



Technische
Universität
Braunschweig



Algorithmen und Datenstrukturen

Übung 1

Ramin Kosfeld und Chek-Manh Loi

16.11.2023

Heute: Beweise



Mathematische Aussagen

Mathematische Aussagen sind entweder wahr oder falsch.

- 13 ist eine gerade Zahl.
- Die Summe der ersten n natürlichen Zahlen ist $n(n + 1)/2$.
- Die größte Primzahl ist $2^{82\,589\,933} - 1$
- Zusammenhängende, einfache Graphen mit $n \geq 2$ Knoten und $n - 1$ Kanten besitzen mindestens zwei Knoten vom Grad 1.
- Besitzt ein zusammenhängender Graph nur Knoten geraden Grades, besitzt er eine Eulertour.



Mathematische Aussagen

Mathematische Aussagen sind entweder wahr oder falsch.

- 13 ist eine gerade Zahl.
- Es gibt eine Zahl $k \in \mathbb{N}$, sodass $2k = 13$
- Die Summe der ersten n natürlichen Zahlen ist $n(n+1)/2$.
- Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$.
- Die größte Primzahl ist $2^{82\,589\,933} - 1$
- Für jede Primzahl p gilt: $p \leq 2^{82\,589\,933} - 1$
- Zusammenhängende, einfache Graphen mit $n \geq 2$ Knoten und $n - 1$ Kanten besitzen mindestens zwei Knoten vom Grad 1.
- Für alle zusammenhängende, einfache Graphen mit $n \geq 2$ Knoten und $n - 1$ Kanten gilt: es gibt mindestens zwei Knoten vom Grad 1.
- Besitzt ein zusammenhängender Graph nur Knoten geraden Grades, besitzt er eine Eulertour.
- Für jeden zusammenhängenden Graphen G , deren Knotengrade alle gerade sind, gilt: G besitzt eine Eulertour



Mathematische Aussagen

Mathematische Aussagen sind entweder wahr oder falsch.

- **Es gibt** eine Zahl $k \in \mathbb{N}$, sodass $2k = 13$
- **Für jedes** $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$.
- **Für jede** Primzahl p gilt: $p \leq 2^{82\,589\,933} - 1$
- **Für alle** zusammenhängende, einfache Graphen mit $n \geq 2$ Knoten und $n - 1$ Kanten gilt: es gibt mindestens zwei Knoten vom Grad 1.
- **Für jeden** zusammenhängenden Graphen G , deren Knotengrade alle gerade sind, gilt: G besitzt eine Eulertour



Welche Aussagen sind wahr?

Existenz- vs. Allaussagen

	Existenzaussage	Allaussage
Zeigen	<i>Beispiel</i> reicht als Beweis	Beweis
Widerlegen	Beweis	<i>Beispiel</i> reicht als Beweis

Negation einer Existenzaussage wird zu einer Allaussage.
Negation einer Allaussage wird zu einer Existenzaussage.

Logische Verknüpfungen

Negation
(„Nicht“, \neg)

Konjunktion
(„Und“, \wedge)

Disjunktion
(„Oder“, \vee)

Implikation
(„wenn...dann“, \Rightarrow)

Äquivalenz
(„genau dann wenn“, \Leftrightarrow)

Mathematische
Aussagen \longrightarrow

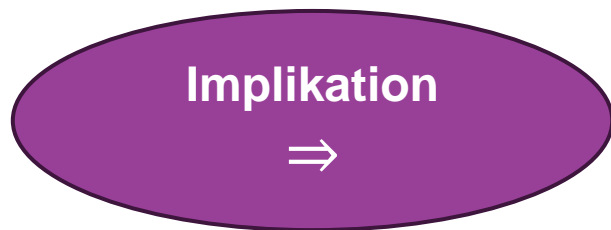
1: Aussage ist *wahr*
0: Aussage ist *falsch*

