



*Kapitel 5.4:*  
*Nichtlineare Rekursionen*  
*Algorithmen und Datenstrukturen*  
*WS 2023/24*

**Prof. Dr. Sándor Fekete**

# 5.3.3 Master-Theorem: Lineare Rekursionen

Satz 5.9 (Master-Theorem)

Sei  $T: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$T(n) = \sum_{i=1}^m T(\alpha_i \cdot n) + \Theta(n^k),$$

wobei  $\alpha_i \in \mathbb{R} : 0 < \alpha_i < 1$ ,  $m \in \mathbb{N}$ ,  $k \in \mathbb{R}$ .

Dann gilt

$$T(n) \in \begin{cases} \Theta(n^k) & \text{für } \sum_{i=1}^m \alpha_i^k < 1 \\ \Theta(n^k \log n) & \text{für } \sum_{i=1}^m \alpha_i^k = 1 \\ \Theta(n^c) & \text{mit } \sum_{i=1}^m \alpha_i^c = 1 \text{ für } \sum_{i=1}^m \alpha_i^k > 1 \end{cases}$$

# 5.4 Nichtlineare Rekursionen

## 5.4.1 Logistische Rekursion

**Wachstum proportional zu einer Größe:**

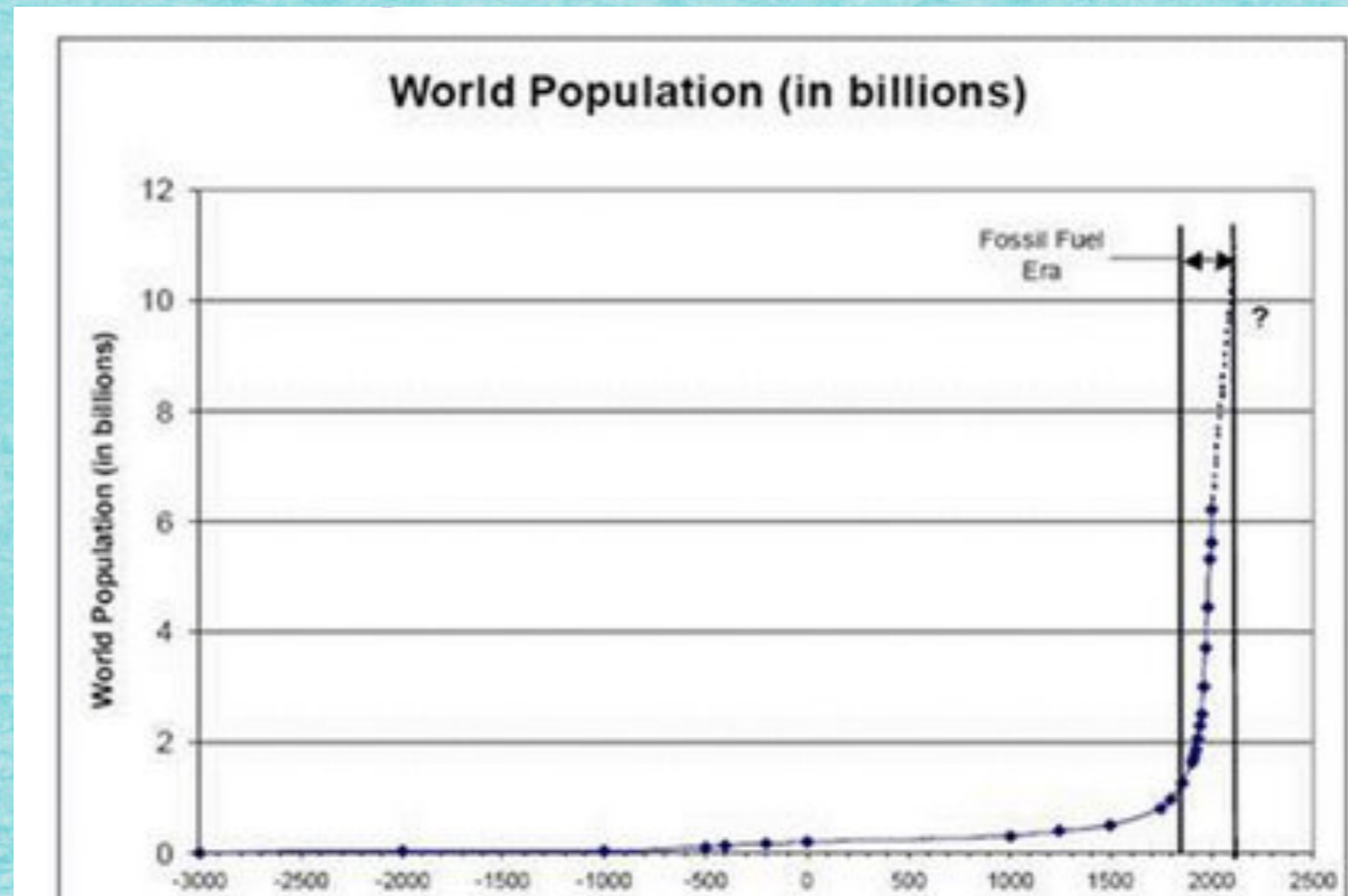
$$x_{n+1} = (1 + q)x_n$$

**Ergebnis:**

$$x_n = (1 + q)^n x_0$$

## 5.4.1 Logistische Rekursion

**Exponentielles Wachstum:**



**Das geht nicht beliebig lange weiter!**

## 5.4.1 Logistische Rekursion



Pierre-François Verhulst  
(1804-1849)

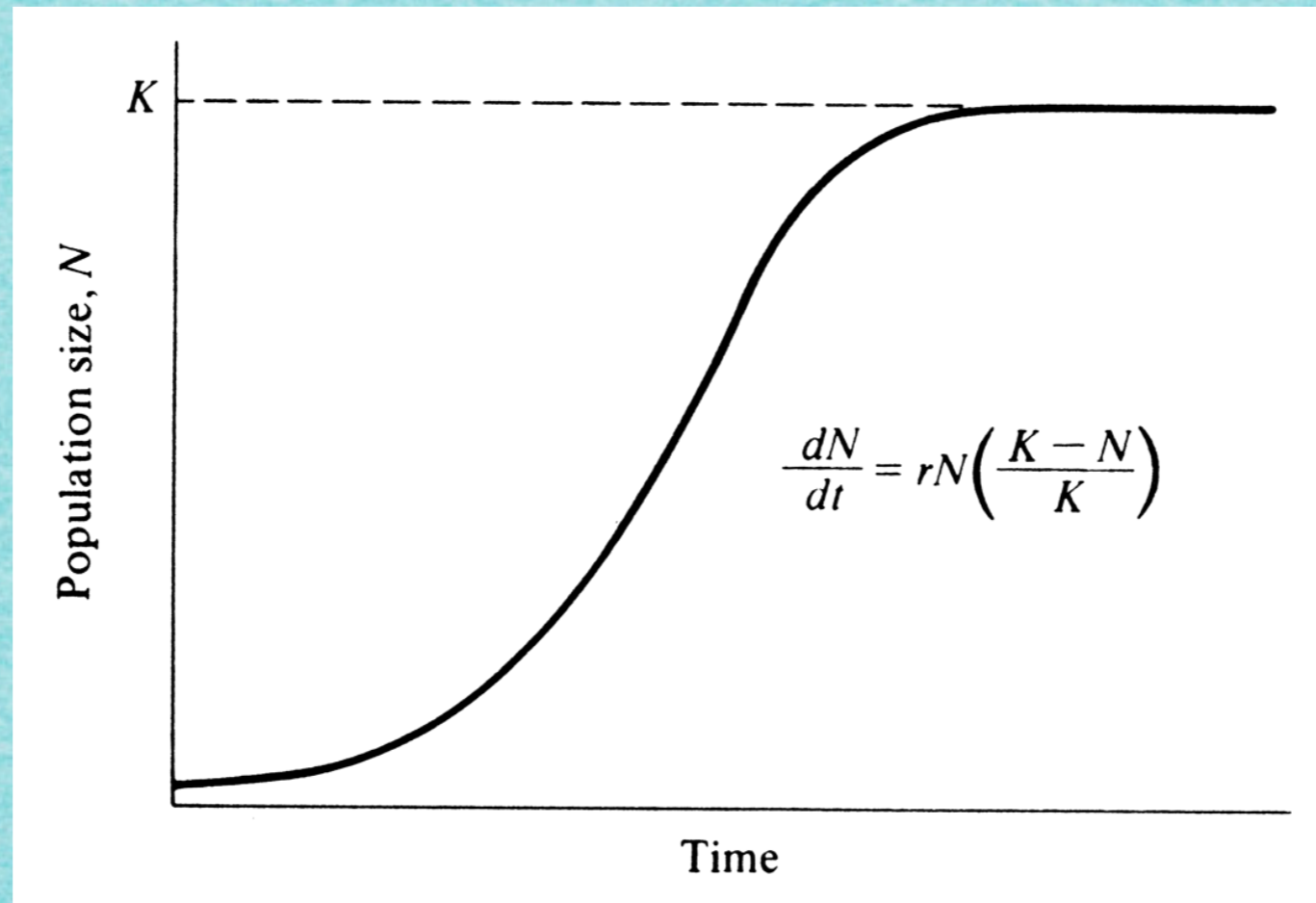
*Notice sur la loi que la population  
poursuit dans son accroissement.*

In: *Corresp. Math. Phys.* 10, 1838, S. 113–121

*“Notiz über das Gesetz,  
das die Bevölkerung bei ihrem  
Wachstum befolgt.”*

## 5.4.1 Logistische Rekursion

**Verhulst ursprünglich: Stetiger Prozess!**



**In Populationsdynamik beobachtet:  
Diskreter Prozess!**

## 5.4.1 Logistische Rekursion

**Zuwachs durch Fruchtbarkeit:**

$$x_{n+1} = q_f x_n$$

**Schwund durch Verhungern (etc.):**

$$x_{n+1} = q_f (G - x_n)$$

**Zusammen:**

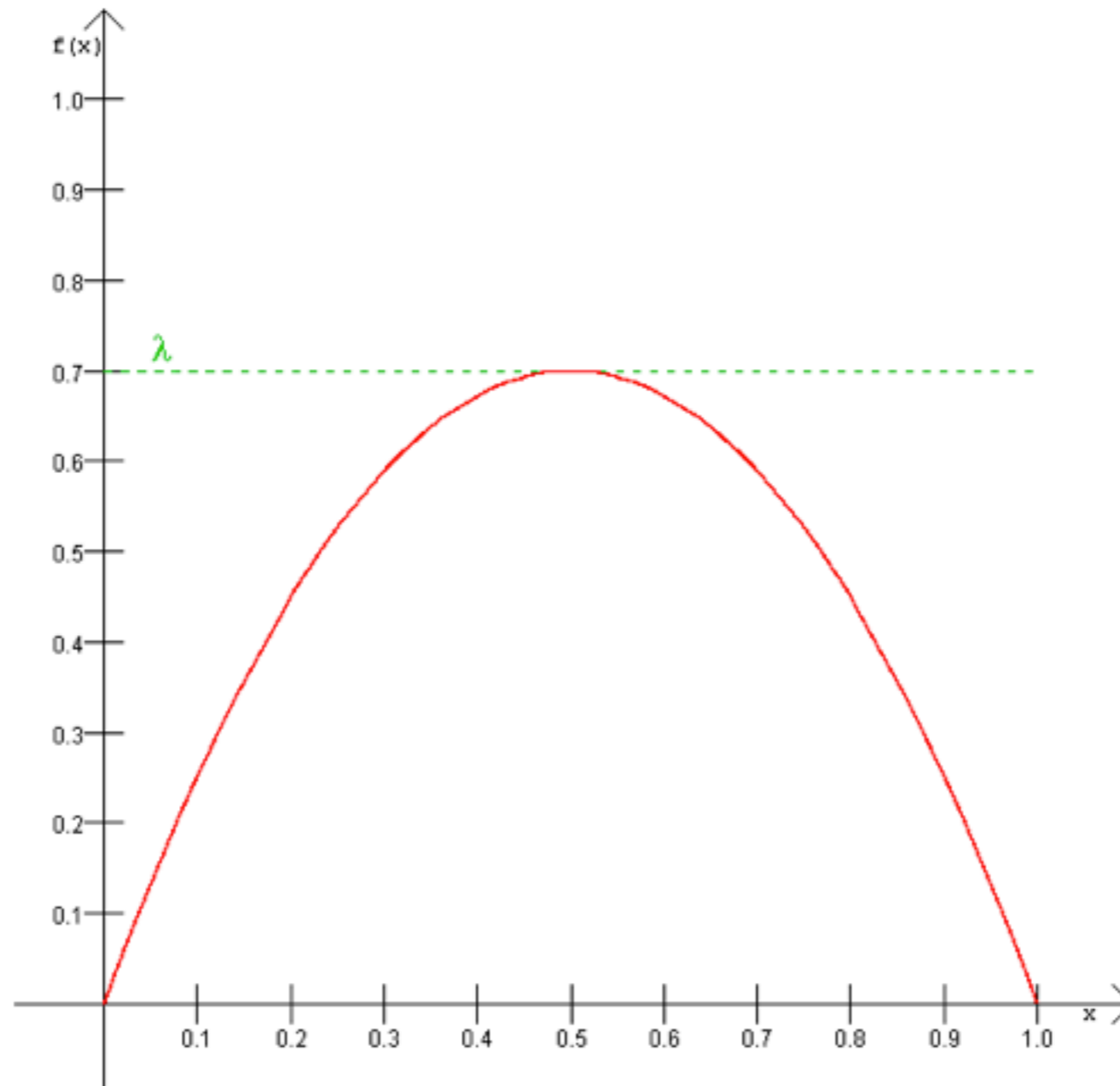
$$x_{n+1} = q_f q_v x_n (G - x_n)$$

**Normiert:**

$$x_{n+1} = r x_n (1 - x_n)$$

## 5.4.1 Logistische Rekursion

**Bildlich:**

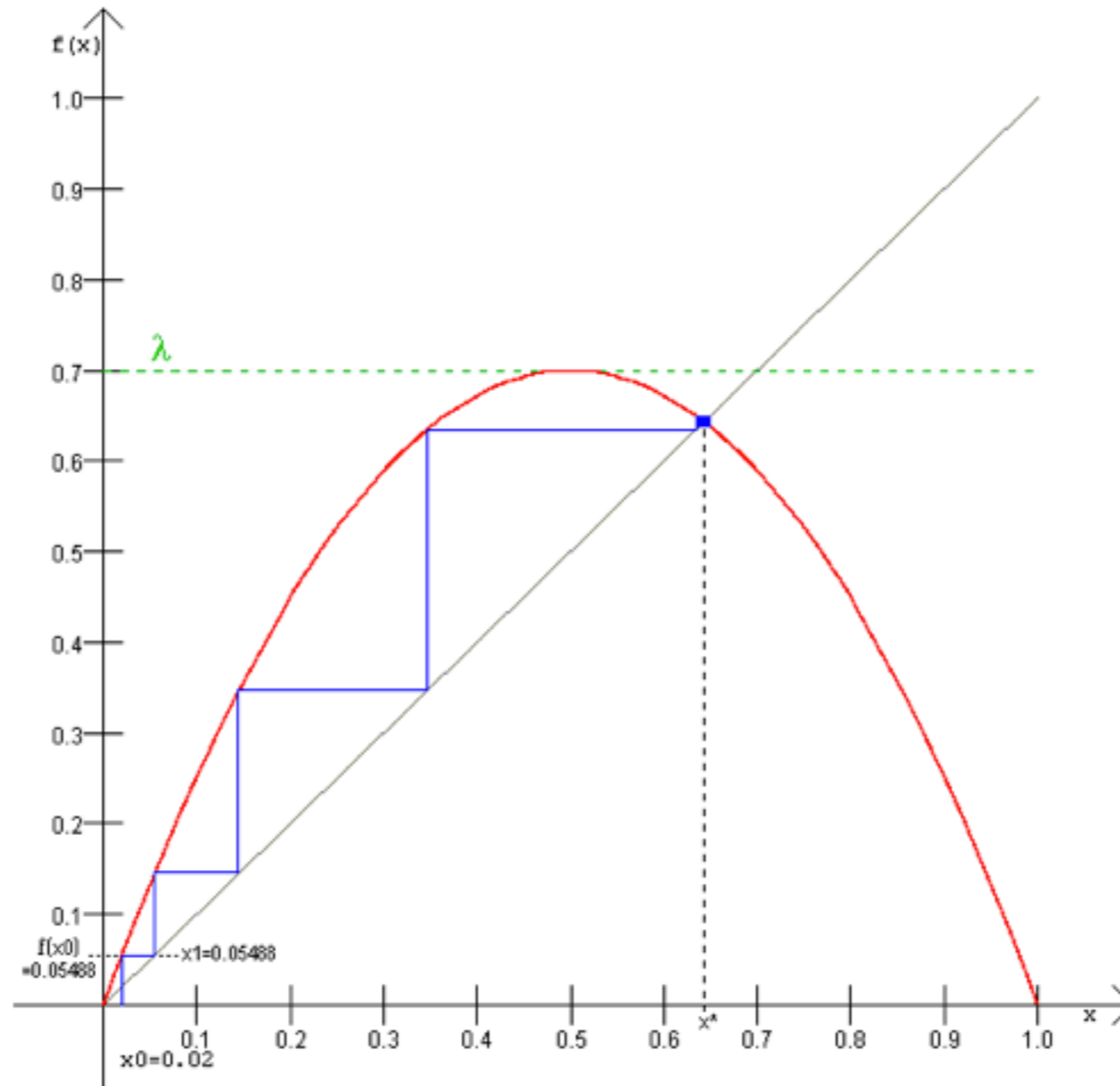




## 5.4.1 Logistische Rekursion

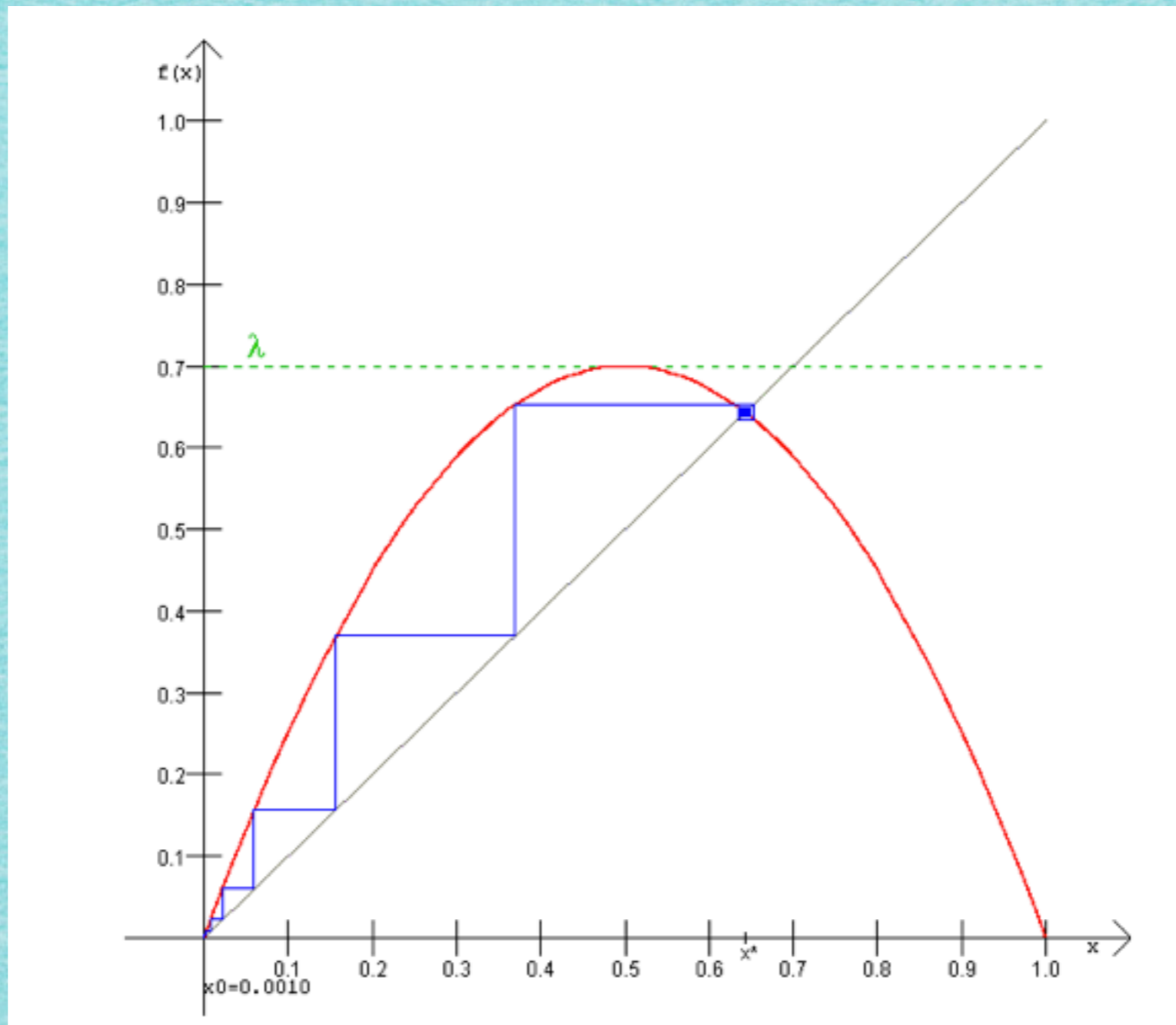
### Rekursion:

