Technische Universität Braunschweig
Institut für Betriebssysteme und Rechnerverbund
Abteilung Algorithmik

Sommersemester 2023

Prof. Dr. Sándor P. Fekete
Dr. Arne Schmidt

Klausur
Algorithmen und Datenstrukturen
09.08.2023

Name: ....

Vorname: ....

Matr.-Nr.: ....

Studiengang: ....

☐ Bachelor ☐ Master ☐ Andere

Klausurcode:
Dieser wird benötigt, um das Ergebnis der Klausur abzurufen.

Hinweise:

- Bitte das Deckblatt in Druckschrift vollständig ausfüllen.
- Die Klausur besteht aus 12 Blättern, bitte auf Vollständigkeit überprüfen. Die Heftung darf nicht entfernt werden
- Erlaubte Hilfsmittel: keine
- Eigenes Papier ist nicht erlaubt.
- Die Rückseiten der Blätter dürfen beschrieben werden.
- Die Klausur ist mit 50 % der Punkte bestanden.
- Antworten, die *nicht* gewertet werden sollen, bitte deutlich durchstreichen. Kein Tippex verwenden!
- Mit *Bleistift* oder in *Rot* geschriebene Klausurteile können nicht gewertet werden.
- Werden mehrere Antworten gegeben, werten wir die mit der geringsten Punktzahl.
- Sämtliche Algorithmen, Datenstrukturen, Sätze und Begriffe beziehen sich, sofern nicht explizit anders angegeben, auf die in der Vorlesung vorgestellte Variante.
- Sofern nicht anders angegeben, sind alle Graphen als einfache Graphen zu verstehen.
- Die Bearbeitungszeit für die Klausur beträgt 120 Minuten.

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**Σ**
Punkte	**15**	**15**	**15**	**15**	**10**	**13**	**7**	**10**	**100**
Erreicht									

Aufgabe 1: Graphenscan (8+2+5 Punkte)

a) Betrachte den Graphen G aus Abbildung 1. Wende Breitensuche mit Startknoten v_1 auf G an und gib den resultierenden Baum in Abbildung 2 an. Falls zu einem Zeitpunkt mehrere Knoten für den nächsten Schritt in Frage kommen, wähle denjenigen mit dem kleinsten Index.

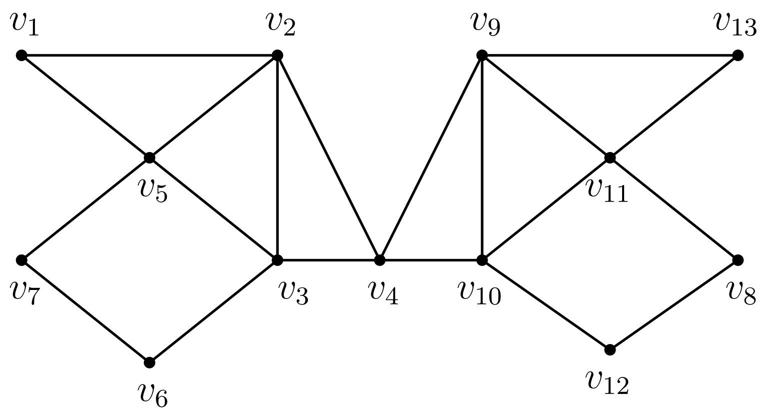

Abbildung 1: Der Graph G

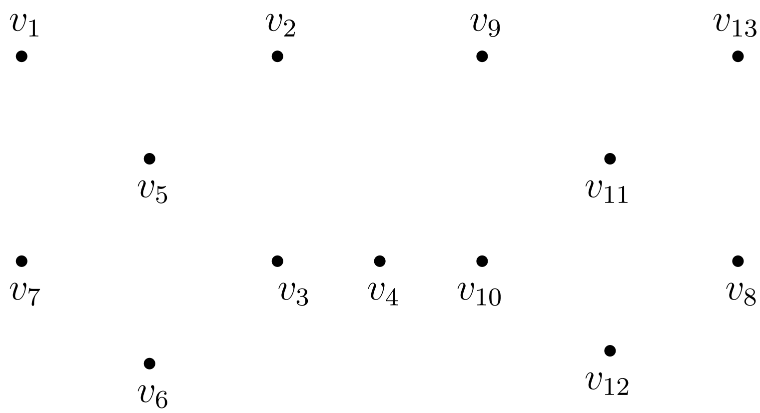

Abbildung 2: Breitensuchbaum von G

b) Welche Datenstruktur wird für Tiefensuche benutzt und welche Laufzeit besitzt Tiefensuche?