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Fragepause

Implikation & Äquivalenz I

In Beweisen (an der Tafel etc.) werden oft Implikations- und Äquivalenzpfeile einfach in den Fließtext eingebaut. Außerdem gibt es Formulierungen im Fließtext, die genau der Bedeutung der Implikation und Äquivalenz entsprechen:



$$A \Rightarrow B$$

„wenn A gilt, dann gilt auch B “

„aus A folgt B “

„ A impliziert B “



$$A \Leftrightarrow B$$

„ A gilt genau dann, wenn B gilt“

„ A und B sind äquivalent“

Implikation & Äquivalenz II

Implikation und Äquivalenzen sind *transitiv*:

$$\underbrace{A \Rightarrow B, B \Rightarrow C, C \Rightarrow D}_{A \Rightarrow D}$$

$$\underbrace{A \Leftrightarrow B, B \Leftrightarrow C, C \Leftrightarrow D}_{A \Leftrightarrow D}$$

Gelten alle oberen Aussagen, folgt daraus jeweils Aussage unter der Klammer. Die Klammer ist aber *keine* offizielle Schreibweise für eine Implikation (die letztendlich hier vorliegt), sondern hier nur zur Illustration.

Eine solche Verkettung von Aussagen ist oft die wesentliche Struktur eines Beweises.

Beweistechniken – Teil 1

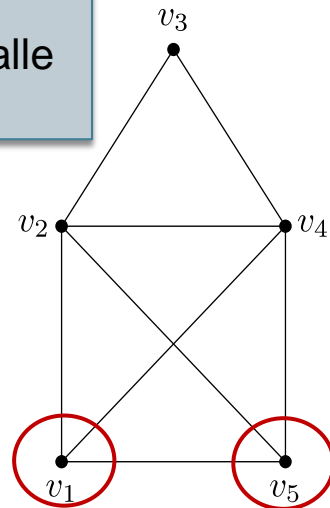
Aus der Vorlesung

Satz 2.4:

- (1) Ein Graph $G = (V, E)$ kann nur dann einen Eulerweg besitzen, wenn es höchstens zwei Knoten mit ungeradem Grad gibt.
- (2) Ein Graph $G = (V, E)$ kann nur dann eine Eulertour besitzen, wenn alle Knoten geraden Grad besitzen.

Beweis: Gibt es in der Vorlesung.

*Gibt es Graphen mit
genau einem
ungeraden Knoten?*



„Handshake-Lemma“

Satz 2.5: Für jeden beliebigen einfachen Graphen ist die Zahl der Knoten mit ungeradem Grad gerade.

Beweis:

Betrachte Summe der Knotengrade

$$\sum_{i=1}^n \delta(v_i)$$

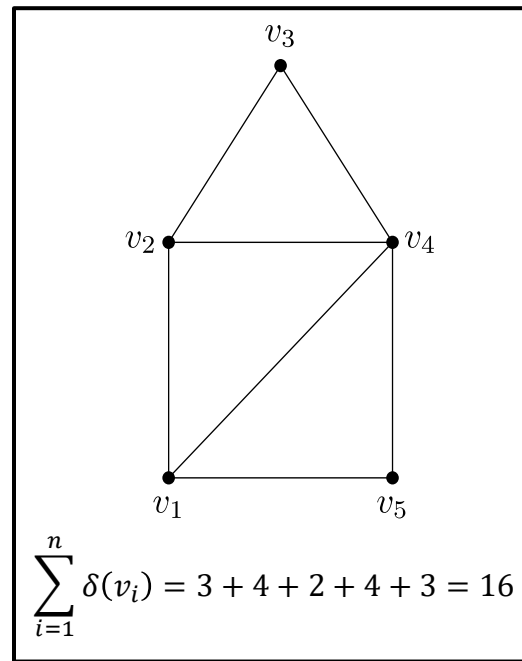
Jede Kante wird doppelt betrachtet, also

$$\sum_{i=1}^n \delta(v_i) = 2m$$

Das ist eine gerade Zahl!

