



# Algorithmen und Datenstrukturen

## Übung 1

Ramin Kosfeld und Chek-Manh Loi

16.11.2023

# Heute: Beweise



# Mathematische Aussagen

Mathematische Aussagen sind entweder wahr oder falsch.

- 13 ist eine gerade Zahl.
- Die Summe der ersten  $n$  natürlichen Zahlen ist  $n(n + 1)/2$ .
- Die größte Primzahl ist  $2^{82\,589\,933} - 1$
- Zusammenhängende, einfache Graphen mit  $n \geq 2$  Knoten und  $n - 1$  Kanten besitzen mindestens zwei Knoten vom Grad 1.
- Besitzt ein zusammenhängender Graph nur Knoten geraden Grades, besitzt er eine Eulertour.



# Mathematische Aussagen

Mathematische Aussagen sind entweder wahr oder falsch.

- 13 ist eine gerade Zahl.
- **Es gibt eine Zahl  $k \in \mathbb{N}$ , sodass  $2k = 13$**
- Die Summe der ersten  $n$  natürlichen Zahlen ist  $n(n + 1)/2$ .
- **Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  gilt:  $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$ .**
- Die größte Primzahl ist  $2^{82\,589\,933} - 1$
- **Für jede Primzahl  $p$  gilt:  $p \leq 2^{82\,589\,933} - 1$**
- Zusammenhängende, einfache Graphen mit  $n \geq 2$  Knoten und  $n - 1$  Kanten besitzen mindestens zwei Knoten vom Grad 1.
- **Für alle zusammenhängende, einfache Graphen mit  $n \geq 2$  Knoten und  $n - 1$  Kanten gilt: es gibt mindestens zwei Knoten vom Grad 1.**
- Besitzt ein zusammenhängender Graph nur Knoten geraden Grades, besitzt er eine Eulertour.
- **Für jeden zusammenhängenden Graphen  $G$ , deren Knotengrade alle gerade sind, gilt:  $G$  besitzt eine Eulertour**



# Mathematische Aussagen

Mathematische Aussagen sind entweder wahr oder falsch.

- Es gibt eine Zahl  $k \in \mathbb{N}$ , sodass  $2k = 13$
- Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  gilt:  $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$ .
- Für jede Primzahl  $p$  gilt:  $p \leq 2^{82\,589\,933} - 1$
- Für alle zusammenhängende, einfache Graphen mit  $n \geq 2$  Knoten und  $n - 1$  Kanten gilt: es gibt mindestens zwei Knoten vom Grad 1.
- Für jeden zusammenhängenden Graphen  $G$ , deren Knotengrade alle gerade sind, gilt:  $G$  besitzt eine Eulertour



Welche Aussagen sind wahr?

# Existenz- vs. Allaussagen

	Existenzaussage	Allaussage
Zeigen	<i>Beispiel</i> reicht als Beweis	Beweis
Widerlegen	Beweis	<i>Beispiel</i> reicht als Beweis

**Negation** einer Existenzaussage wird zu einer Allaussage.  
**Negation** einer Allaussage wird zu einer Existenzaussage.

# Logische Verknüpfungen

**Negation**  
("Nicht",  $\neg$ )

**Konjunktion**  
("Und",  $\wedge$ )

**Disjunktion**  
("Oder",  $\vee$ )

**Implikation**  
("wenn...dann",  
 $\Rightarrow$ )

**Äquivalenz**  
("genau dann  
wenn",  $\Leftrightarrow$ )

Mathematische  
Aussagen →

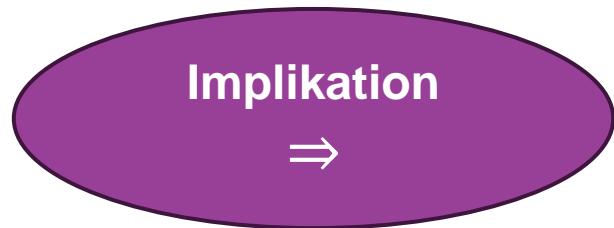
1: Aussage ist *wahr*  
0: Aussage ist *falsch*