$x_n$	$f(x_n) = x_{n+1}$
1	0.05488
2	0.14523092
3	0.34758892
4	0.63495841
5	0.64900143
6	0.63783600
7	0.64680346
8	0.63965648
9	0.64538899
10	0.64081372
11	0.64448019
12	0.64155133
13	0.64389702
14	0.64202221
15	0.64352313
16	0.64232311
17	0.64328357
18	0.64251549
19	0.64313014
20	0.64263854



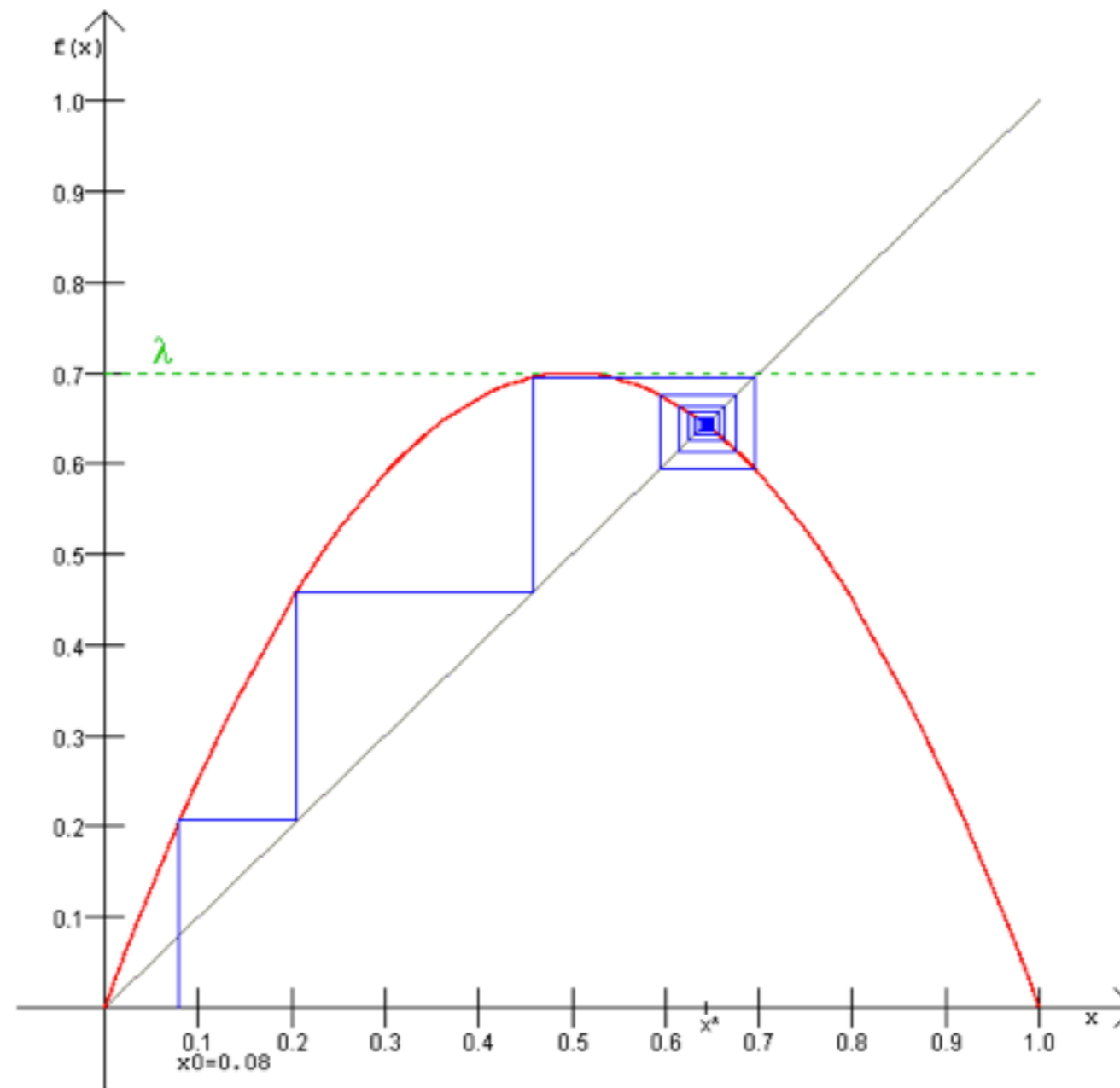
## 5.4.1 Logistische Rekursion

Rekursion strebt gegen Fixpunkt:



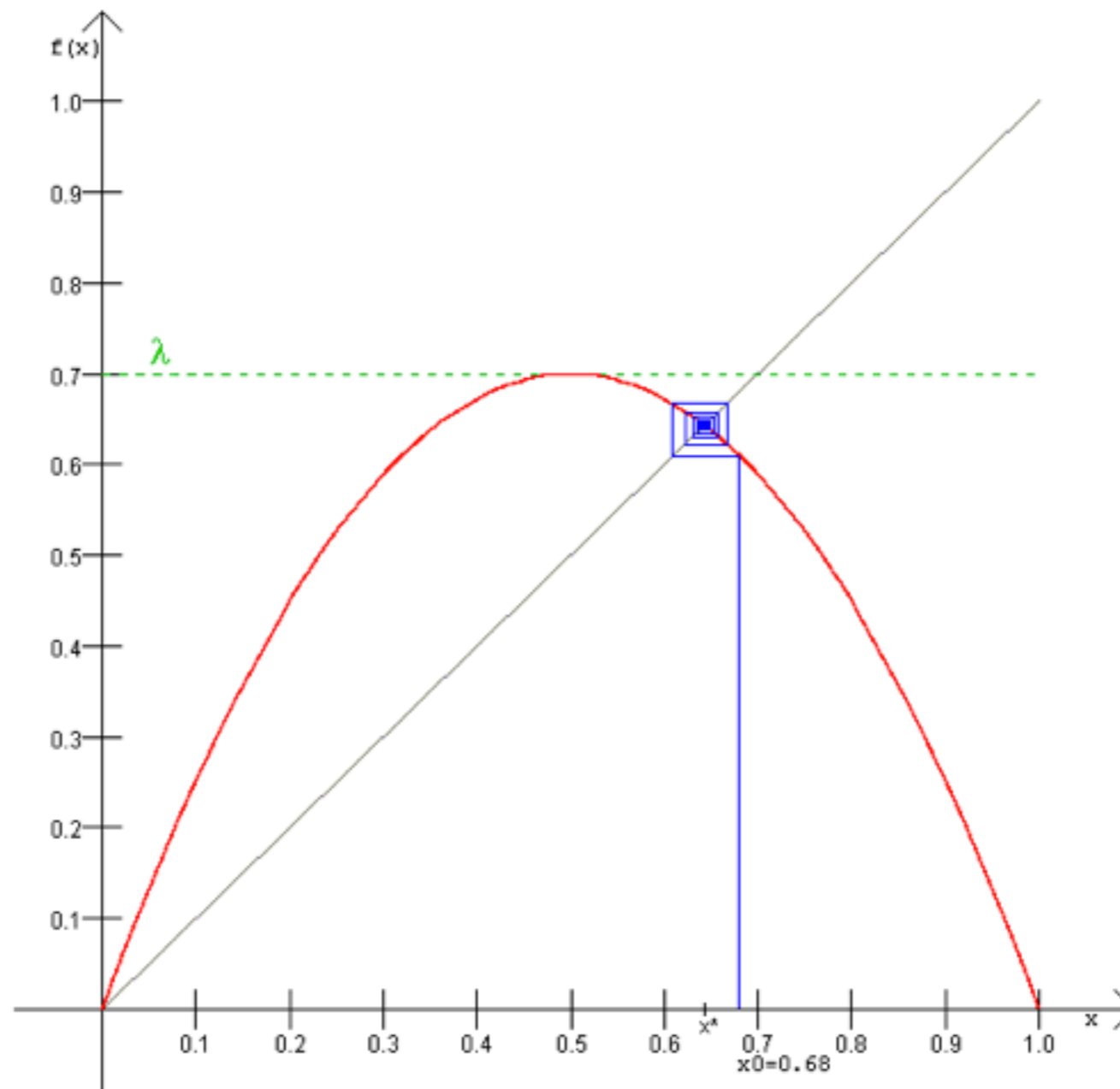
## 5.4.1 Logistische Rekursion

Rekursion strebt gegen Fixpunkt:



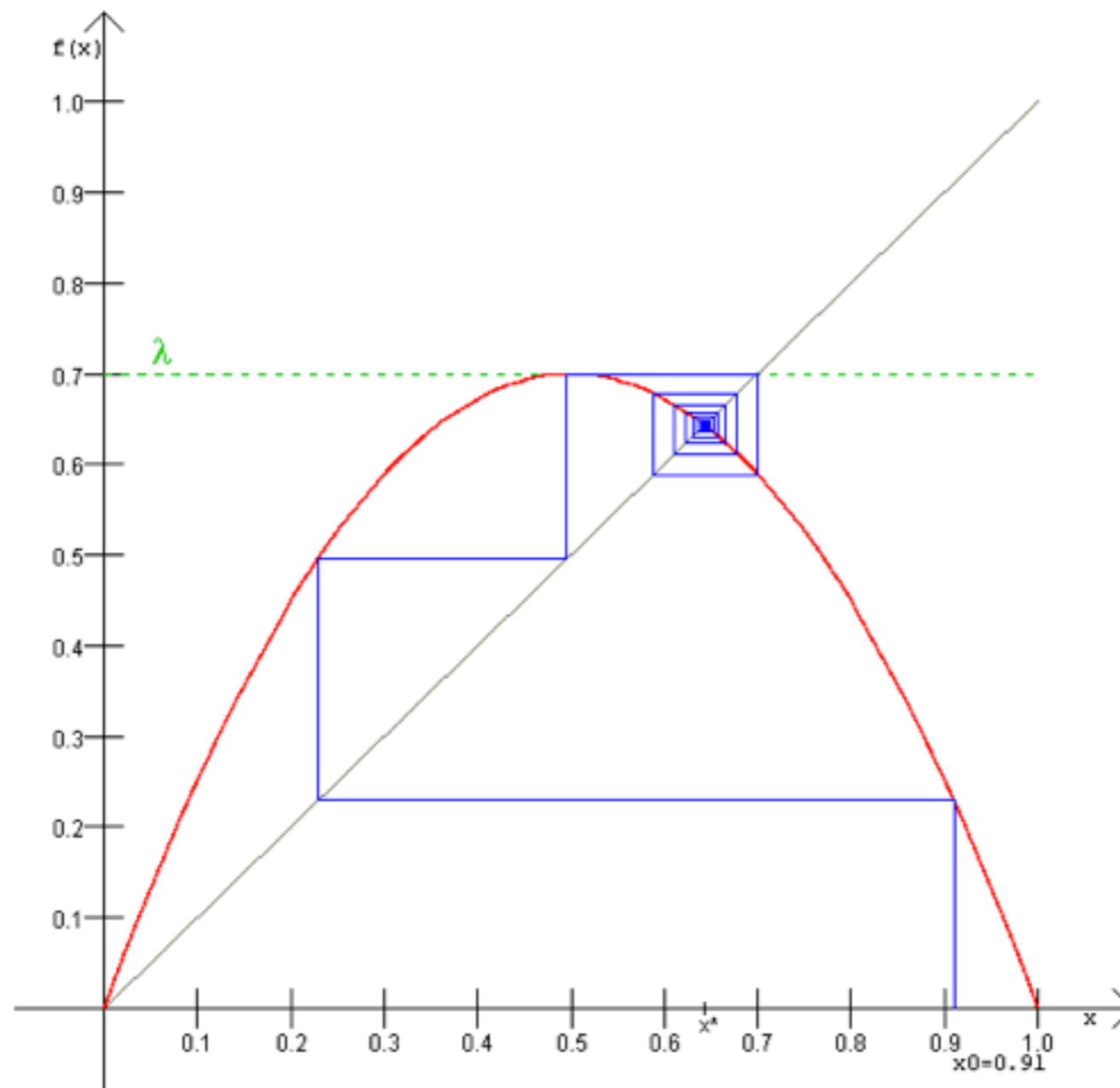
## 5.4.1 Logistische Rekursion

Rekursion strebt gegen Fixpunkt:



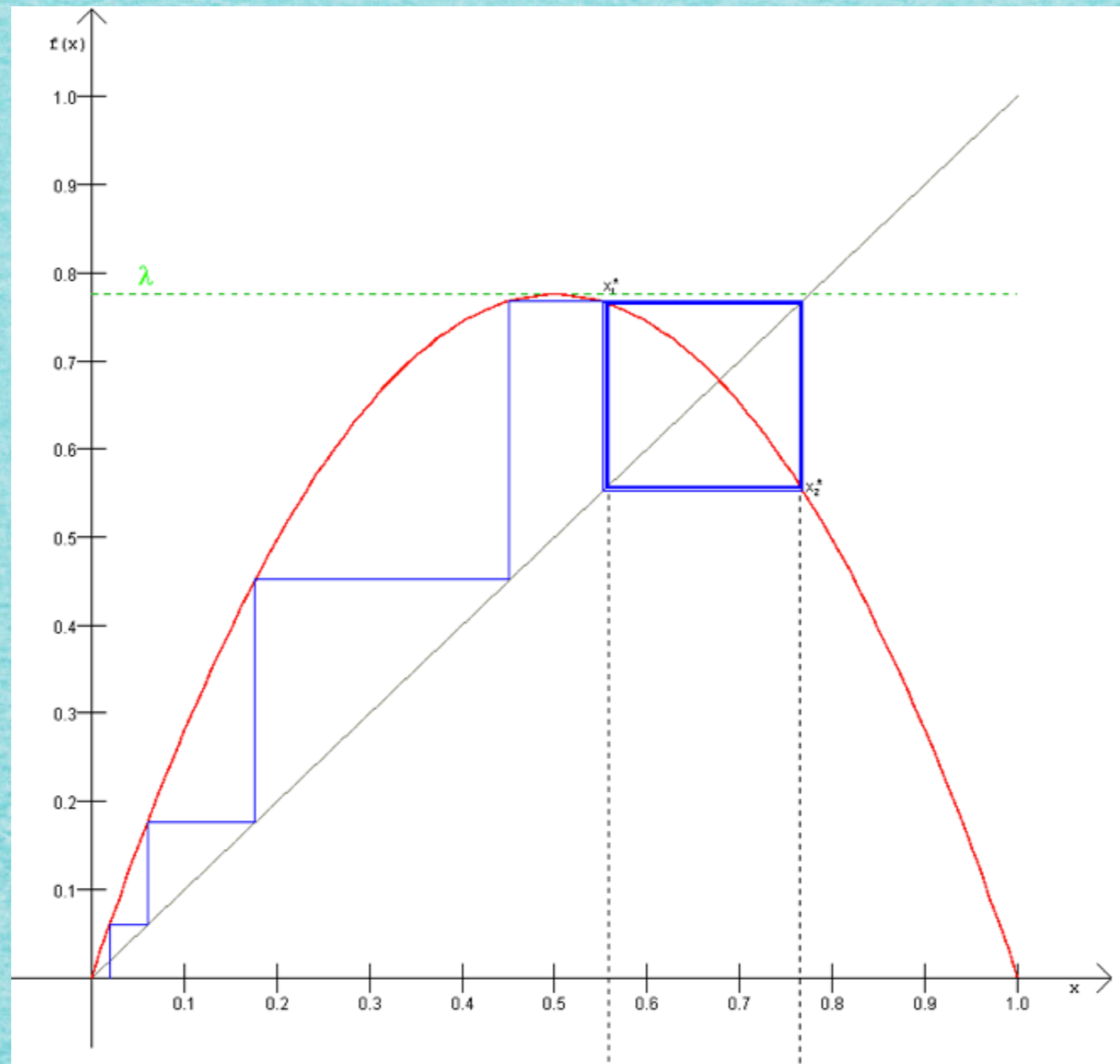
## 5.4.1 Logistische Rekursion

Rekursion strebt gegen Fixpunkt:



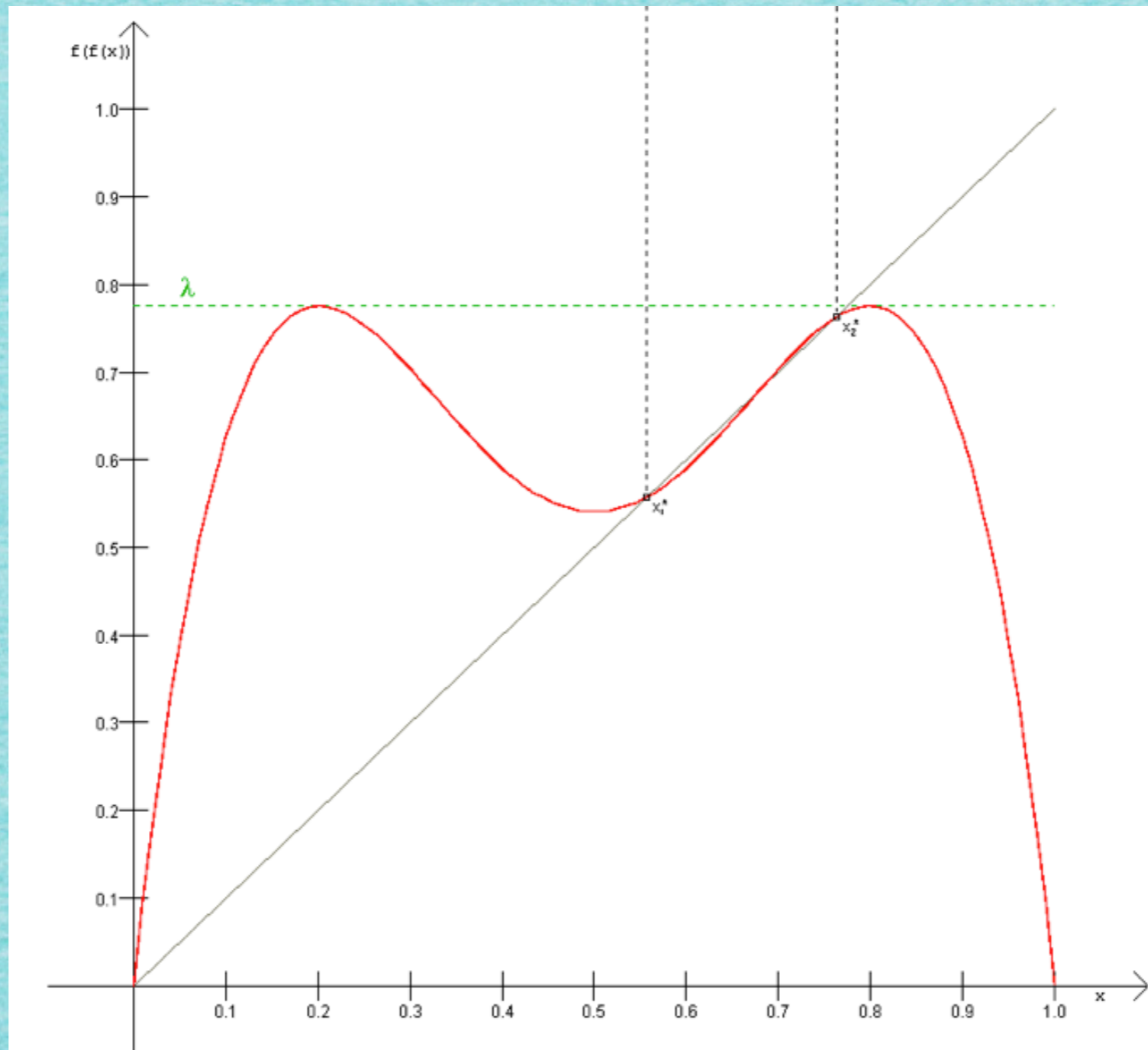
# 5.4.1 Logistische Rekursion

Zwei Fixpunkte!



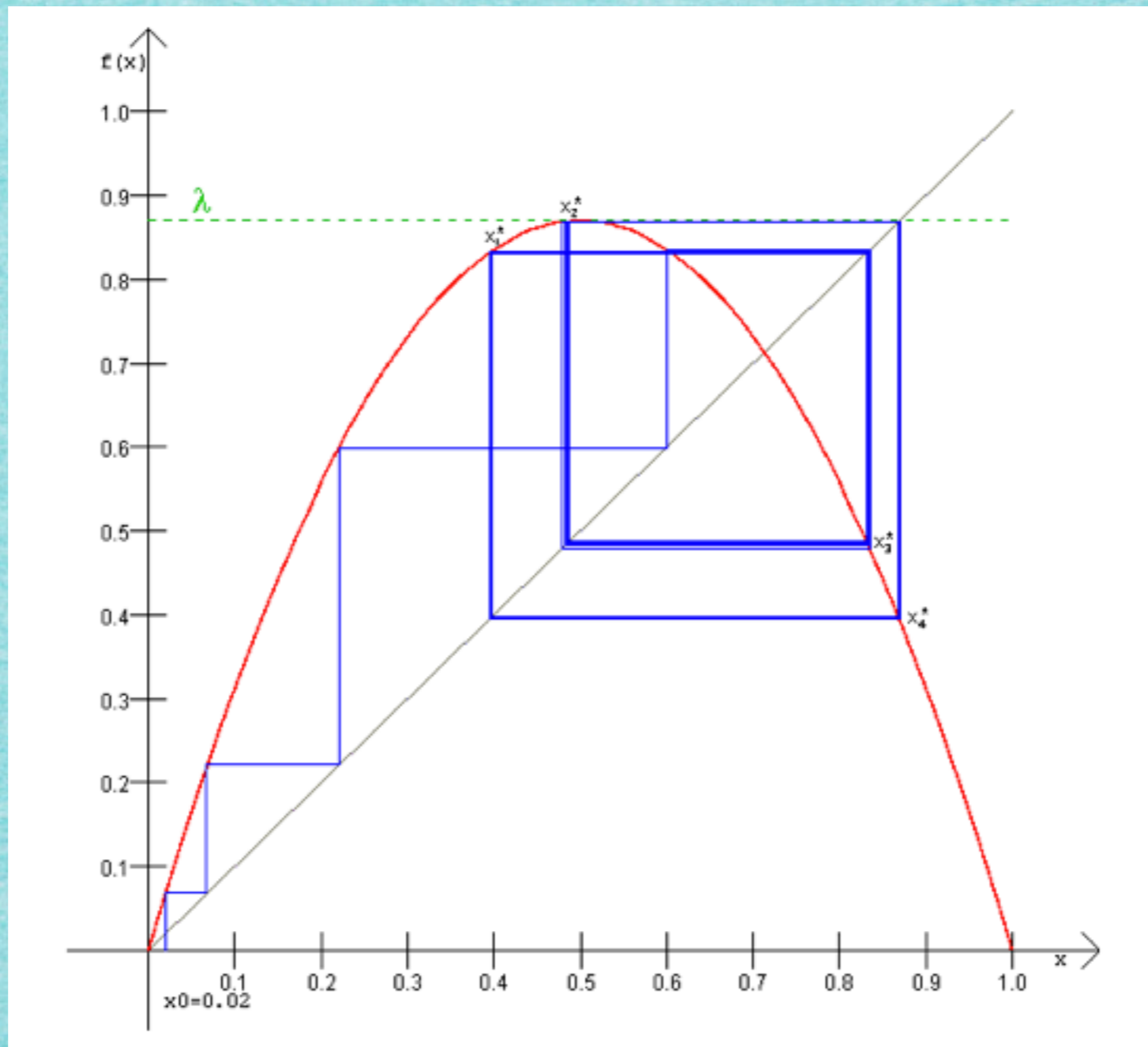
## 5.4.1 Logistische Rekursion

Zwei Fixpunkte!



## 5.4.1 Logistische Rekursion

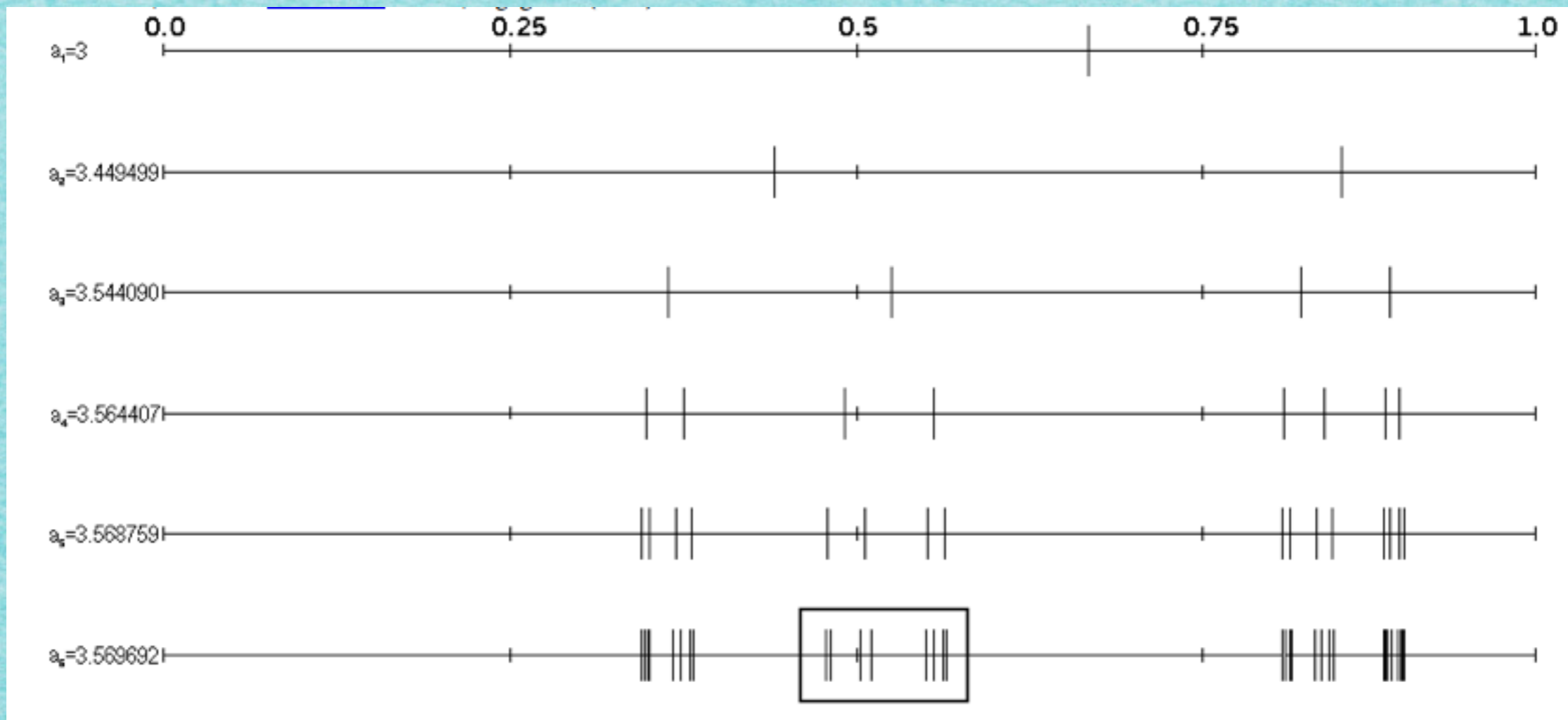
**Vier Fixpunkte!**





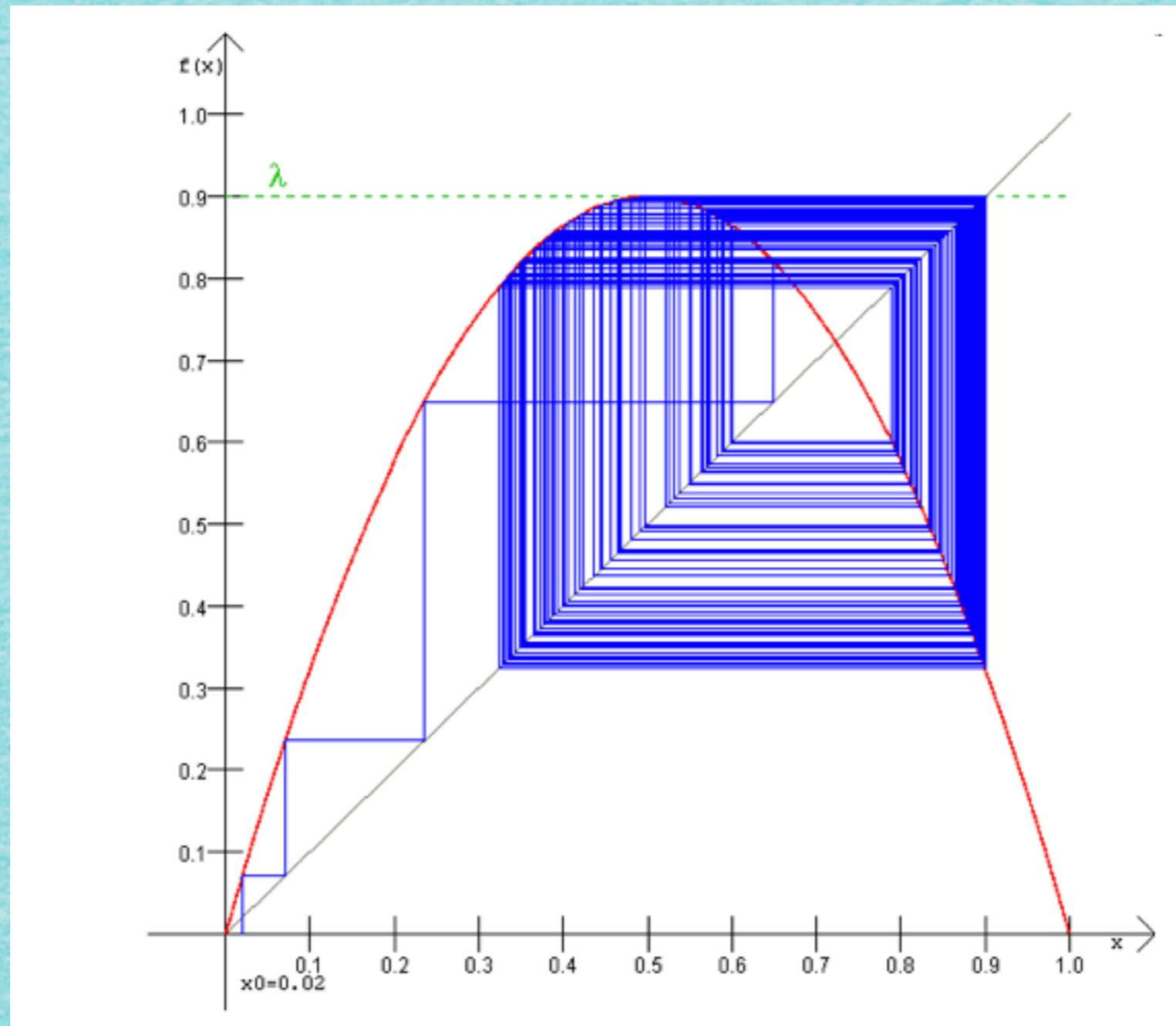
# 5.4.1 Logistische Rekursion

Entwicklung der Fixpunkte:



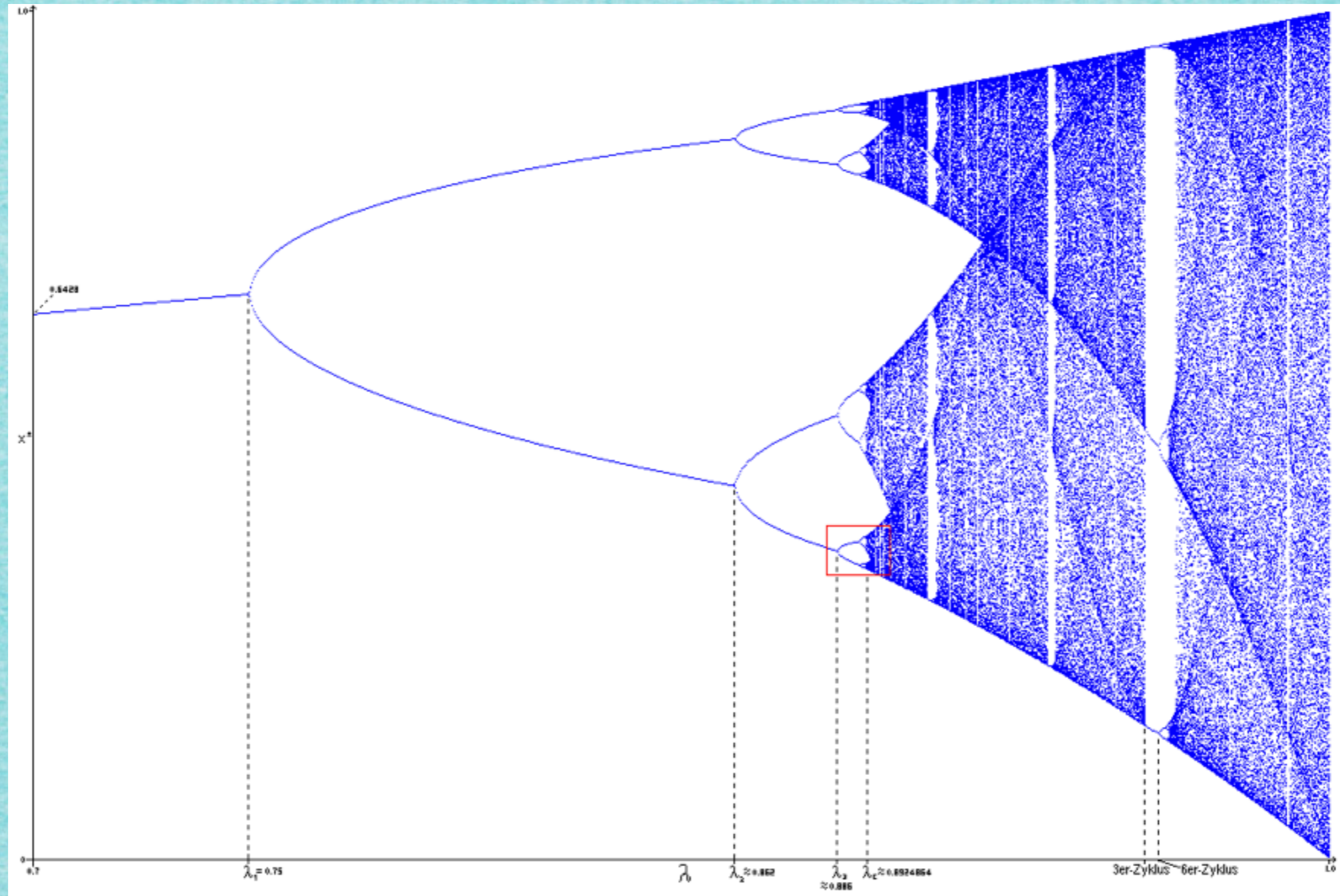
## 5.4.1 Logistische Rekursion

**Keinerlei Fixpunkte -  
deterministisches Chaos:**



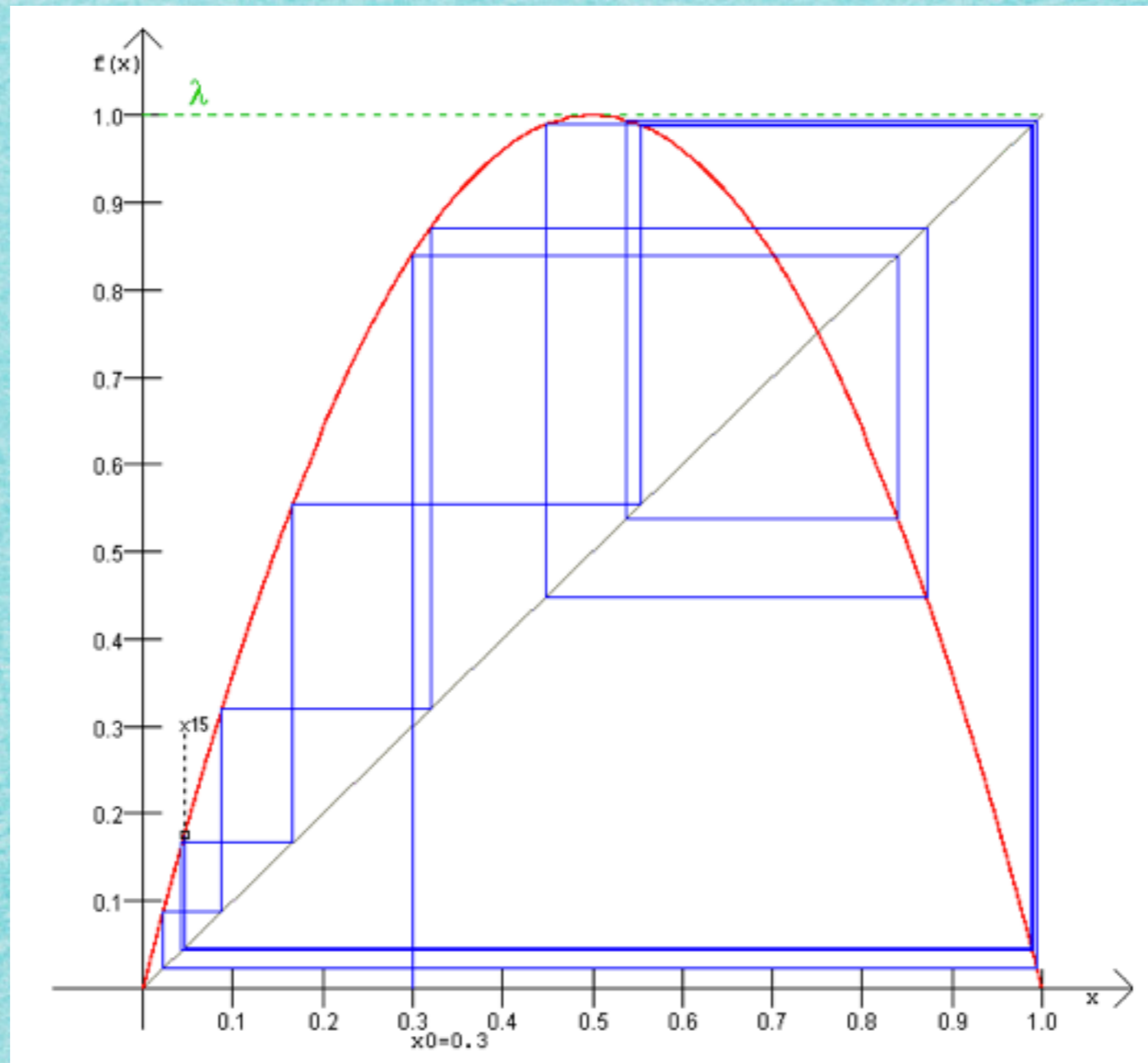
# 5.4.1 Logistische Rekursion

Bifurkationsdiagramm:



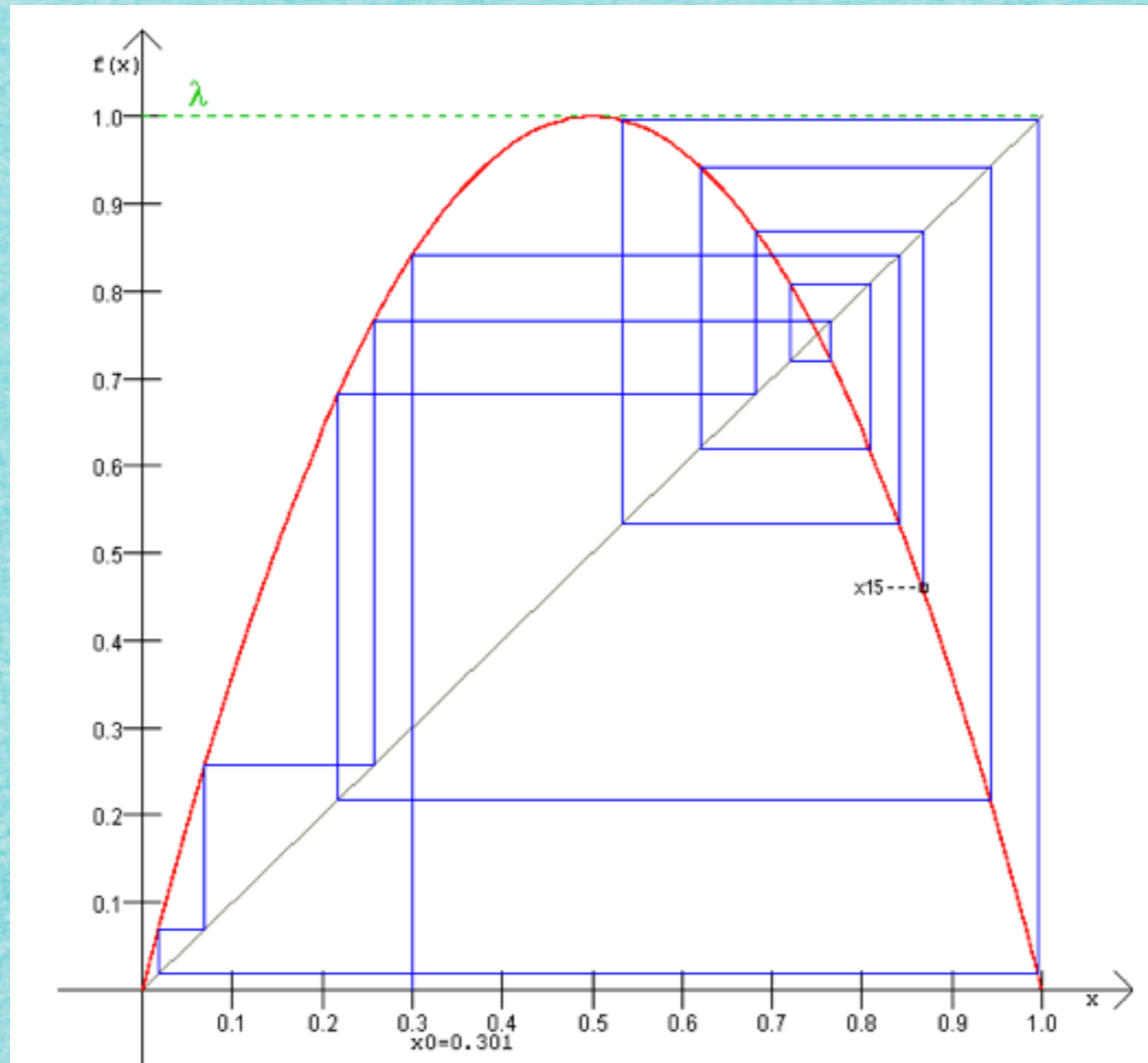
# 5.4.1 Logistische Rekursion

Kausalität?!



# 5.4.1 Logistische Rekursion

Kausalität?!



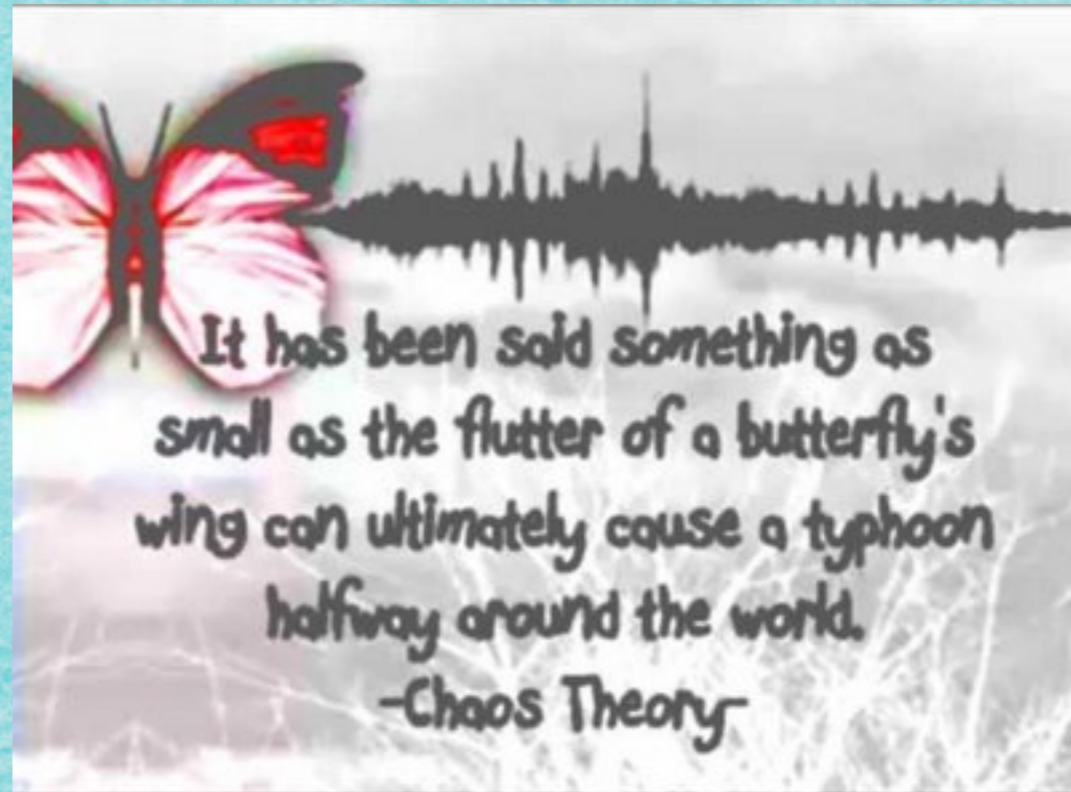
## 5.4.1 Logistische Rekursion



Edward Lorenz  
(1917-2008)

*Grenzen der Kausalität!*

*Predictability: Does the flap of a butterfly's wings in Brazil set off a tornado in Texas?*



## 54.2 Frühkindliche Bildung



Pappbilderbuch, 16 Seiten  
erschienen 1993

Nur wer viel spricht, lernt sprechen! Entsprechend schnell wachsen Sprachverständnis und Wortschatz von Kleinkindern, je mehr Gelegenheit Eltern ihnen zum Üben geben. Die Bilderbücher von Helmut Spanner eignen sich hervorragend zur spielerischen Sprachförderung, denn durch Zeigen und Benennen von Alltagsgegenständen wird der passive Wortschatz in aktiv nutzbare Wörter umgewandelt. Mehr als 250 Dinge, die Kindern ab einem Jahr vertraut sind, wurden hier, nach Themen geordnet, auf großen Doppelseiten zusammengestellt. Ab und zu entdeckt man auch einen kleinen Bären oder ein Mäuschen, die mit den Dingen spielen.

[>> Lesermeinungen zu diesem Buch](#)



# 5.4.2 Frühkindliche Bildung



$$X_{n+1} = X_n^2 - Y_n^2 - C_x$$

$$Y_{n+1} = 2X_n Y_n - C_y$$

$$Z_n = X_n + iY_n$$

$$C = C_x + iC_y$$

$$Z_{n+1} = Z_n^2 - C$$



## 5.4.2 Die Mandelbrotmenge

**Noch einmal quadratische Rekursion:**

$$z_{n+1} = z_n^2 + c \quad z_0 = 0$$

**Für welche Werte  $c$  bleibt das beschränkt?**

$$c = -2 : 0, -2, 2, 2, \dots$$

$$c = 1/4 : 0, 0.25, 0.3125, 0.3476, 0.3708, 0.3875, 0.4001, 0.4101, \dots$$

**Man kann das auf die logistische Iteration abbilden...**

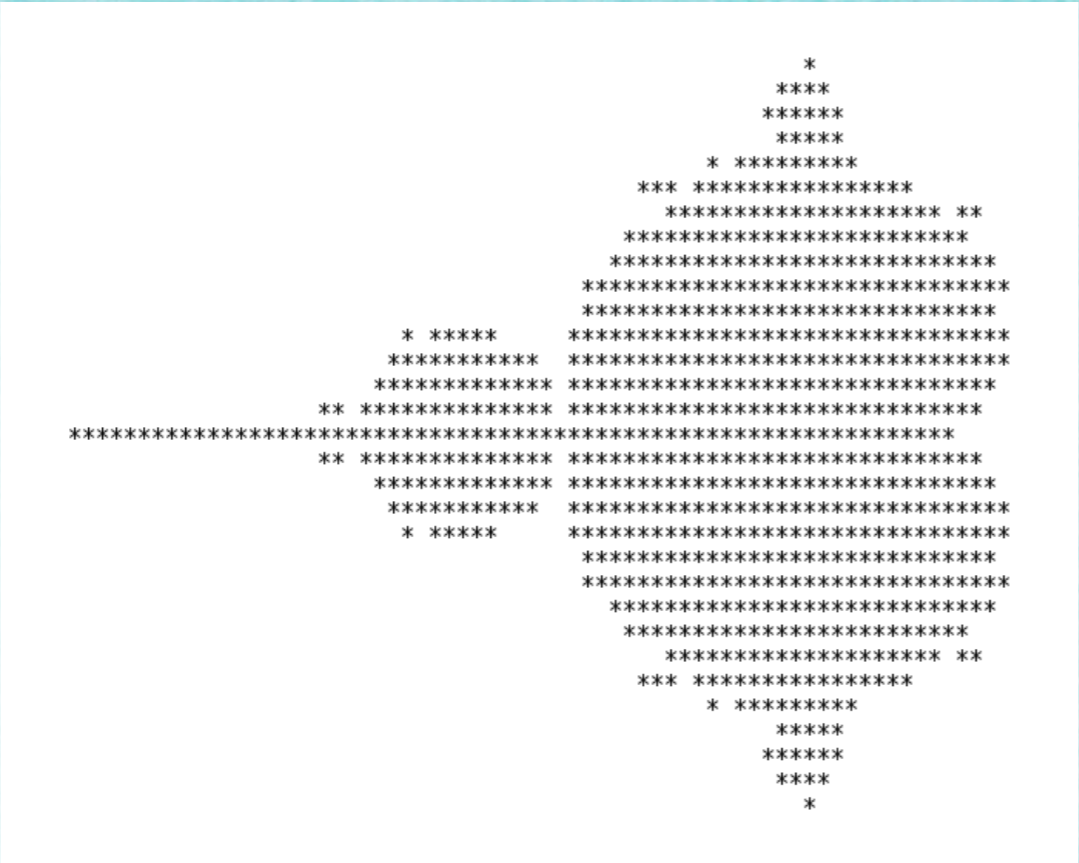
# 5.4.2 Die Mandelbrotmenge

Noch einmal quadratische Rekursion:

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

$$z_0 = 0$$

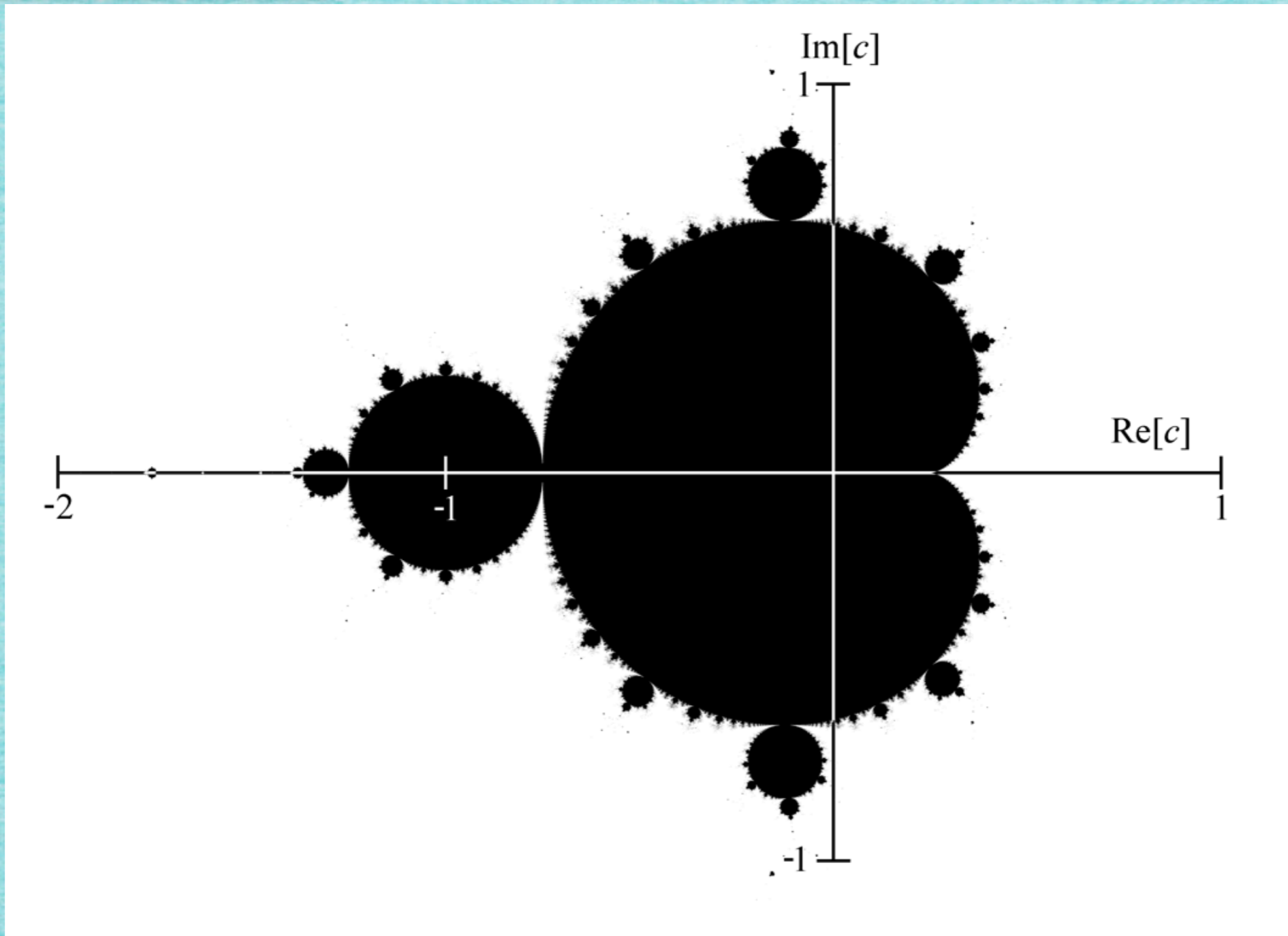
Für welche *komplexen* Werte  $c$  bleibt das beschränkt?