Es kann also nur gerade viele Knoten ungeraden Grades geben.

(Gäbe es ungerade viele ungerade Grade, wäre auch die Gradsumme ungerade)



Fragepause

Arten von Beweisen

- Direkter Beweis
- Kontraposition
 - *wir „drehen die Aussage um“ ...*
 - *... und beweisen diese dann direkt*
- Widerspruchsbeweis

Direkter Beweis

Beweise – Direkter Beweis

Aussagen oft in der Form $A \Rightarrow B$. Unterscheide zwischen **Voraussetzung** (A) und **Schlussfolgerung** (B)

Wird die Schlussfolgerung durch eine logische Folgerungskette aus den Voraussetzungen hergeleitet, so spricht man von einem **direkten Beweis**.

Beispiel:

Wenn $x, y \in \mathbb{R}$ und $x, y \geq 0$, dann gilt $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$



Beispiel

Beispiel:

Wenn $x, y \in \mathbb{R}$ und $x, y \geq 0$, dann gilt $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$

Beweis:

$x, y \in \mathbb{R}$ und $x, y \geq 0$

$$??? \Rightarrow \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$$

Beispiel

Beispiel:

Wenn $x, y \in \mathbb{R}$ und $x, y \geq 0$, dann gilt $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$

Beweis:

$x, y \in \mathbb{R}$ und $x, y \geq 0$

$$\Rightarrow \frac{(x+y)^2}{4} \geq xy \Rightarrow \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$$

Monotonie der Wurzelfunktion
Und: $x, y \geq 0$

Beispiel

Beispiel:

Wenn $x, y \in \mathbb{R}$ und $x, y \geq 0$, dann gilt $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$

Beweis:

$x, y \in \mathbb{R}$ und $x, y \geq 0$

$$\Rightarrow (x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \quad | +4xy$$

$$\Rightarrow x^2 + 2xy + y^2 \geq 4xy$$

$$\Rightarrow \frac{(x + y)^2}{4} \geq xy \Rightarrow \frac{x + y}{2} \geq \sqrt{xy}$$

Beweise – Direkter Beweis

~~Satz des Pythagoras: $a^2 + b^2 = c^2$~~

Beweis:

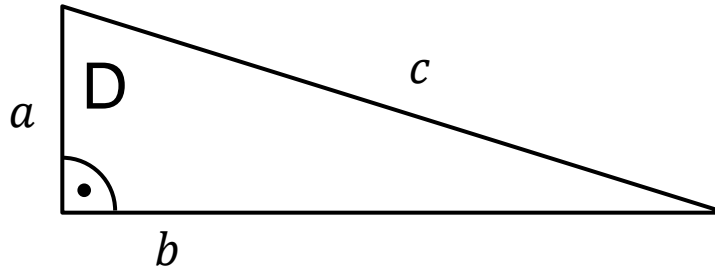
Wo fange ich an?

Geht es hier überhaupt um Dreiecke?



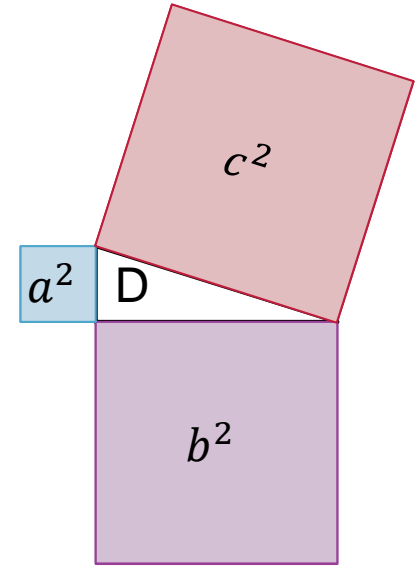
Beweise – Direkter Beweis

Satz des Pythagoras: Für ein rechtwinkliges Dreieck D mit Kathetenlängen a und b und Hypotenusenlänge c gilt $a^2 + b^2 = c^2$.