$A$	$B$	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

# Fragepause

# Implikation & Äquivalenz I

In Beweisen (an der Tafel etc.) werden oft Implikations- und Äquivalenzpfeile einfach in den Fließtext eingebaut. Außerdem gibt es Formulierungen im Fließtext, die genau der Bedeutung der Implikation und Äquivalenz entsprechen:



$$A \Rightarrow B$$

„wenn  $A$  gilt, dann gilt auch  $B$ “

„aus  $A$  folgt  $B$ “

„ $A$  impliziert  $B$ “

$$A \Leftrightarrow B$$

„ $A$  gilt genau dann, wenn  $B$  gilt“

„ $A$  und  $B$  sind äquivalent“

# Implikation & Äquivalenz II

Implikation und Äquivalenzen sind *transitiv*:

$$A \Rightarrow B, \ B \Rightarrow C, \ C \Rightarrow D$$


$$A \Rightarrow D$$

$$A \Leftrightarrow B, \ B \Leftrightarrow C, \ C \Leftrightarrow D$$

$$A \Leftrightarrow D$$

Gelten alle oberen Aussagen, folgt daraus jeweils Aussage unter der Klammer. Die Klammer ist aber *keine* offizielle Schreibweise für eine Implikation (die letztendlich hier vorliegt), sondern hier nur zur Illustration.

Eine solche Verkettung von Aussagen ist oft die wesentliche Struktur eines Beweises.

# Beweistechniken – Teil 1

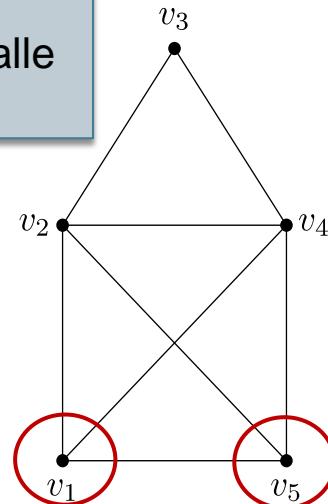
# Aus der Vorlesung

## Satz 2.4:

- (1) Ein Graph  $G = (V, E)$  kann nur dann einen Eulerweg besitzen, wenn es höchstens zwei Knoten mit ungeradem Grad gibt.
- (2) Ein Graph  $G = (V, E)$  kann nur dann eine Eulertour besitzen, wenn alle Knoten geraden Grad besitzen.

Beweis: Gibt es in der Vorlesung.

*Gibt es Graphen mit  
genau einem  
ungeraden Knoten?*



# „Handshake-Lemma“

**Satz 2.5:** Für jeden beliebigen einfachen Graphen ist die Zahl der Knoten mit ungeradem Grad gerade.

## Beweis:

Betrachte Summe der Knotengrade

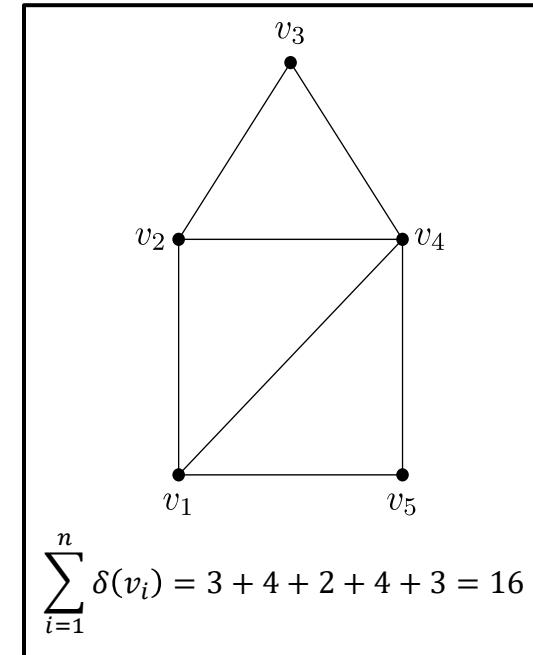
$$\sum_{i=1}^n \delta(v_i)$$

Jede Kante wird doppelt betrachtet, also

$$\sum_{i=1}^n \delta(v_i) = 2m$$

Das ist eine gerade Zahl!