Brooks & Matelsky  
(1978)

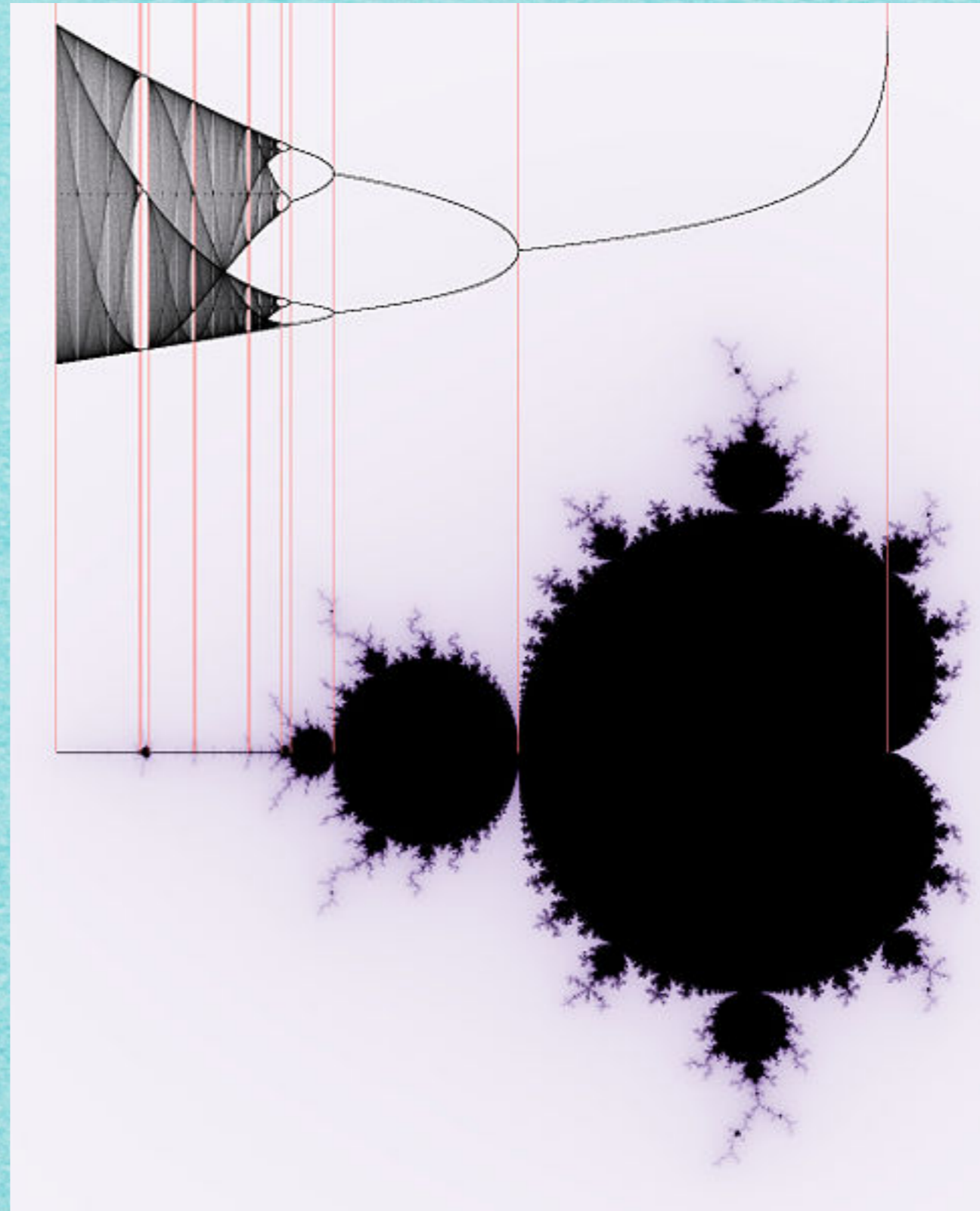
## 54.2 Die Mandelbrotmenge

Besser aufgelöst:



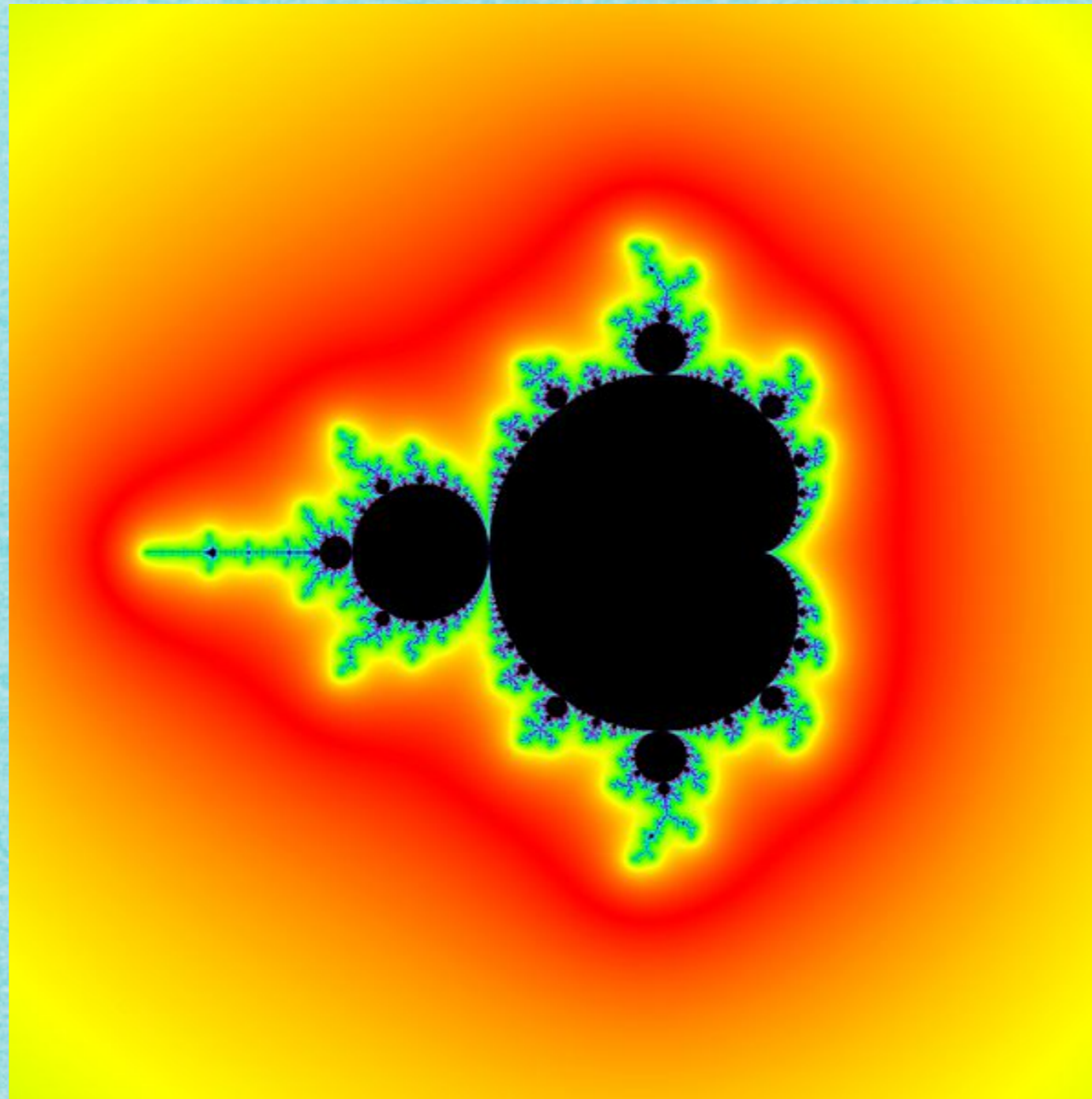
## 54.2 Die Mandelbrotmenge

Realteil auf die  
logistische Iteration  
abgebildet:



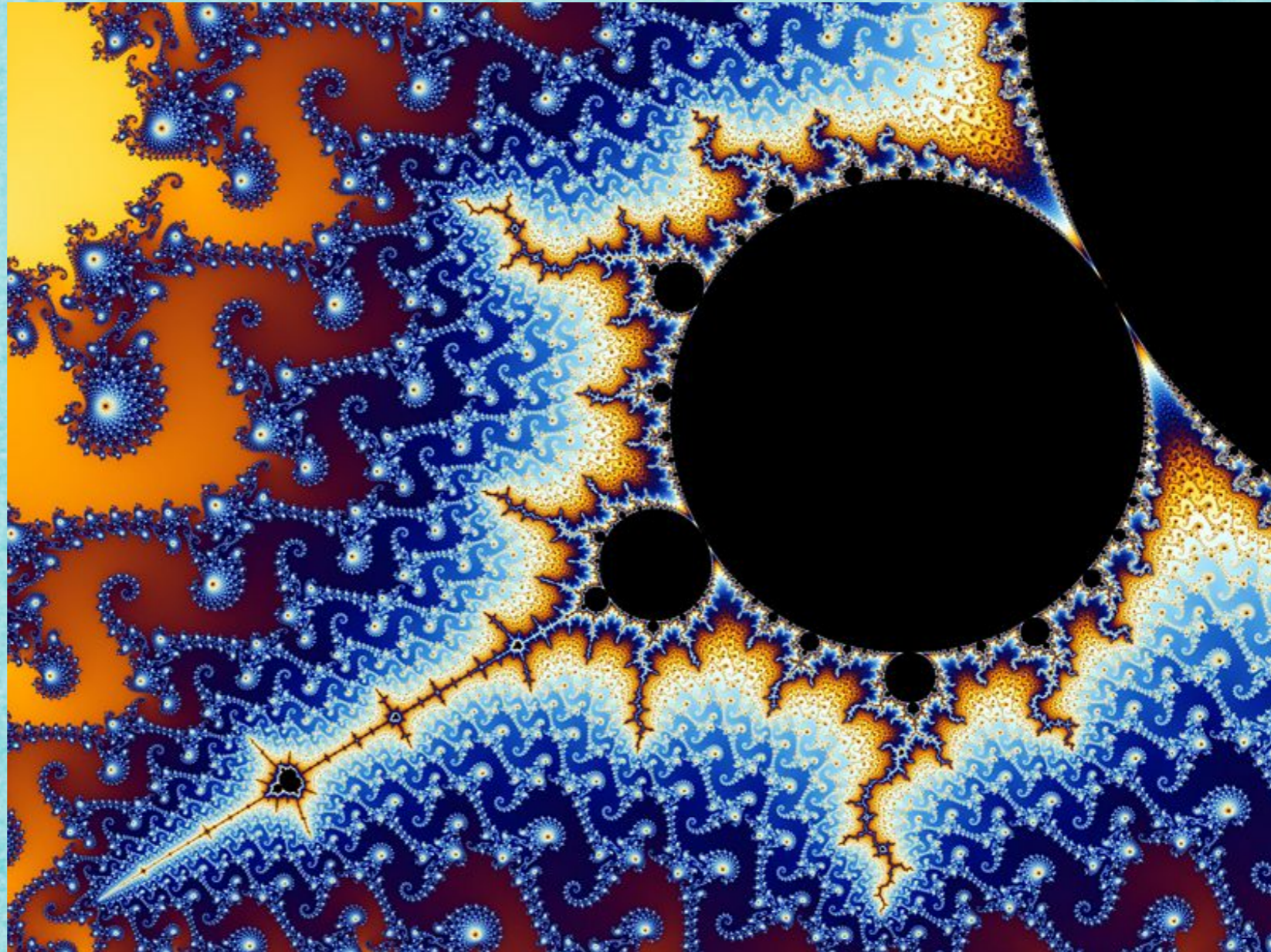
## 5.4.2 Die Mandelbrotmenge

**Farbig:**



## 5.4.2 Die Mandelbrotmenge

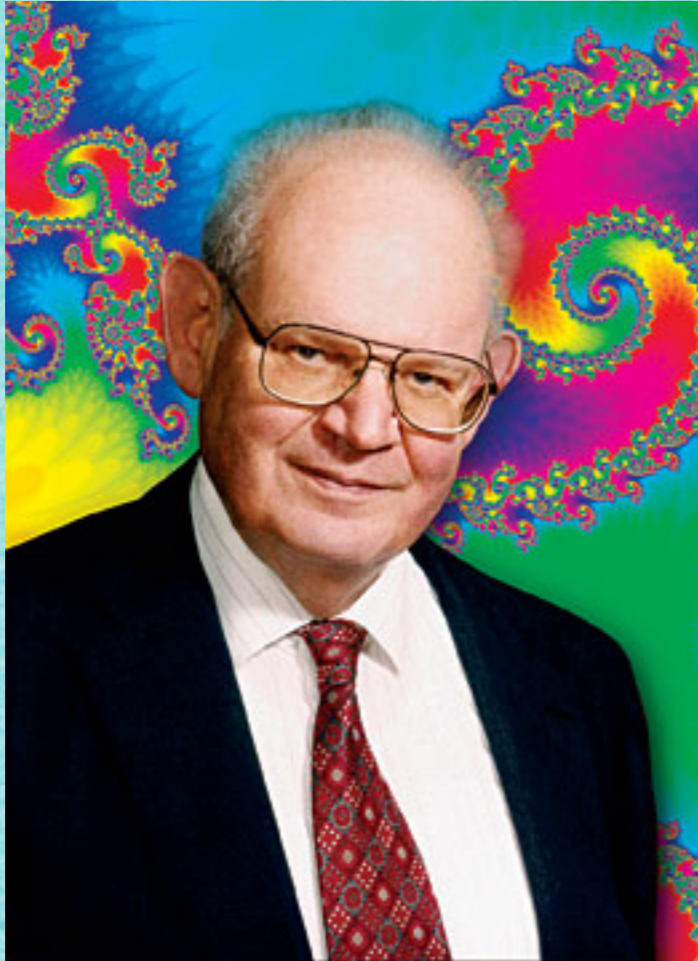
**Ausschnitt:**



**-> Film:**

- **Video von tthsqe12**
- **Musik „Research Lab“ von Dark Flow**

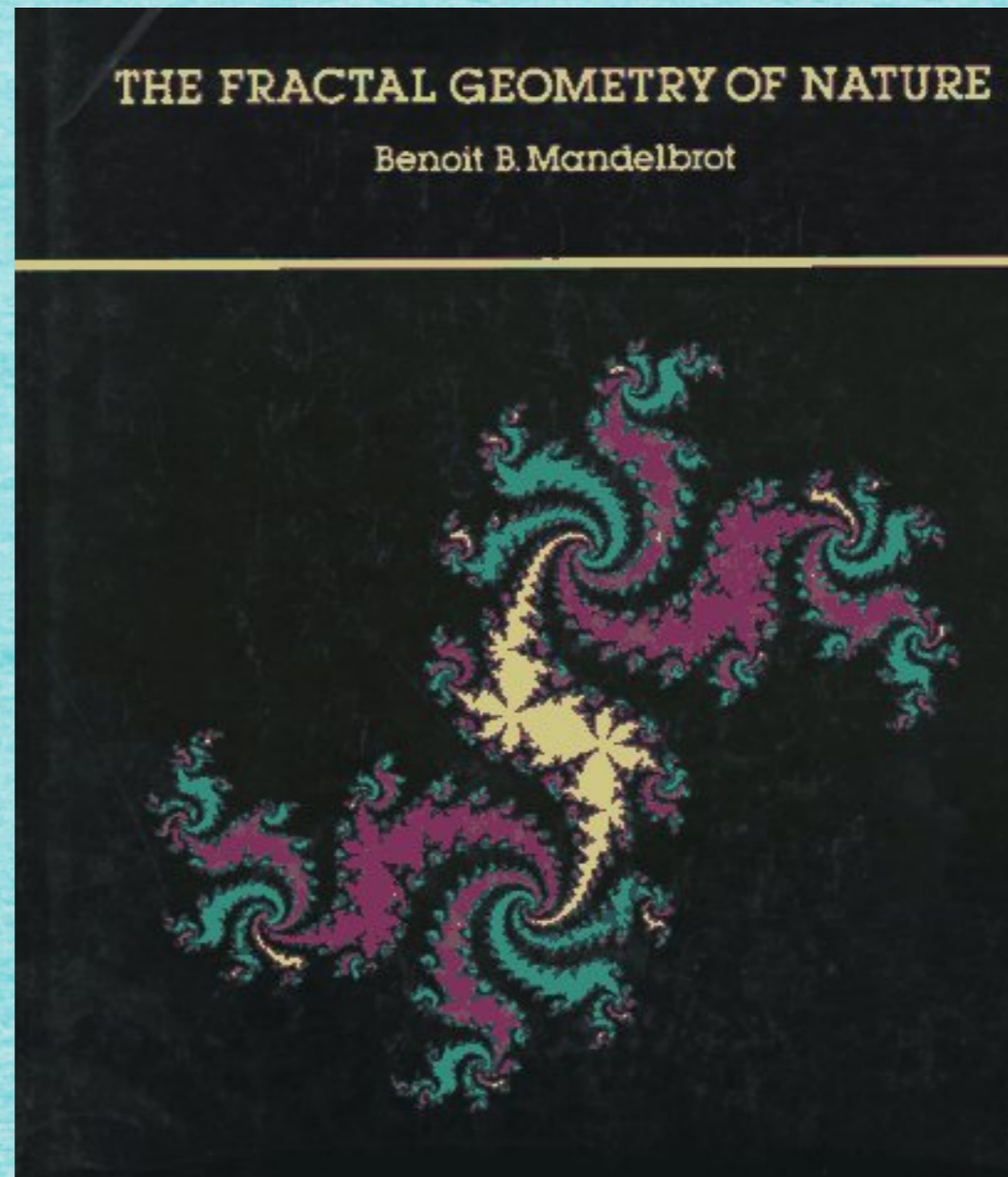
## 5.4.2 Die Mandelbrotmenge



Benoît Mandelbrot  
(1924-2010)

Erste Dauerprofessur:  
1999

Fractal Geometry of Nature  
(1982)



## 54.3 Fraktale

Mandelbrot  
(1967)