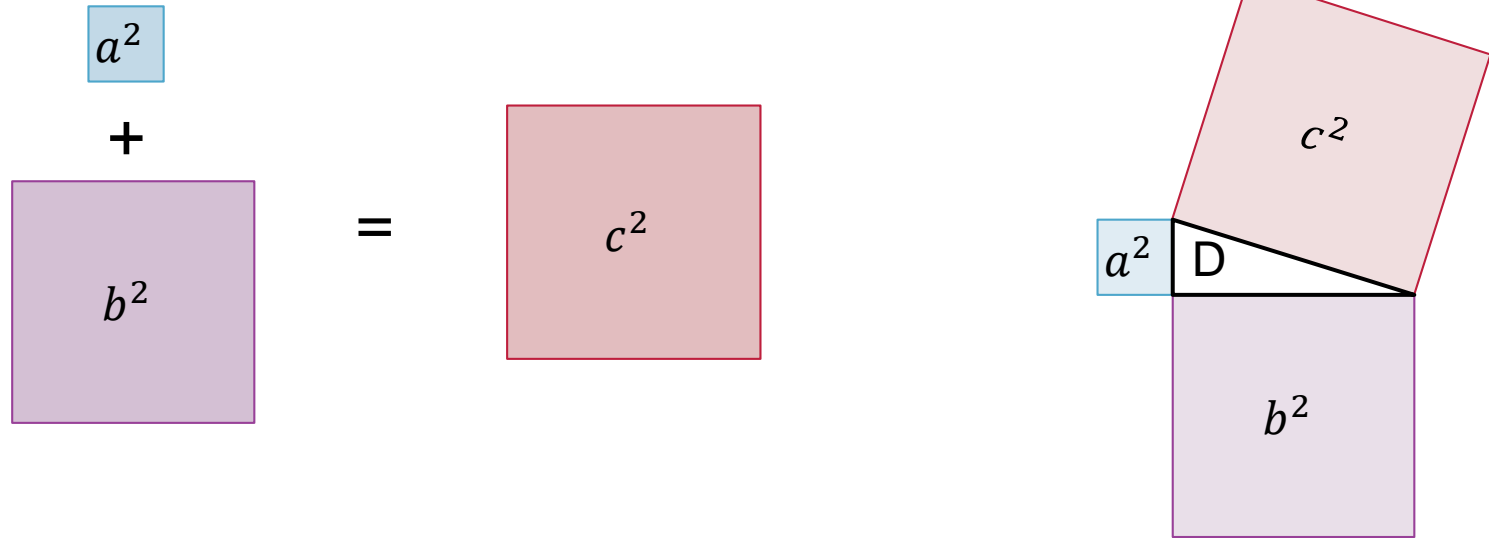
Beweise – Direkter Beweis

Satz des Pythagoras: Für ein rechtwinkliges Dreieck D mit Kathetenlängen a und b und Hypotenusenlänge c gilt $a^2 + b^2 = c^2$.



Beweis – Direkter Beweis

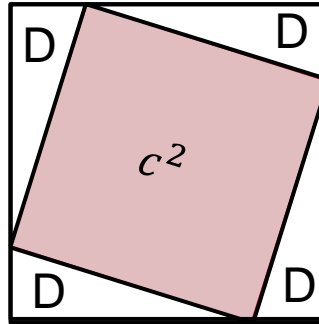
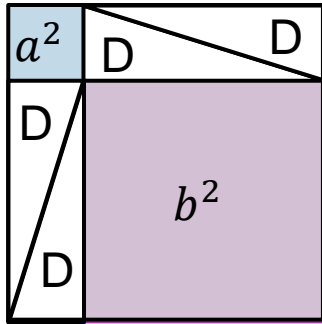
Satz des Pythagoras: Für ein rechtwinkliges Dreieck D mit Kathetenlängen a und b und Hypotenusenlänge c gilt $a^2 + b^2 = c^2$.