Es kann also nur gerade viele Knoten ungeraden Grades geben.  
(Gäbe es ungerade viele ungerade Grade, wäre auch die Gradsumme ungerade)



# Fragepause

# Arten von Beweisen

- Direkter Beweis
- Kontraposition
  - *wir „drehen die Aussage um“ ...*
  - *... und beweisen diese dann direkt*
- Widerspruchsbeweis

# Direkter Beweis

# Beweise – Direkter Beweis

Aussagen oft in der Form  $A \Rightarrow B$ . Unterscheide zwischen  
**Voraussetzung** (A) und **Schlussfolgerung** (B)

Wird die Schlussfolgerung durch eine logische Folgerungskette aus den Voraussetzungen hergeleitet, so spricht man von einem **direkten Beweis**.

## Beispiel:

Wenn  $x, y \in \mathbb{R}$  und  $x, y \geq 0$ , dann gilt  $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$



# Beispiel

## Beispiel:

Wenn  $x, y \in \mathbb{R}$  und  $x, y \geq 0$ , dann gilt  $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$

## Beweis:

$x, y \in \mathbb{R}$  und  $x, y \geq 0$

$$??? \Rightarrow \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$$

# Beispiel

## Beispiel:

Wenn  $x, y \in \mathbb{R}$  und  $x, y \geq 0$ , dann gilt  $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$

## Beweis:

$x, y \in \mathbb{R}$  und  $x, y \geq 0$

$$\Rightarrow \frac{(x+y)^2}{4} \geq xy \Rightarrow \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$$

Monotonie der Wurzelfunktion  
Und:  $x, y \geq 0$

# Beispiel

## Beispiel:

Wenn  $x, y \in \mathbb{R}$  und  $x, y \geq 0$ , dann gilt  $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$

## Beweis:

$x, y \in \mathbb{R}$  und  $x, y \geq 0$

$$\Rightarrow (x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \quad |+4xy$$

$$\Rightarrow x^2 + 2xy + y^2 \geq 4xy$$

$$\Rightarrow \frac{(x + y)^2}{4} \geq xy \Rightarrow \frac{x + y}{2} \geq \sqrt{xy}$$

# Beweise – Direkter Beweis

~~Satz des Pythagoras:  $a^2 + b^2 = c^2$~~

Beweis: ... ... ...

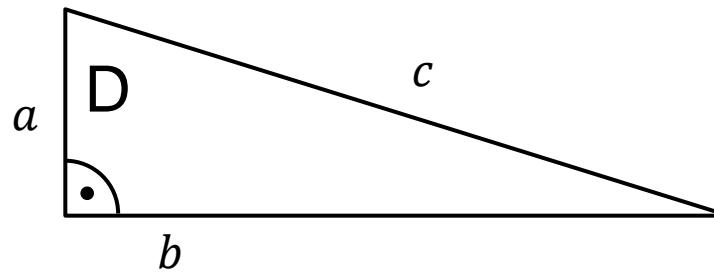
Wo fange ich an?

Geht es hier überhaupt um Dreiecke?



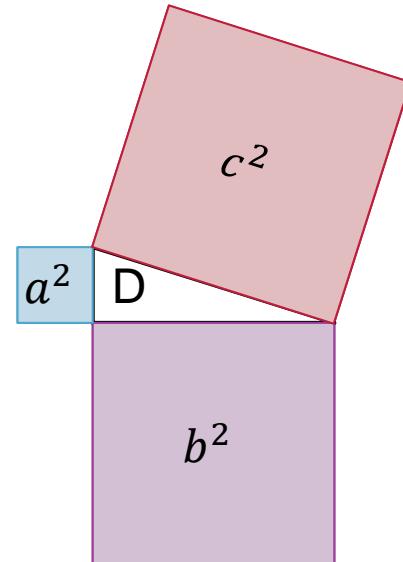
# Beweise – Direkter Beweis

**Satz des Pythagoras:** Für ein rechtwinkliges Dreieck  $D$  mit Kathetenlängen  $a$  und  $b$  und Hypotenusenlänge  $c$  gilt  $a^2 + b^2 = c^2$ .