*How long is the coast line of Britain?*



Maßstab 200km:  
2350km



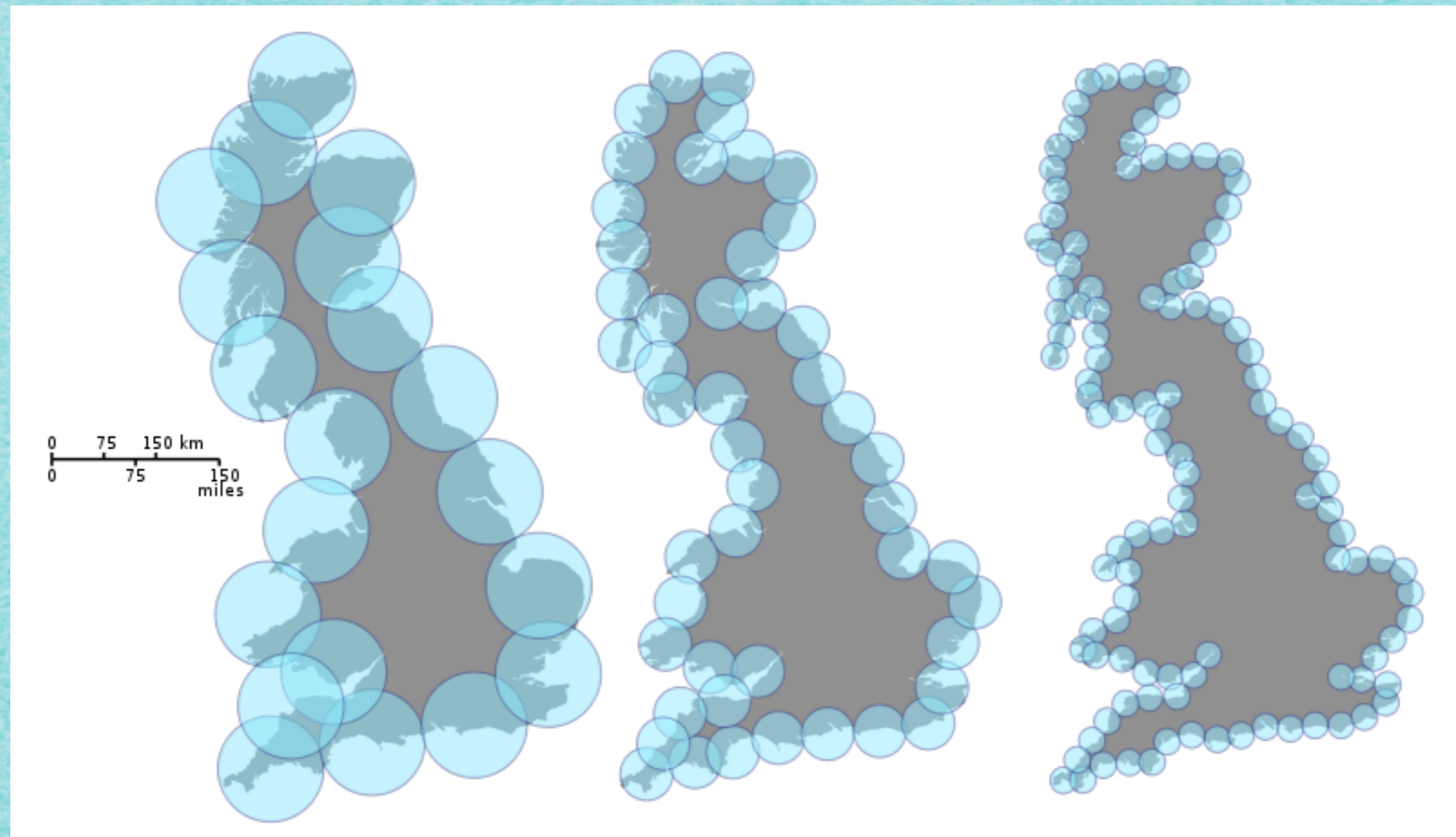
Maßstab 100km:  
2775km



Maßstab 50km:  
3425km



## 54.3 Fraktale



*Hausdorff-Dimension:  
Wie wächst das Gesamtmaß in Abhängigkeit von der Größe?*

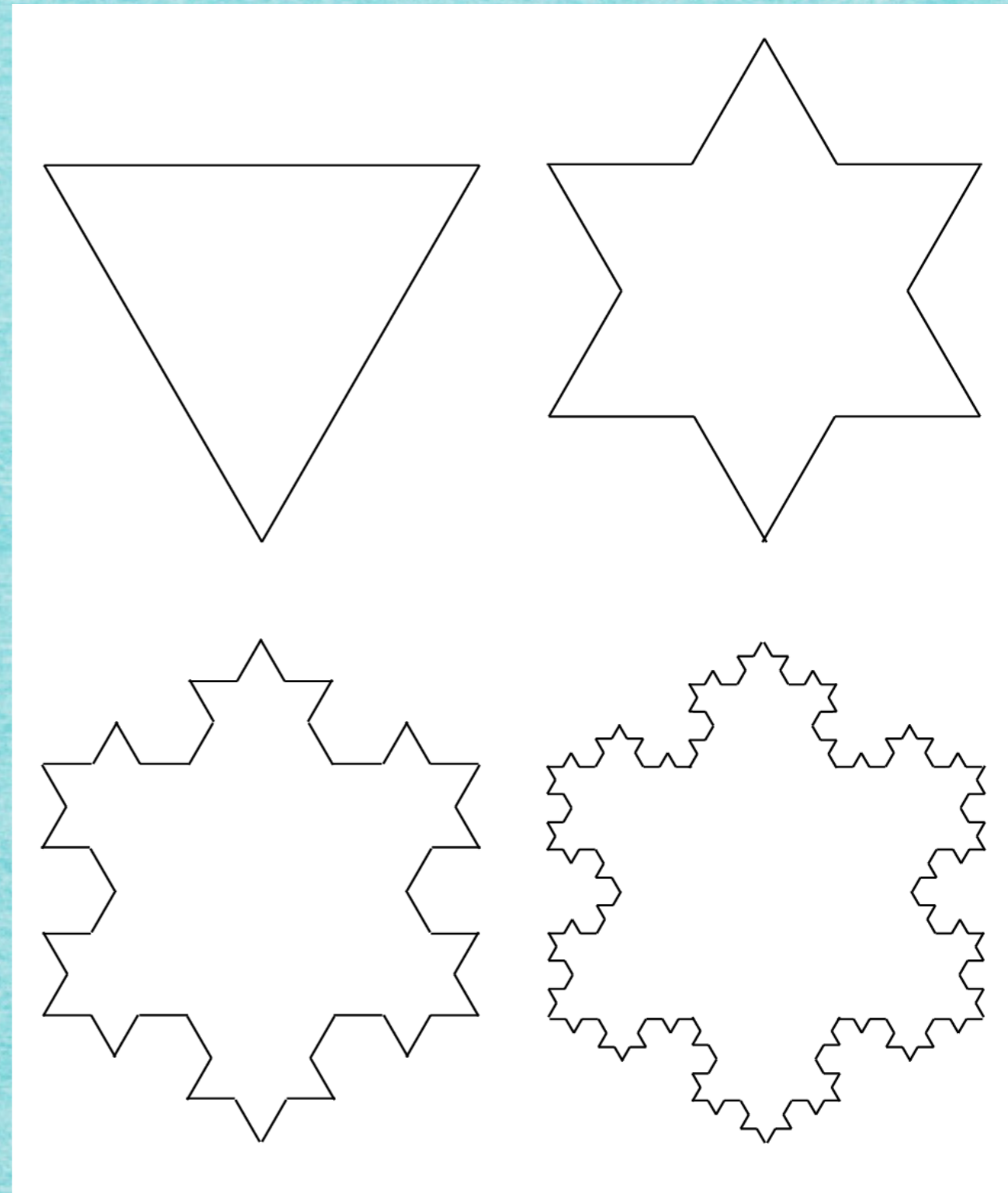
## 54.3 Fraktale



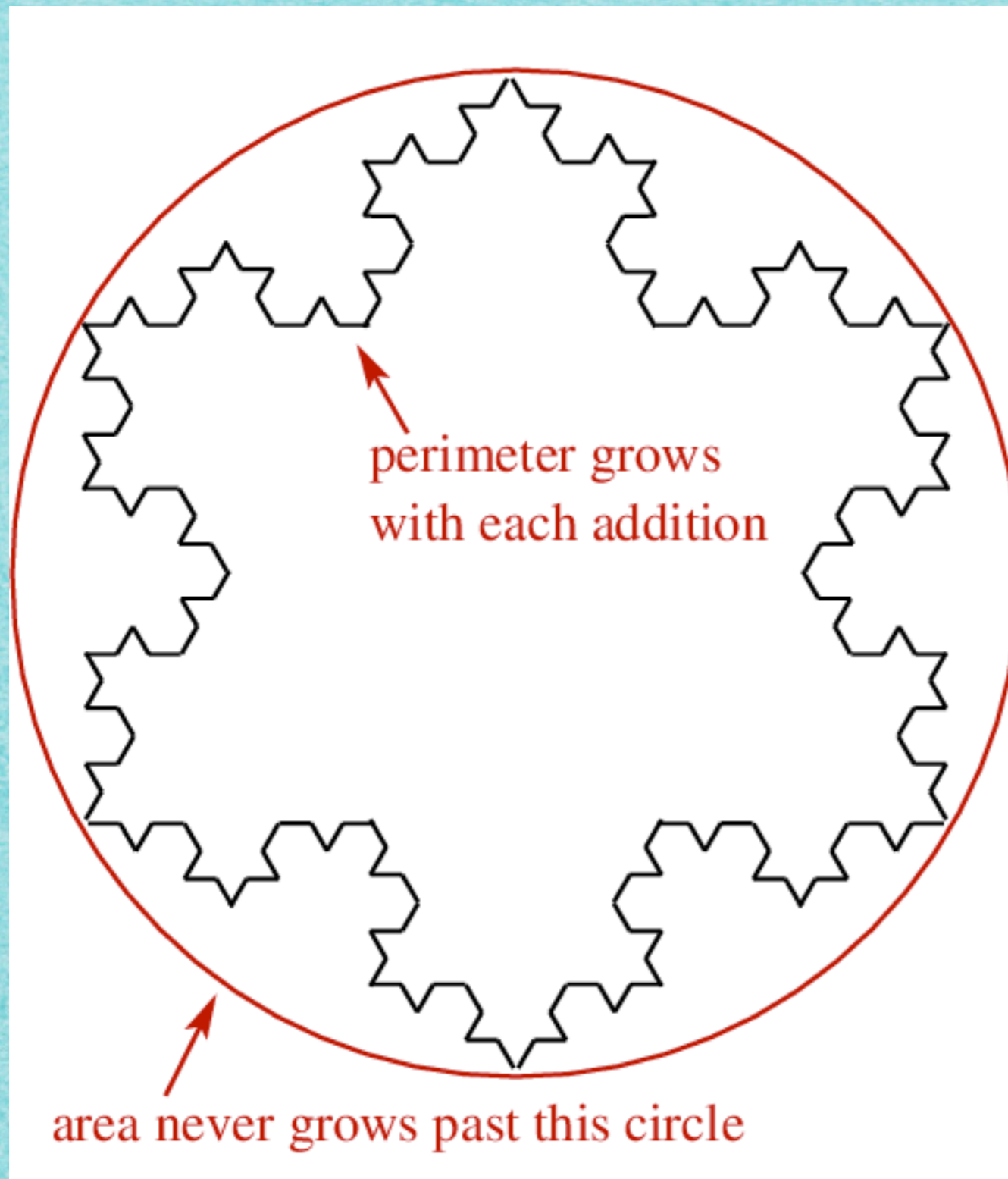
Niels Fabian Helge  
Hartmut von Koch  
(1870-1924)

*Schneeflockenkurve*

(1904)



## 54.3 Fraktale

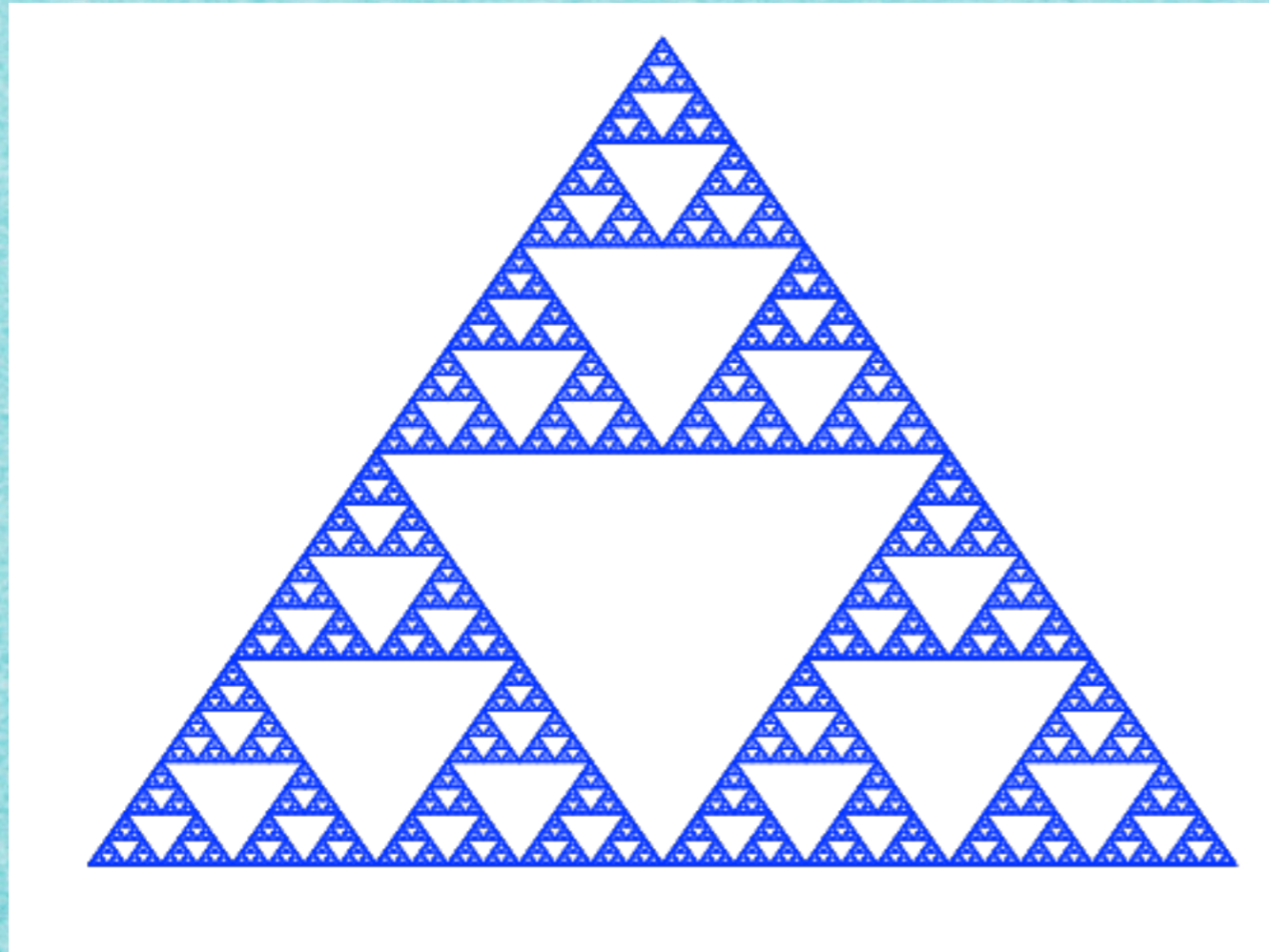


Pro Iteration:  
Länge wächst um  
Faktor  $4/3$

Hausdorff-Dimension  
des Randes:  
 $\log(4)/\log(3)$   
 $= 1.2618595\dots$

Fläche:  
Länge wächst um  
Faktor  $4/3$

## 54.3 Fraktale



Sierpinski-Dreieck:  
Fläche schrumpft um  
Faktor  $3/4$  pro  
Iteration

Hausdorff-Dimension  
der Fläche:  
 $\log(3)/\log(2)$   
 $= 1.5849625\dots$

## 54.3 Fraktale

**Fraktale in  
der Natur:**

Romanesco



## 54.3 Fraktale

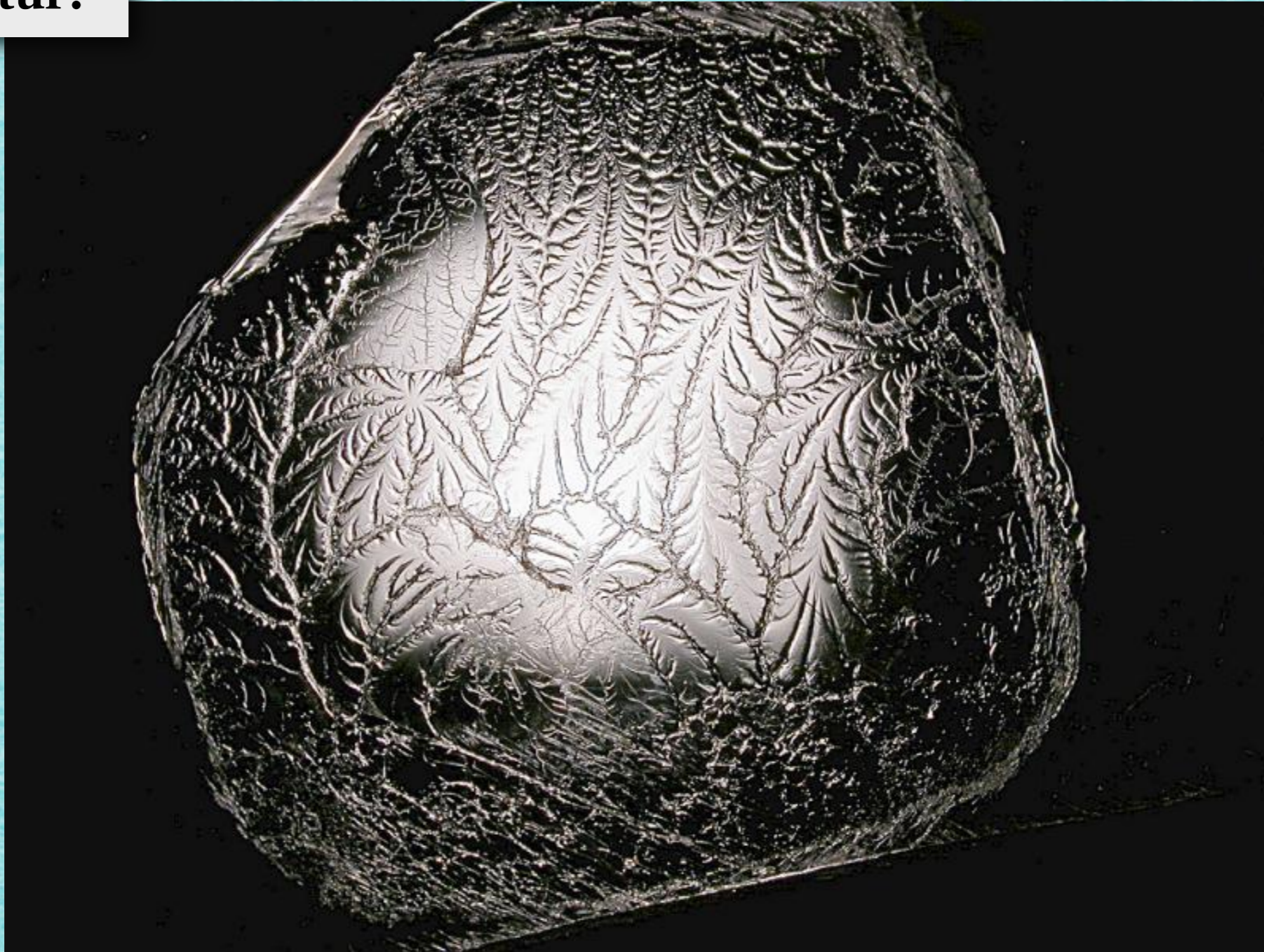
**Fraktale in  
der Natur:**



Eiskristalle

## 54.3 Fraktale

**Fraktale in  
der Natur:**



Adhäsionsmuster

## 54.3 Fraktale

**Fraktale in  
der Natur:**



Muster elektrischer Entladung



## 54.3 Fraktale

Fraktale in  
der Natur:



Farn

## 54.3 Fraktale



Farn (nicht echt)

## 54.3 Fraktale



# SNAPSHOTS

January 18, 2024 | ISSUE 108



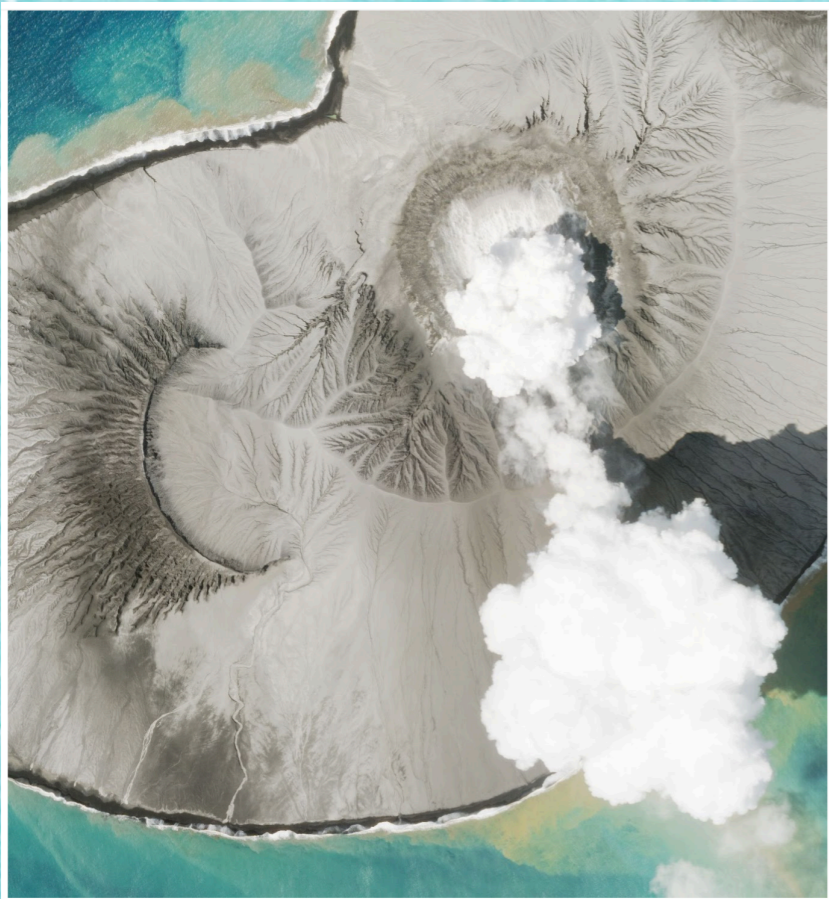
*SkySat • Burrup, Australia • November 21, 2020*

## 54.3 Fraktale



PlanetScope • Derby, Australia • February 14, 2022

# 54.3 Fraktale



SkySat • Hunga Tonga-Hunga Ha'apai, Tonga • January 7, 2022



PlanetScope • Near Riyadh, Saudi Arabia • December 2, 2023



RapidEye • Waterton Lakes National Park, Canada • August 27, 2019

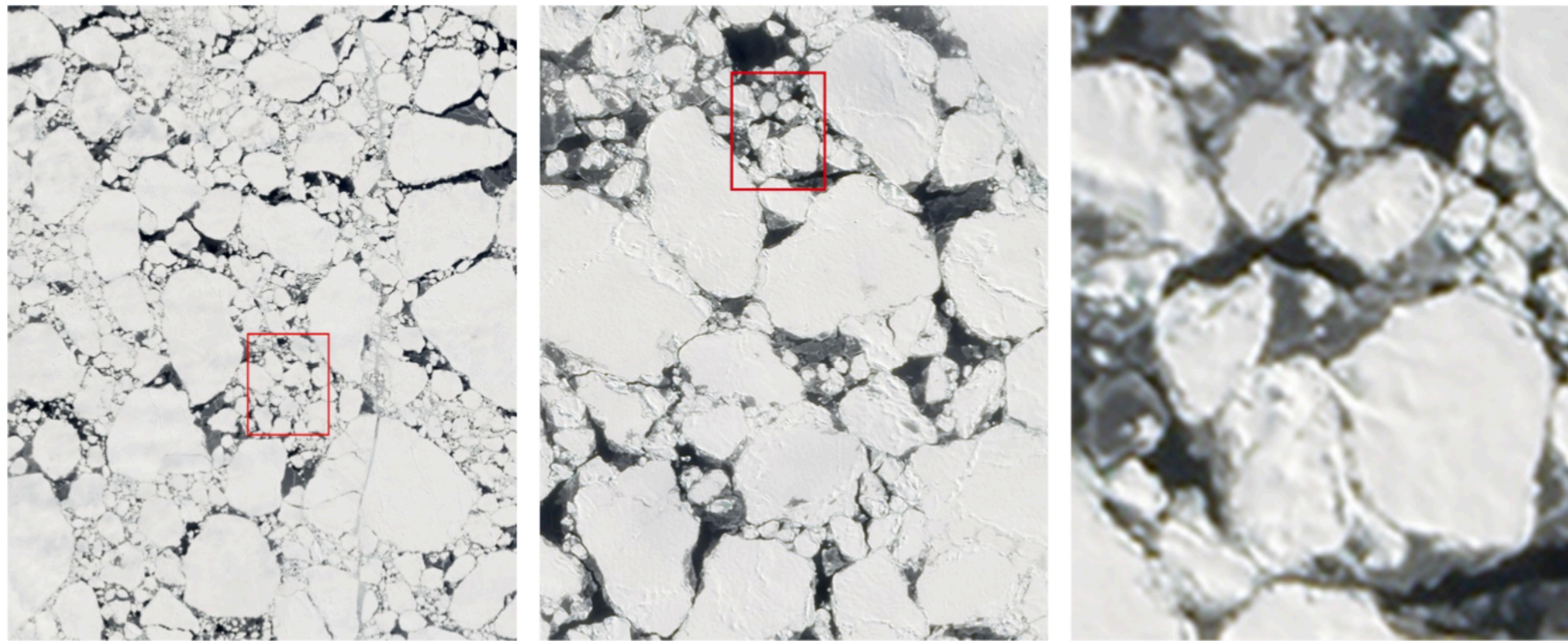


PlanetScope • Gomso Bay, South Korea • January 6, 2024



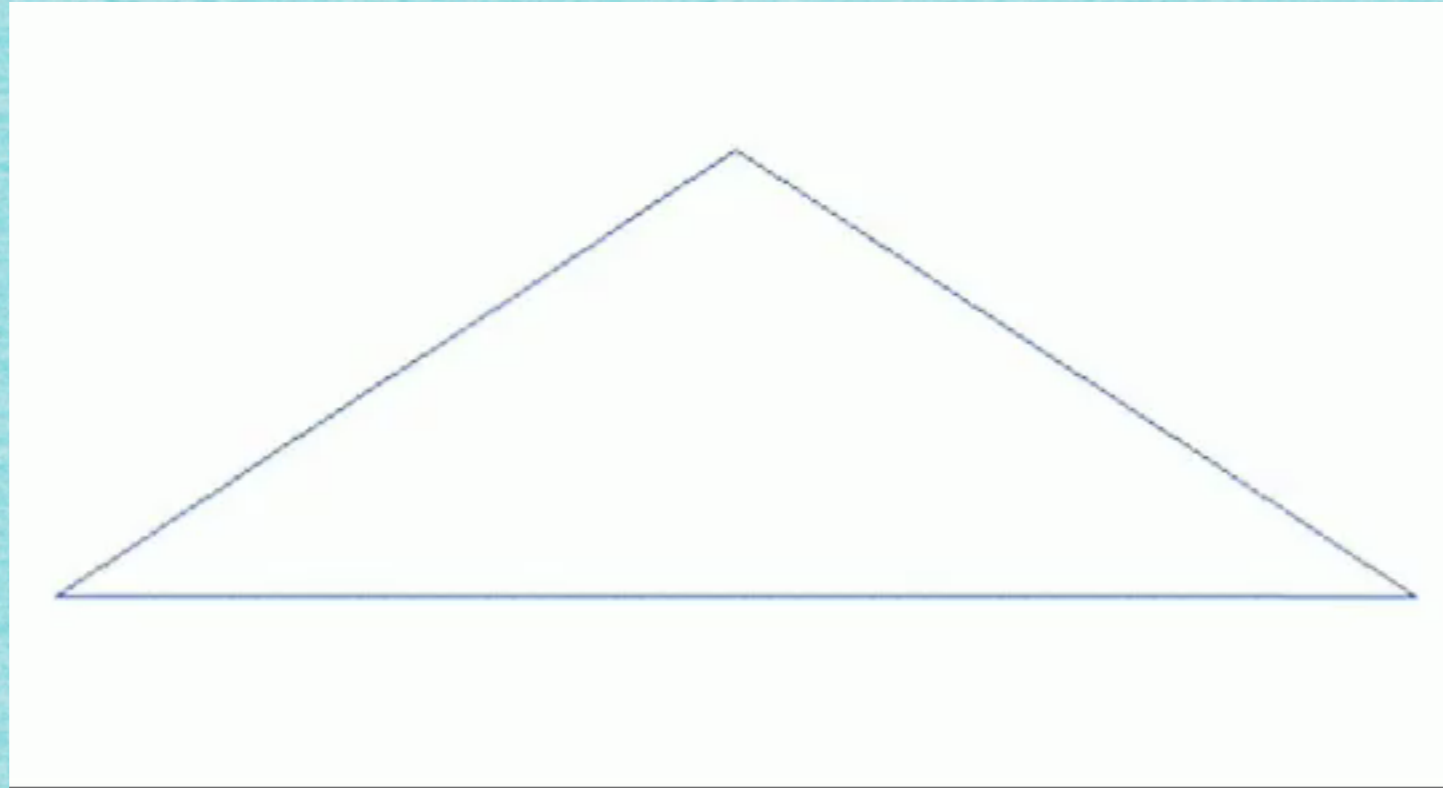
PlanetScope • Kane Basin, between Canada and Greenland • July 9, 2023

## 54.3 Fraktale



SkySat • Antarctica • February 20, 2022

## 54.3 Fraktale



*“Clouds are not spheres, mountains are not cones, coastlines are not circles, and bark is not smooth, nor does lightning travel in a straight line.” - Mandelbrot*

# 544 Zelluläre Automaten



Stanislaw Ulam  
(1909-1984)



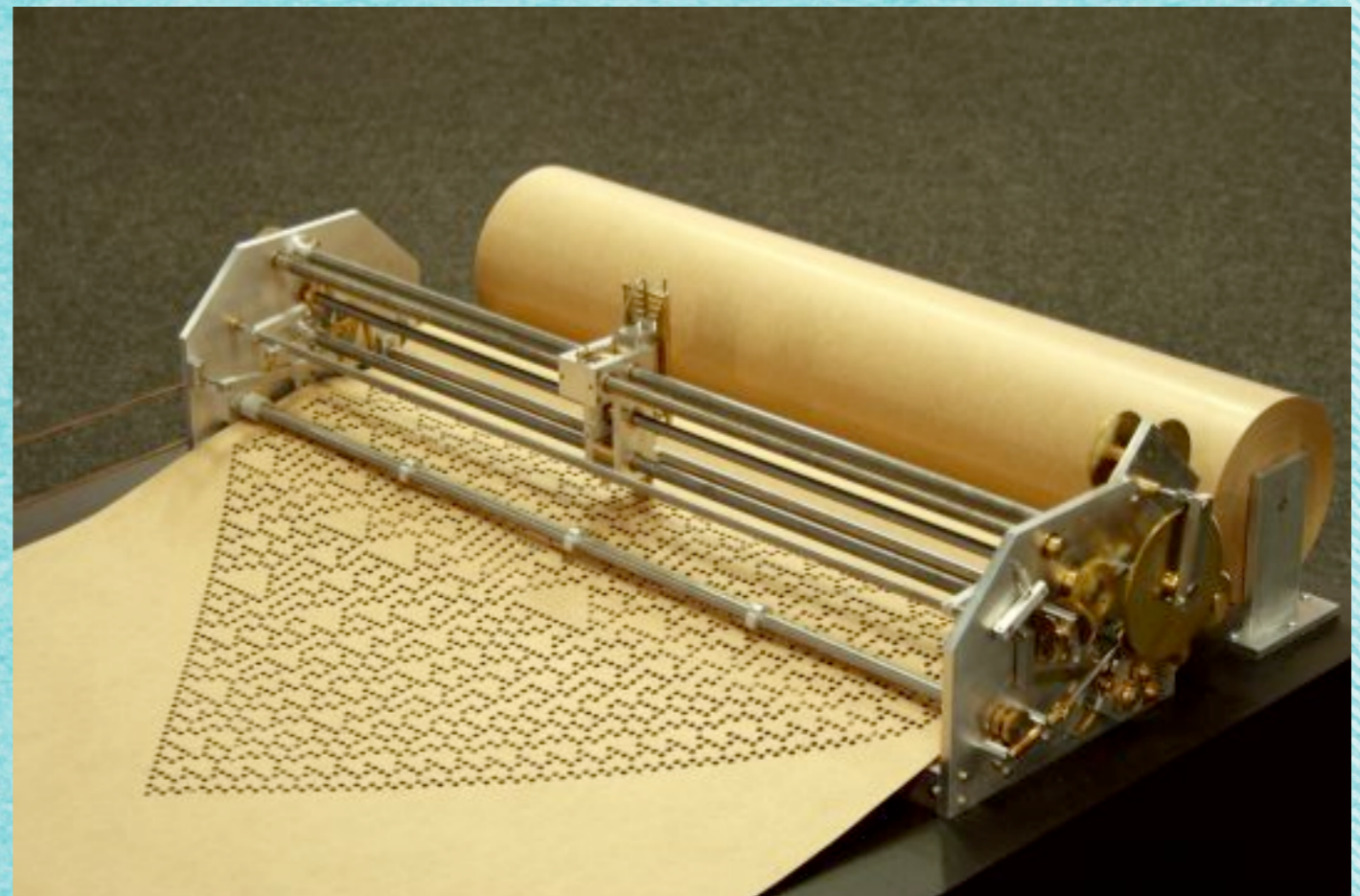
John von Neumann  
(1903-1957)



0 0 0 1 1 1 1 0

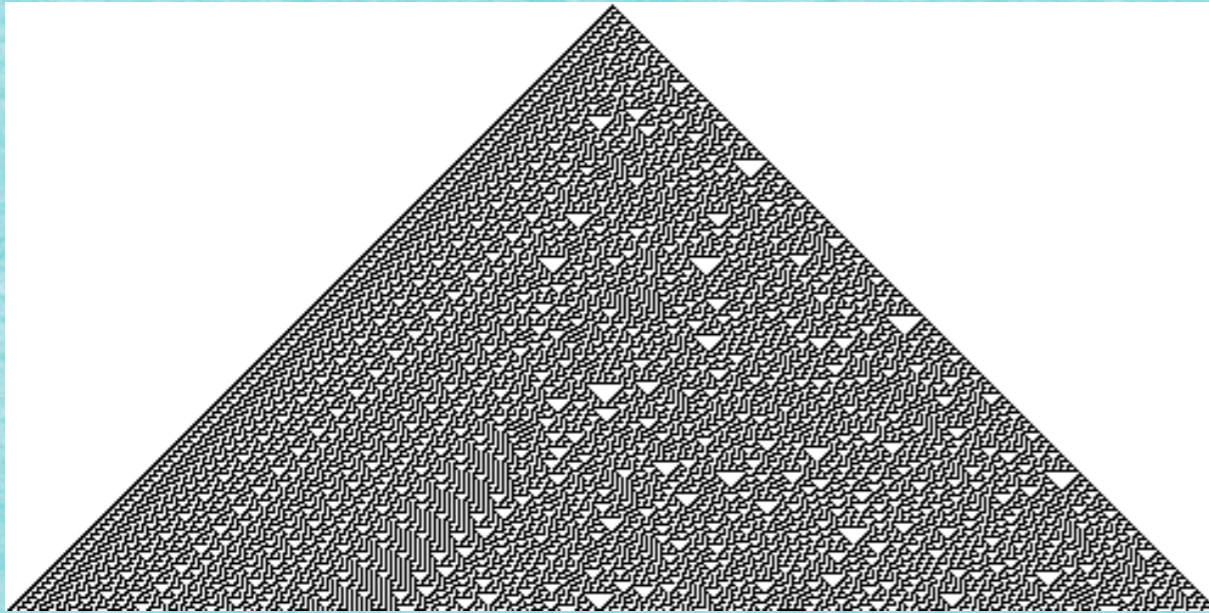
“Rule 30”