Beweis – Direkter Beweis

Satz des Pythagoras: Für ein rechtwinkliges Dreieck D mit Kathetenlängen a und b und Hypotenusenlänge c gilt $a^2 + b^2 = c^2$.

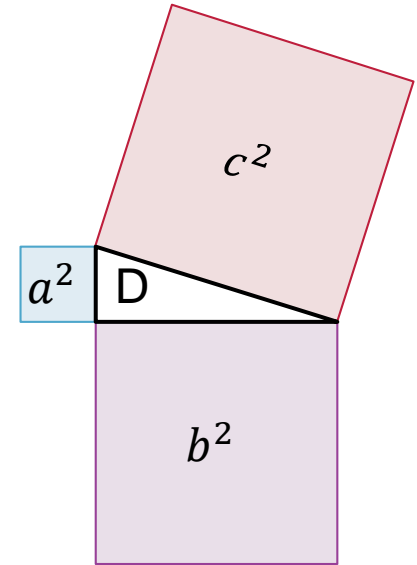
Beweis: Betrachte folgende Konstrukte:



Beides sind Quadrate mit Seitenlänge $a + b$

Also gilt $a^2 + b^2 + 4 \cdot \text{Area}(D) = c^2 + 4 \cdot \text{Area}(D)$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = c^2$$



Kontraposition

Beweise – Kontraposition

Ein direkter Beweis kann schwierig sein, sodass sich die **Kontraposition** anbietet.

Es gilt

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$$

Wir können also annehmen, dass B nicht gilt und folgern daraus, dass auch A nicht gelten kann.

Beispiel: Sei $n \in \mathbb{Z}$. „Wenn n^2 ungerade ist, ist n ungerade“ wird zu „Wenn n gerade ist, ist n^2 gerade.“

Beweis: n gerade \Rightarrow es ex. $k \in \mathbb{Z}$ mit $2k = n$
 $\Rightarrow n^2 = 4k^2 = 2 \cdot 2k^2$, also eine gerade Zahl.

Widerspruchsbeweis

Beweise – Widerspruch

Mathematische Aussagen sind entweder wahr oder falsch. Um eine wahre Aussage zu beweisen, können wir zeigen, dass die Negation nicht gilt.

Diese Beweistechnik nennt man **Widerspruchsbeweis**.

Widerspruchsbeweis für Aussage A:

- Wir nehmen an: $\neg A$ gilt.
- Führe $\neg A$ zu einem *Widerspruch* ⚡
- Die Annahme $\neg A$ muss falsch sein, denn sie ist widersprüchlich
- $\Rightarrow A$ muss wahr sein.

- Haben kein ganz genaues Ziel
- Nur: Wir wollen irgendwie zeigen, dass unter dieser Annahme was richtig böse kaputt ist

Widerspruchsbeweis - Beispiel

Beispiel: Besitzt ein zusammenhängender Graph G eine **Brücke** e , so besitzt G Knoten mit ungeradem Grad.

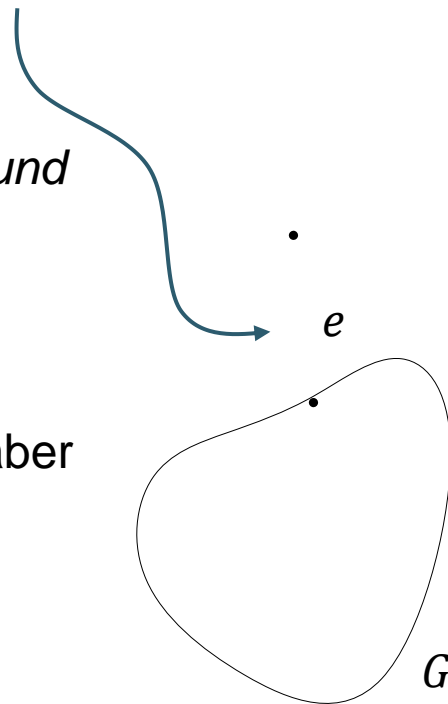
Beweis: *Wir nehmen an, diese Aussage gilt nicht.*

Also: Ein zusammenhängender Graph G besitzt eine Brücke *und* nur Knoten mit geradem Grad.