# Beweise – Direkter Beweis

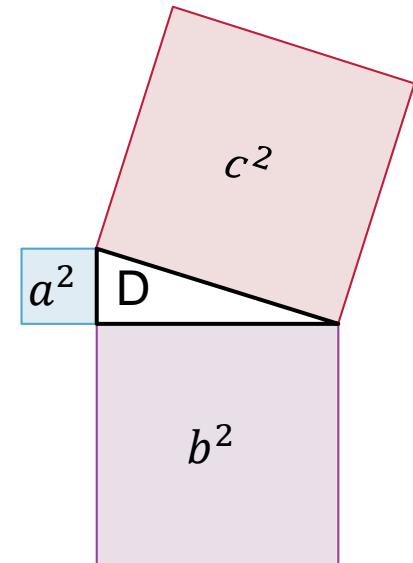
**Satz des Pythagoras:** Für ein rechtwinkliges Dreieck  $D$  mit Kathetenlängen  $a$  und  $b$  und Hypotenusenlänge  $c$  gilt  $a^2 + b^2 = c^2$ .



# Beweise – Direkter Beweis

**Satz des Pythagoras:** Für ein rechtwinkliges Dreieck  $D$  mit Kathetenlängen  $a$  und  $b$  und Hypotenusenlänge  $c$  gilt  $a^2 + b^2 = c^2$ .

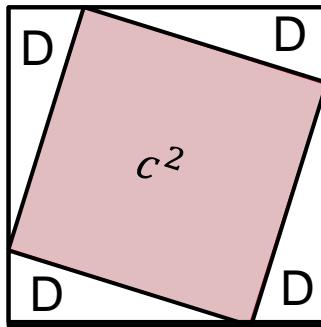
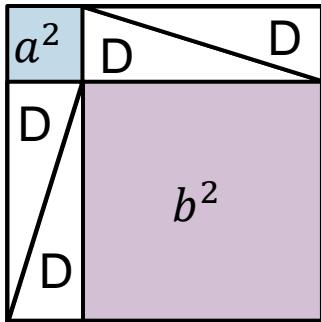
$$a^2 + b^2 = c^2$$



# Beweise – Direkter Beweis

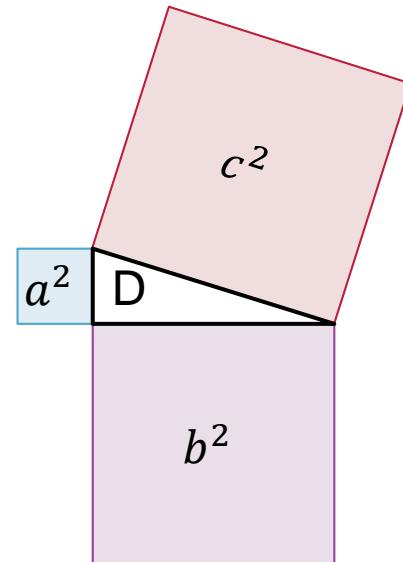
**Satz des Pythagoras:** Für ein rechtwinkliges Dreieck  $D$  mit Kathetenlängen  $a$  und  $b$  und Hypotenusenlänge  $c$  gilt  $a^2 + b^2 = c^2$ .

**Beweis:** Betrachte folgende Konstrukte:



Beides sind Quadrate mit Seitenlänge  $a + b$

$$\begin{aligned} \text{Also gilt } a^2 + b^2 + 4 \cdot \text{Area}(D) &= c^2 + 4 \cdot \text{Area}(D) \\ \Rightarrow a^2 + b^2 &= c^2 \end{aligned}$$



# Kontraposition

# Beweise – Kontraposition

Ein direkter Beweis kann schwierig sein, sodass sich die **Kontraposition** anbietet.

Es gilt

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$$

Wir können also annehmen, dass B nicht gilt und folgern daraus, dass auch A nicht gelten kann.

**Beispiel:** Sei  $n \in \mathbb{Z}$ . „Wenn  $n^2$  ungerade ist, ist  $n$  ungerade“ wird zu „Wenn  $n$  gerade ist, ist  $n^2$  gerade.“

**Beweis:**  $n$  gerade  $\Rightarrow$  es ex.  $k \in \mathbb{Z}$  mit  $2k = n$

$\Rightarrow n^2 = 4k^2 = 2 \cdot 2k^2$ , also eine gerade Zahl.

