3.2 Problemdefinitionen:

PROBLEM 3.1 (s-t-Weg)

Gegeben: Graph $G=(V,E)$, Startknoten s, Zielknoten t

Gesucht: Weg von s nach t, falls einer existiert

Allgemeiner:

PROBLEM 3.2 (Zusammenhangskomponente)

Gegeben: Graph $G=(V,E)$, Startknoten s

Gesucht: Menge aller von s erreichbaren Knoten (→ „Zusammenhangskomponente" von s)

Wege, die die Erreichbarkeit sichern

Beobachtung:

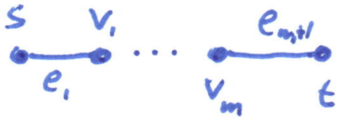
SATZ 3.3

Wenn ein Weg zwischen zwei Knoten s und t in einem Graphen existiert, dann existiert auch ein Pfad.

Beweis:

Sei: $W = s, e_1, v_1, \dots, v_m, e_{m+1}, t$ ein Weg von s nach t.

Idee:



Eliminiere Kreise auf dem Weg!

Technische Umsetzung:

Betrachte unter allen Wegen einen W^* mit möglichst wenigen Kanten. Angenommen, W^* hat einen doppelt besuchten Knoten, sagen wir v_i:

$$W^* = s, e_1, v_1, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{erster} \\ \text{Besuch}}}{v_i}, e_{i+1}, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{letzter} \\ \text{Besuch}}}{v_i}, e_k, \dots, t$$

Dann gäbe es einen noch kürzeren Weg:

$$W^{**} = s, e_1, v_1, \ldots, v_i, e_k, \ldots, t$$

nur einmal besucht!

Das widerspricht der Annahme, dass W^* kürzestmöglich ist.
Also hat W^* keinen doppelt besuchten Knoten, ist also ein Pfad! □

Daraus ergibt sich bereits eine Konsequenz:

KOROLLAR 3.4 („logische Zugabe")

Für Problem 3.2 gibt es als Erreichbarkeit sichernde Menge von Kanten immer eine Menge, die keinen ~~Kantis~~ enthält.

Und aus dem Beweis ergibt sich sogar eine Verschärfung:

KOROLLAR 3.5

Für Problem 3.2 gibt es immer eine kreisfreie Menge von Kanten, die die kürzestmögliche Erreichbarkeit sichert.

Das motiviert

DEFINITION 3.6 (Wald, Baum)

(1) Ein Wald ist ein kreisfreier Graph.

(2) Ein Baum ist eine Zusammenhangskomponente in einem Wald.
(Also: ein kreisfreier, zusammenhängender Graph)

(3) Ein aufspannender Baum ist ein Baum, der alle Knoten verbindet. (Manchmal auch: Spannbaum. Englisch: "spanning tree")