Dann existiert in G eine Eulertour.

Da e auf der Eulertour liegt und sein Entfernen G in zwei Komponenten teilt, können wir eine Komponente verlassen, aber nicht dorthin zurückkehren.

Wir können also keine Eulertour in G konstruieren.



Widerspruchsbeweis - Beispiel

Beispiel: Besitzt ein zusammenhängender Graph G eine **Brücke** e , so besitzt G Knoten mit ungeradem Grad.

Beweis: *Wir nehmen an, diese Aussage gilt nicht.*

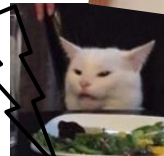
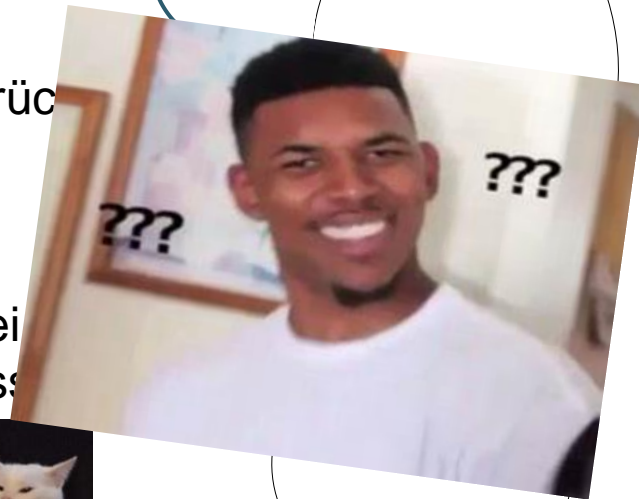
Also: Ein zusammenhängender Graph G besitzt eine Brücke, aber nur Knoten mit geradem Grad.

Dann existiert in G eine Eulertour.

Da e auf der Eulertour liegt und sein Entfernen G in zwei Komponenten teilt, können wir eine Komponente verlassen, aber nicht dorthin zurückkehren.

Wir können also keine Eulertour in G konstruieren.

Die Annahme ist widersprüchlich, also muss die ursprüngliche Aussage gelten.



Äquivalenzen

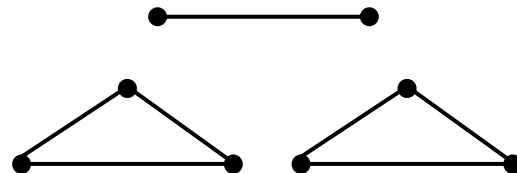
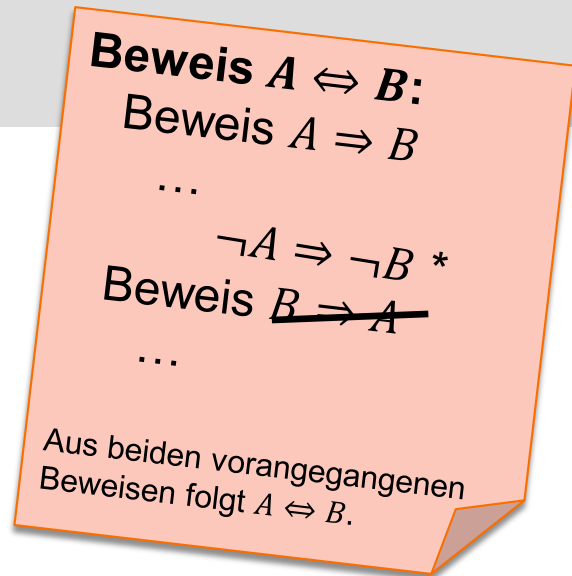
Beweise – Äquivalenzen

Aussagen der Form $A \Leftrightarrow B$ können bewiesen werden, indem sowohl $A \Rightarrow B$ **und** $B \Rightarrow A$ gezeigt werden.