# Widerspruchsbeweis

# Beweise – Widerspruch

Mathematische Aussagen sind entweder wahr oder falsch. Um eine wahre Aussage zu beweisen, können wir zeigen, dass die Negation nicht gilt.

Diese Beweistechnik nennt man **Widerspruchsbeweis**.

## Widerspruchsbeweis für Aussage A:

- Wir nehmen an:  $\neg A$  gilt.
- Führe  $\neg A$  zu einem *Widerspruch* 
- Die Annahme  $\neg A$  muss falsch sein, denn sie ist widersprüchlich
- $\Rightarrow A$  muss wahr sein.

- Haben kein ganz genaues Ziel
- Nur: Wir wollen irgendwie zeigen, dass unter dieser Annahme was richtig böse kaputt ist

# Widerspruchsbeweis - Beispiel

**Beispiel:** Besitzt ein zusammenhängender Graph  $G$  eine **Brücke**  $e$ , so besitzt  $G$  Knoten mit ungeradem Grad.

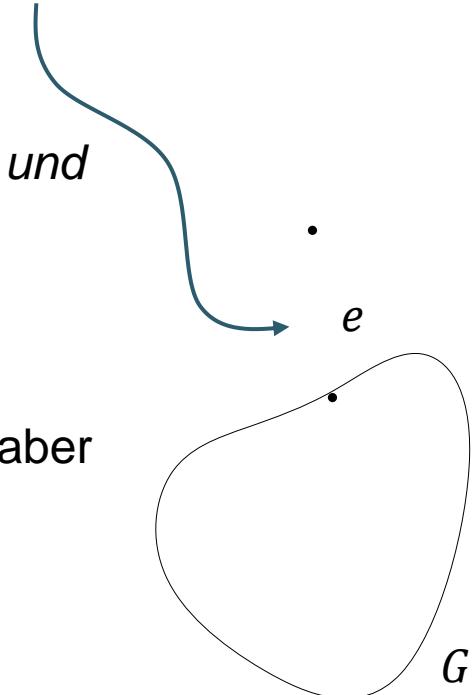
**Beweis:** *Wir nehmen an, diese Aussage gilt nicht.*

Also: Ein zusammenhängender Graph  $G$  besitzt eine Brücke *und* nur Knoten mit geradem Grad.

Dann existiert in  $G$  eine Eulertour.

Da  $e$  auf der Eulertour liegt und sein Entfernen  $G$  in zwei Komponenten teilt, können wir eine Komponente verlassen, aber nicht dorthin zurückkehren.

Wir können also keine Eulertour in  $G$  konstruieren.



# Widerspruchsbeweis - Beispiel

**Beispiel:** Besitzt ein zusammenhängender Graph  $G$  eine **Brücke**  $e$ , so besitzt  $G$  Knoten mit ungeradem Grad.

**Beweis:** *Wir nehmen an, diese Aussage gilt nicht.*

Also: Ein zusammenhängender Graph  $G$  besitzt eine Brücke  $e$  und nur Knoten mit geradem Grad.

Dann existiert in  $G$  eine Eulertour.



Da  $e$  auf der Eulertour liegt und sein Entfernen  $G$  in zwei Komponenten teilt, können wir eine Komponente verlassen, ohne nicht dorthin zurückkehren.

Wir können also keine Eulertour in  $G$  konstruieren.



Die Annahme ist widersprüchlich, also muss die ursprüngliche Aussage gelten.

# Äquivalenzen

# Beweise – Äquivalenzen

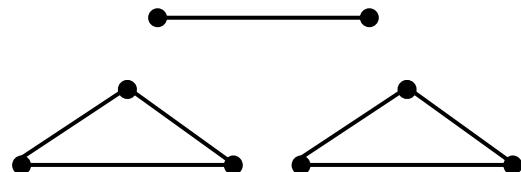
Aussagen der Form  $A \Leftrightarrow B$  können bewiesen werden, indem sowohl  $A \Rightarrow B$  **und**  $B \Rightarrow A$  gezeigt werden.

