei B ein ***vollständiger*** binärer Suchbaum der Höhe h mit n Knoten. Dann ist $n = 2^h - 1$.

Induktionsschluss:
Betrachte vollständigen binären Suchbaum B der Höhe $h + 1$.



Zwei vollst. bin. Suchbäume der Höhe h.
Nach IV: je $2^h - 1$ Knoten

Also hat B

$$2 \cdot (2^h - 1) + 1 = 2^{h+1} - 2 + 1 = 2^{h+1} - 1$$

Knoten.

Rekursionsformel

Satz: Sei $F_n := F_{n-1} - F_{n-2}$ mit $F_0 = 0$ und $F_1 = 1$.
Dann gilt:

$$F_n = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{3}\right)$$

Induktionsanfang:

$$F_0 = 0 = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 0 = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sin\left(\frac{0\pi}{3}\right)$$

Induktionsvoraussetzung:

Es gilt $F_n = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{3}\right)$ mit n beliebig, aber fest.

Rekursionsformel

Induktionsschritt:

$$F_{n+1} = F_n - F_{n-1}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\sin\left(\frac{\pi n}{3}\right) - \sin\left(\frac{\pi(n-1)}{3}\right)\right)$$

Für $n + 1 = 1$ geht es hier schief, denn F_{-1} ist unbekannt!

Rekursionsformel

Satz: Sei $F_n := F_{n-1} - F_{n-2}$ mit $F_0 = 0$ und $F_1 = 1$.
Dann gilt:

$$F_n = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{3}\right)$$

Induktionsanfang:

$$\left.\begin{aligned} F_0 &= 0 = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 0 = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sin\left(\frac{0\pi}{3}\right) \\ F_1 &= 1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sin\left(\frac{1\pi}{3}\right) \end{aligned}\right\}$$

Hier sind zwei Induktionsanfänge nötig!

Induktionsvoraussetzung:

Es gilt $F_n = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{3}\right)$ mit n beliebig, aber fest.

Rekursionsformel

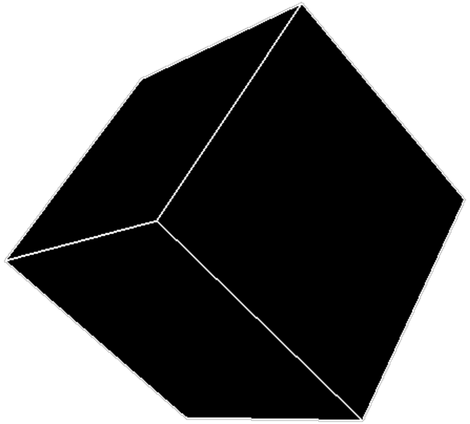
Induktionsschritt:

$$F_{n+1} = F_n - F_{n-1}$$

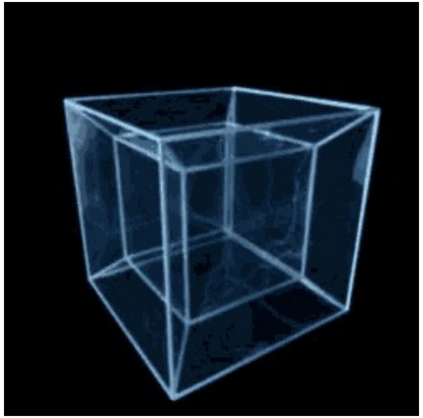
$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\sin\left(\frac{\pi n}{3}\right) - \sin\left(\frac{\pi(n-1)}{3}\right)\right)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\pi(n+1)}{3}\right)$$

$i = n \bmod 6$	$\sin\left(\frac{\pi i}{3}\right)$	$\sin\left(\frac{\pi i}{3}\right) - \sin\left(\frac{\pi(i-1)}{3}\right)$
0	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
2	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0
3	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
4	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
5	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0

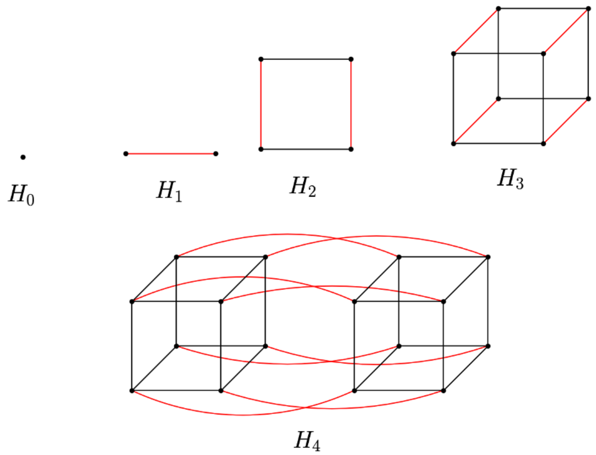


Hypercubes



n-Dimensionale Würfel

Zeige: n-Dimensionale Würfel sind hamiltonsch (besitzt einen Hamiltonkreis), für $n \geq 2$.