Bsp: Ein zusammenhängender Graph besitzt genau dann eine Eulertour, wenn jeder Knotengrad gerade ist.

Um eine solche Aussage zu *widerlegen*, reicht es $A \Rightarrow B$ **oder** $B \Rightarrow A$ zu widerlegen.

Bsp: Ein Graph ist genau dann zusammenhängend, wenn jeder Grad mindestens zwei ist.



* auf einen oder auch beide Beweise kann man dann noch die Kontraposition anwenden, wie hier beispielhaft gezeigt

Fragepause

Mehr Beispiele

Zusammenhang von Graphen

[https://en.wikipedia.org/wiki/Component_\(graph_theory\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Component_(graph_theory))

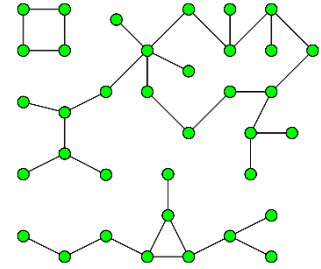
Satz: Wenn ein Graph G zusammenhängend ist, enthält er mindestens $n - 1$ Kanten.

Beweis:

Fügt man eine Kante in einen Graphen ein, so kann sich die Anzahl an Komponenten nur um eins verringern.

Ein Graph ohne Kanten besitzt n Komponenten, ein zusammenhängender Graph nur eine Komponente.

Also müssen mindestens $n - 1$ Kanten eingefügt werden, um Zusammenhang zu gewährleisten.



Kreise in Graphen

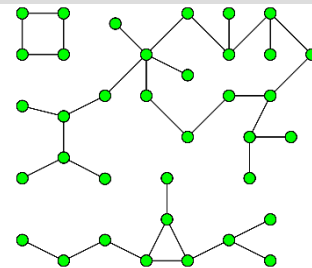
[https://en.wikipedia.org/wiki/Component_\(graph_theory\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Component_(graph_theory))

Satz: Wenn jeder Knoten eines Graphen G einen Grad von mindestens zwei besitzt, enthält G einen Kreis.

Beweis:

Betrachte einen längsten Pfad $P := v_1, v_2, \dots, v_i$ in G und einen Knoten v_j , der adjazent zu v_1 ist.

v_j muss auf P liegen, andernfalls könnte P erweitert werden. Dann ist $K := v_1, v_2, \dots, v_j, v_1$ ein Kreis in G .



Kreisfreie Graphen

Satz: Ist ein Graph G kreisfrei und zusammenhängend, dann enthält er exakt $n - 1$ Kanten.

Beweis:

Um zusammenhängend zu sein, brauchen wir mind. $n - 1$ Kanten.

Bleibt zu zeigen: Um kreisfrei zu sein, dürfen wir maximal $n - 1$ Kanten besitzen.

Annahme: Wir besitzen mindestens n Kanten. Wir folgern, dass G dann auch einen Kreis besitzt.

Entferne zunächst nach und nach alle Knoten mit Grad 1 samt Kante. Da wir das höchstens $n - k$ mal machen können (mit $0 < k$), bleiben k Knoten und $\geq k$ Kanten übrig.

Weiter bleibt ein Graph übrig, in dem jeder Knoten einen Grad von mindestens zwei besitzt. Er kann also nicht kreisfrei sein. Daraus folgt, dass auch G nie kreisfrei war.

Beweistechniken – Teil 2 (Teaser)

Beweise – Teil 2 (Teaser)



Beweise – Teil 2 (Teaser)



Merkzettel:

<https://www.ibr.cs.tu-bs.de/alg/Merkzettel/proof-booklet.pdf>