**Bsp:** Ein zusammenhängender Graph besitzt genau dann eine Eulertour, wenn jeder Knotengrad gerade ist.

Um eine solche Aussage zu *widerlegen*, reicht es  $A \Rightarrow B$  **oder**  $B \Rightarrow A$  zu widerlegen.

**Bsp:** Ein Graph ist genau dann zusammenhängend, wenn jeder Grad mindestens zwei ist.

**Beweis  $A \Leftrightarrow B$ :**  
Beweis  $A \Rightarrow B$   
...  
 $\neg A \Rightarrow \neg B$  \*  
Beweis  $\neg B \Rightarrow \neg A$   
...  
Aus beiden vorangegangenen Beweisen folgt  $A \Leftrightarrow B$ .



# Fragepause

# Mehr Beispiele

# Zusammenhang von Graphen

[https://en.wikipedia.org/wiki/Component\\_\(graph\\_theory\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Component_(graph_theory))

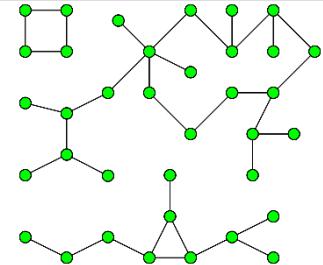
**Satz:** Wenn ein Graph  $G$  zusammenhängend ist, enthält er mindestens  $n - 1$  Kanten.

*Beweis:*

Fügt man eine Kante in einen Graphen ein, so kann sich die Anzahl an Komponenten nur um eins verringern.

Ein Graph ohne Kanten besitzt  $n$  Komponenten, ein zusammenhängender Graph nur eine Komponente.

Also müssen mindestens  $n - 1$  Kanten eingefügt werden, um Zusammenhang zu gewährleisten.



# Kreise in Graphen

[https://en.wikipedia.org/wiki/Component\\_\(graph\\_theory\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Component_(graph_theory))

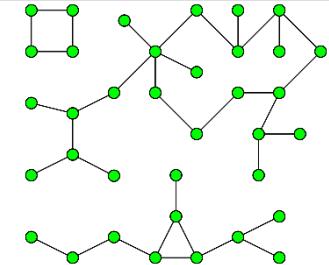
**Satz:** Wenn jeder Knoten eines Graphen  $G$  einen Grad von mindestens zwei besitzt, enthält  $G$  einen Kreis.

*Beweis:*

Betrachte einen längsten Pfad  $P := v_1, v_2, \dots, v_i$  in  $G$  und einen Knoten  $v_j$ , der adjazent zu  $v_1$  ist.

$v_j$  muss auf  $P$  liegen, andernfalls könnte  $P$  erweitert werden.

Dann ist  $K := v_1, v_2, \dots, v_j, v_1$  ein Kreis in  $G$ .



# Kreisfreie Graphen

**Satz:** Ist ein Graph  $G$  kreisfrei und zusammenhängend, dann enthält er exakt  $n - 1$  Kanten.

*Beweis:*

Um zusammenhängend zu sein, brauchen wir mind.  $n - 1$  Kanten.

Bleibt zu zeigen: Um kreisfrei zu sein, dürfen wir maximal  $n - 1$  Kanten besitzen.

Annahme: Wir besitzen mindestens  $n$  Kanten. Wir folgern, dass  $G$  dann auch einen Kreis besitzt.

Entferne zunächst nach und nach alle Knoten mit Grad 1 samt Kante. Da wir das höchstens  $n - k$  mal machen können (mit  $0 < k$ ), bleiben  $k$  Knoten und  $\geq k$  Kanten übrig.

Weiter bleibt ein Graph übrig, in dem jeder Knoten einen Grad von mindestens zwei besitzt. Er kann also nicht kreisfrei sein. Daraus folgt, dass auch  $G$  nie kreisfrei war.

# Beweistechniken – Teil 2 (Teaser)

# Beweise – Teil 2 (Teaser)



4GIFs.com

# Beweise – Teil 2 (Teaser)



# **Merkzettel:**

<https://www.ibr.cs.tu-bs.de/alg/Merkzettel/proof-booklet.pdf>