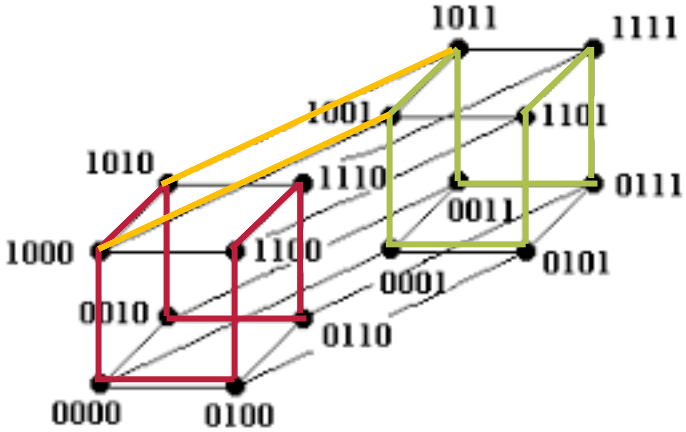
Beweise – Vollständige Induktion

I.A.: Der 2-Dimensionale Würfel ist hamiltonsch; der Kreis selbst ist die Tour.

I.V.: Der n-Dimensionale Würfel ist hamiltonsch für bel. aber festes n.

I.S.:

- Betrachte $(n + 1)$-Dimensionalen Würfel.
- Nach IV: Zwei Subgraphen hamiltonsch.
- Verschmelze die Kreise.



Beweise – Vollständige Induktion

I.A.: Der 2-Dimensionale Würfel ist hamiltonsch; der Kreis selbst ist die Tour.

I.V.: Der n-Dimensionale Würfel ist hamiltonsch für bel. aber festes n.

I.S.: Betrachte einen $(n+1)$-dimensionalen Würfel W und die Aufteilung in zwei n-dimensionale Würfel $W_1 \coloneqq \{v_1, \dots, v_{2^n}\}, W_2 \coloneqq \{v_1', \dots, v_{2^n}'\}$, wobei v_i und v_i' in W verbunden sind.

W_1 und W_2 sind beide hamiltonsch. Betrachte einen Hamiltonkreis, der in beiden Würfeln die gleiche Reihenfolge benutzt. O.B.d.A. sei $\mathrm{v}_1\mathrm{v}_{2^n}$ die letzte Kante des Kreises K_1 in W_1 und $\mathrm{v}_1'\mathrm{v}_2'$ die letzte Kante des Kreises K_2 in W_2.

Ein Hamiltonkreis in W ist: $\mathrm{v}_1\overbrace{\mathrm{v}_1' \dots \mathrm{v}_{2^n}'}^{K_2}\overbrace{\mathrm{v}_{2^n} \dots \mathrm{v}_1}^{K_1}$

… nächste Woche

Keine Übung!!!

Semesterplan Algorithmen und Datenstrukturen WS23/24

Woche (KW)	Woche (Datum)	Vorlesung (Di.,Mi)	Gr. Übung (Do.)	Kl. Übung (Mo.-Fr.)	Ausgabe (Mo.)	Abgabe (Mo. 14 Uhr)	Besprechung (in kl. Übung)
43	23.10.	/,0					
44	30.10.	/,1	0				
45	06.11.	2,3			P0+HA1		
46	13.11.	4,5	1	1			P0
47	20.11.	6,7			P1+HA2	HA1	
48	27.11.	8,9	2	2			P1+HA1
49	04.12.	10,11			P2+HA3	HA2	
50	11.12.	12,13	3	3			P2+HA2
51	18.12.	14,15	~~x~~		P3+HA4	HA3	
52	25.12.	Weihnachtsferien					
1	01.01.						
2	08.01.	16,17	4	4			P3+HA3
3	15.01.	18,19	5		P4+HA5	HA4	
4	22.01.	20,21		5			P4+HA4
5	29.01.	22,23	6		P5	HA5	
6	05.02.	24,25	7	6			

Frohe Weihnachten!
Bis nächstes Jahr :)