$$(0*128+0*64+0*32+1*16+1*8+1*4+1*2+0*1=30)$$





# 544 Zelluläre Automaten



Rule 30

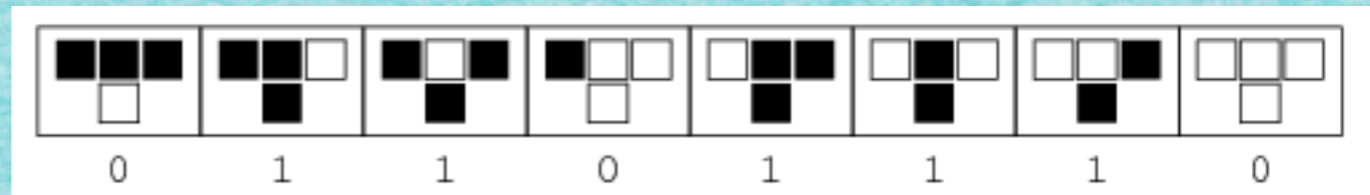
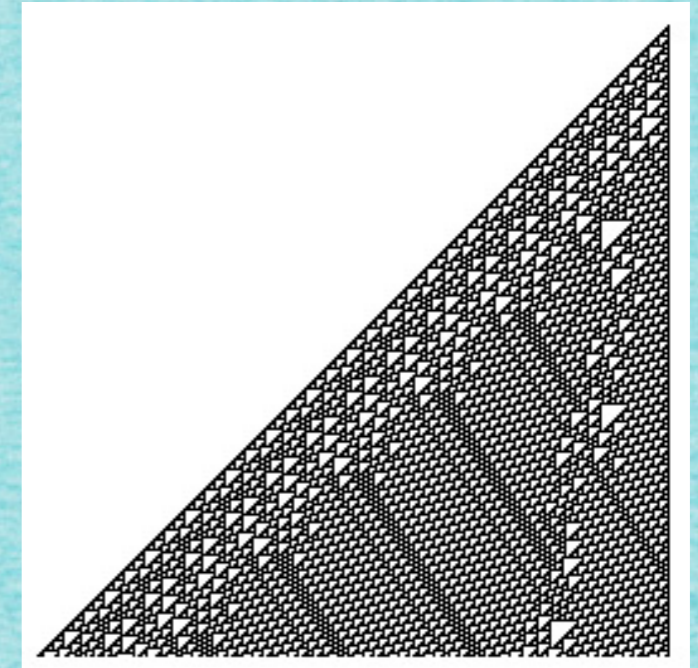
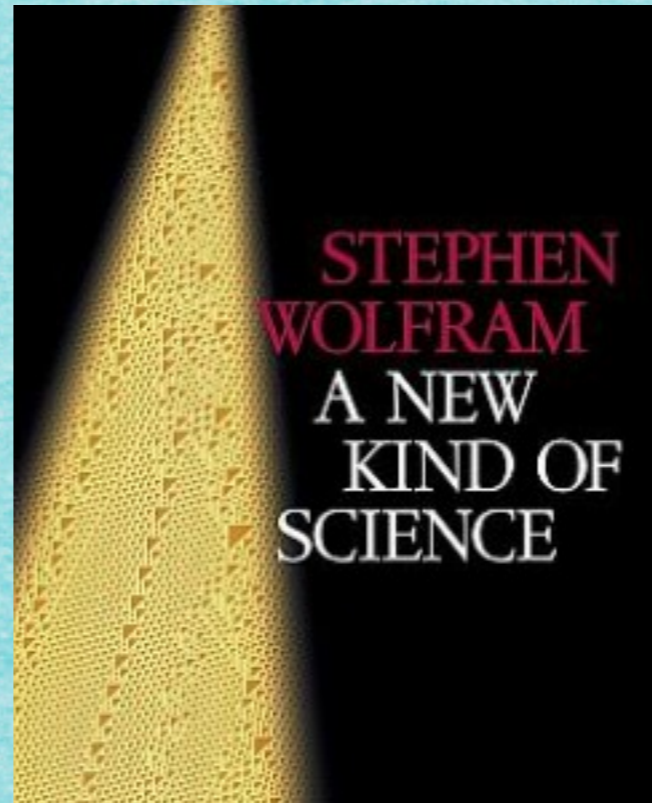


Kegelschnecke

# 544 Zelluläre Automaten



Stephen Wolfram  
(1959-)

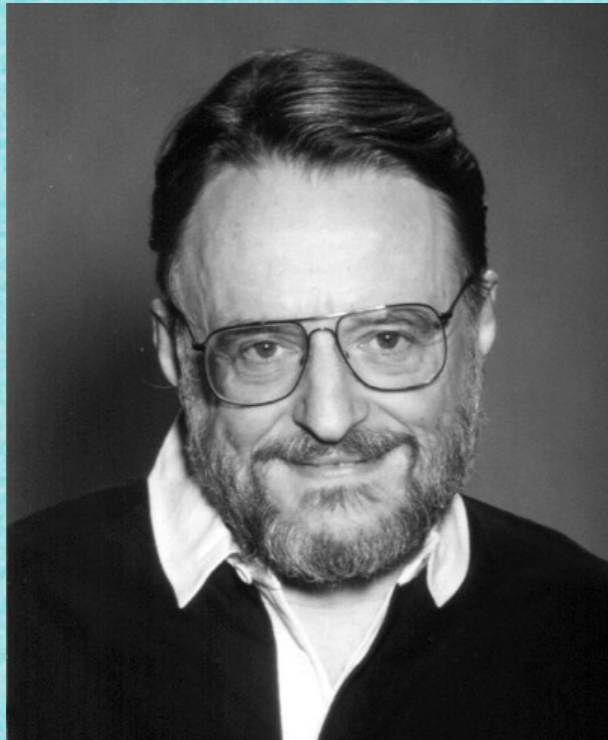


Rule 110

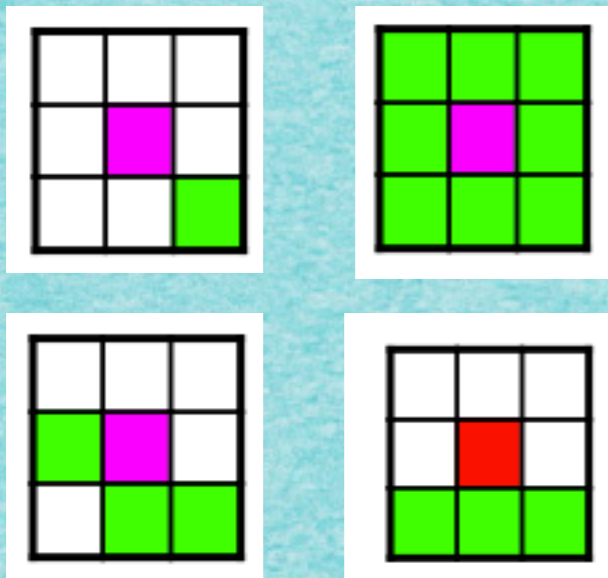
Matthew Cook (1998):  
Rule 110 ist “universell”



# 5.4.4 Zelluläre Automaten

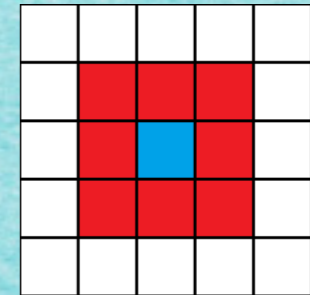


John Conway  
(1937-2020)



Game of Life:

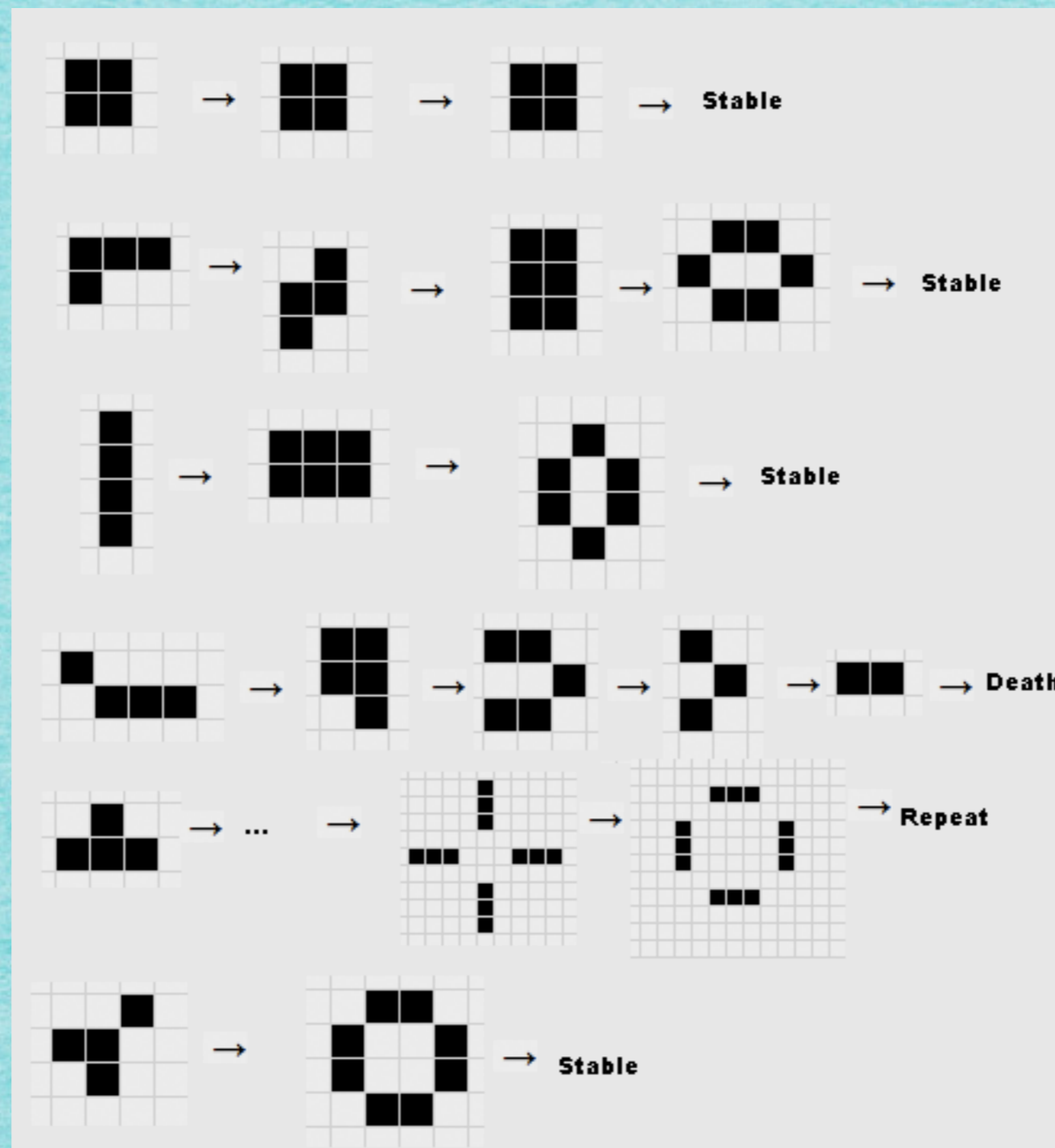
(1970)



- A. Jede Zelle lebt oder ist tot.
- B. Jede Zelle hat 8 Nachbarn.

1. Eine lebende Zelle mit weniger als zwei lebenden Nachbarn stirbt.
2. Eine lebende Zelle mit mehr als drei lebenden Nachbarn stirbt.
3. Eine lebende Zelle mit zwei oder drei lebenden Nachbarn lebt weiter.
4. Eine tote Zelle mit genau drei lebenden Nachbarn wird lebend.

# 5.4.4 Zelluläre Automaten

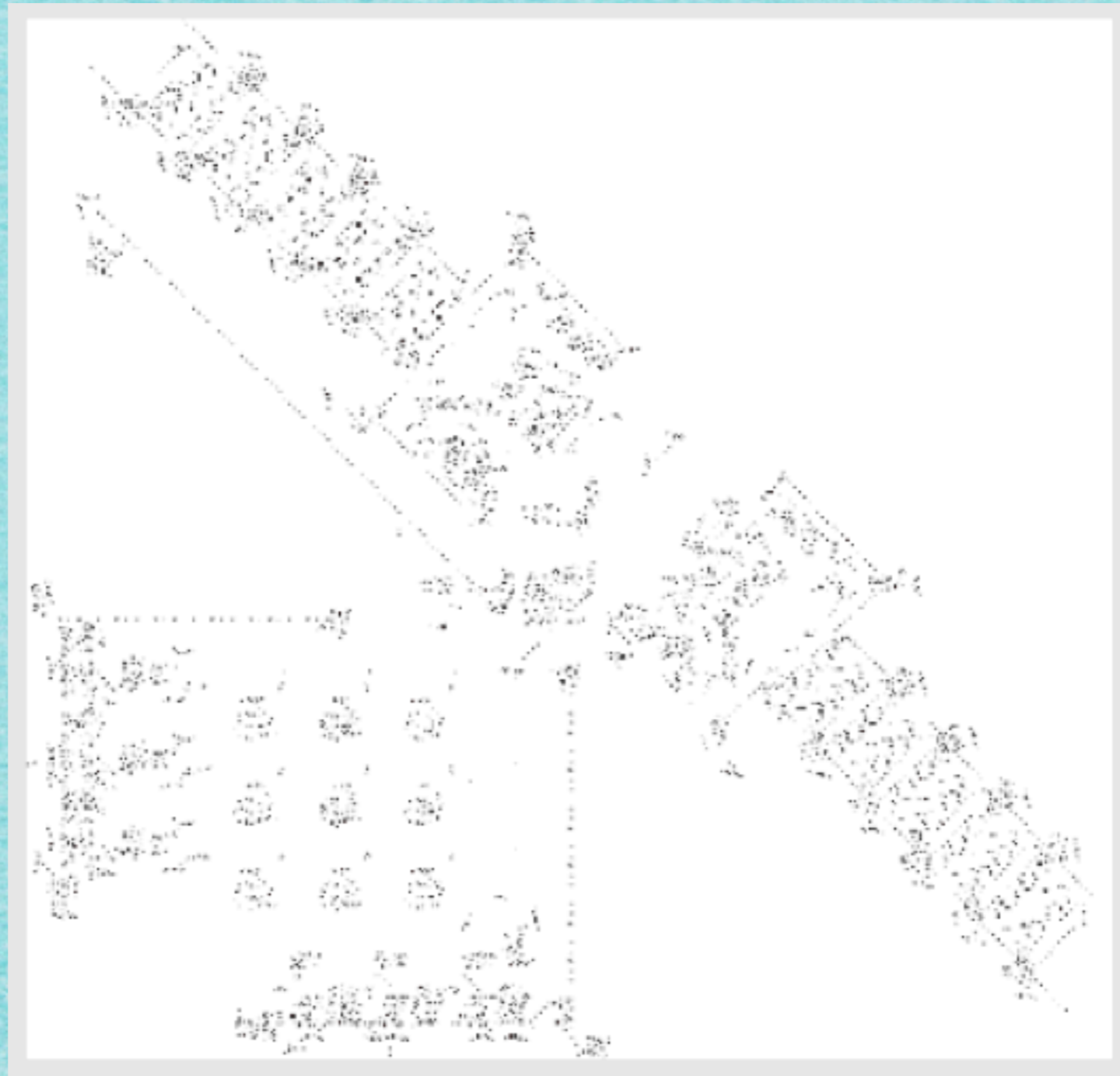


# 5.4.4 Zelluläre Automaten



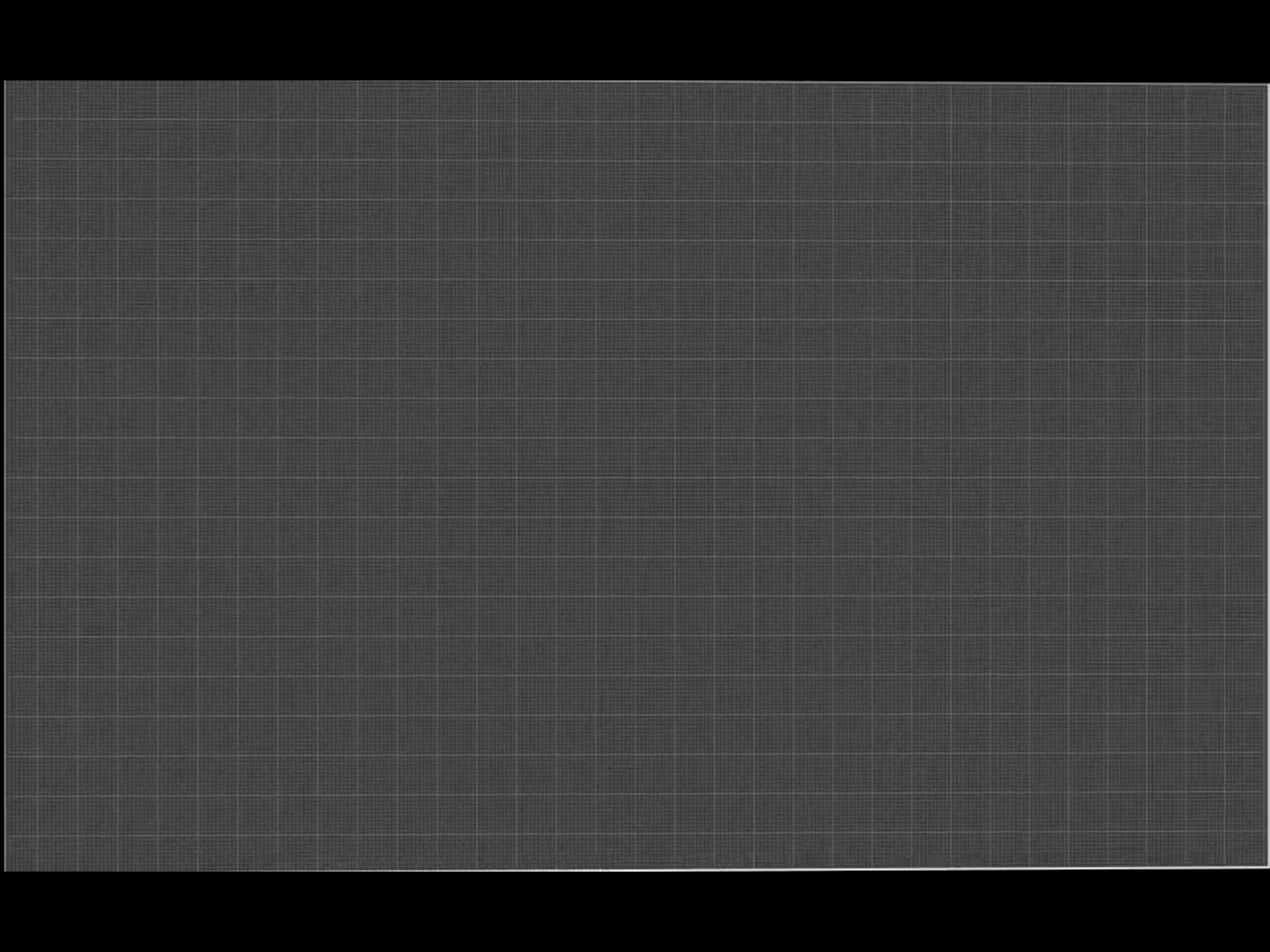
“Gosper-Glider”

## 5.4.4 Zelluläre Automaten



Turing-Maschine, basierend auf  
Game of Life (Paul Rendell)

- > Film:**
- **Video von Emanuele Ascanti**
  - **Musik „Lux Aeterna“  
von Clint Mansell & Kronos Quartet**





# 5.4 Nichtlineare Rekursionen

- **Die Welt ist nichtlinear!**
- **Nichtlinearität birgt viele Überraschungen!**



*Demnächst mehr!*

*s.fekete@tu-bs.de*