c) Zeige: Jeder zusammenhängende Graph H enthält einen Knoten v, sodass H nach Entfernen von v zusammenhängend ist.

Aufgabe 2: Dynamische Datenstrukturen **(9+2+2+2 Punkte)**

a) Füge folgende Elemente der Reihe nach in einen anfangs leeren AVL-Baum ein. Gib den Baum nach jeder Einfüge- und Restructure-Operation an.

$$6, 8, 10, 2, 4, 9, 1, 3, 11$$

b) Betrachte einen vollständigen binären Suchbaum B der Höhe h.

(i) Wie viele Knoten besitzt B insgesamt?

(ii) Wie viele Blätter besitzt B?

c) Beschreibe kurz wie in verketteten Listen in $O(1)$ Zeit ein Element eingefügt werden kann.

d) Sei $M = [12, 7, 11, 4, 6, 10, 9, 1, 3, 5, 2, 8]$ ein Max-Heap. Gib M in Baumstruktur an.

Aufgabe 3: Wachstum von Funktionen **(5+5+5 Punkte)**

a) Seien $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ Funktionen.
Zeige oder widerlege: $f(n) \in O(g(n)) \Leftrightarrow g(n) \in \Omega(f(n))$

b) Bestimme geeignete Konstanten, um zu zeigen, dass folgende Aussage korrekt ist.

$$f(n) := 4n^2 - 8n + 7 \in O(n^2)$$

c) In welcher Beziehung stehen die folgenden Klassen zueinander? Schreibe $\subset$ in das Feld, wenn Klasse A in Klasse B enthalten ist, $\supset$, wenn Klasse B in Klasse A enthalten ist, $=$, wenn die Klassen A und B übereinstimmen und $\times$, wenn dies alles nicht zutrifft. Eine Begründung ist nicht notwendig.

A	Relation	B
$O(n\log(n))$		$O(n)$
$\Omega(n)$		$\Omega(\log(n))$
$O(n\log(n))$		$\Theta(n^2)$
$O(1)$		$O(\log(n) - 3)$
$O(n\log(n))$		$\Theta(\log(n!))$

Aufgabe 4: Rekursionen **(4+2+3+3+3 Punkte)**

a) Wie lautet das Mastertheorem aus der Vorlesung?

b) Kreuze an, auf welche der folgenden rekursiven Funktionen das Mastertheorem angewendet werden kann.

$F(n) = F(n-1) + F(n-2) + 1$ ☐ wahr ☐ falsch

$H(n) = 4 \cdot H(\frac{n}{2}) + 10 \cdot H(\frac{n}{5}) + n$ ☐ wahr ☐ falsch

c) Bestimme in den Teilaufgabe jeweils mit Hilfe des Mastertheorems das asymptotische Wachstum der angegebenen rekursiven Funktion. Gib jeweils die Werte aller auftretenden Parameter an.

(i)

$$T(n) = T\left(\frac{3n}{4}\right) + 7 \cdot T\left(\frac{n}{4}\right) + 2\sqrt{n} + 7n^2$$

(ii)

$$U(n) = 125 \cdot U\left(\frac{n}{5}\right) - 21 \log n - 5 + 4n^2$$

(iii)

$$V(n) = 2 \cdot V\left(\frac{n}{2}\right) + 3 \cdot V\left(\frac{n}{3}\right) + 7n^2$$

Aufgabe 5: Mediane **(2+2+6 Punkte)**

a) Sei X eine Menge von paarweise verschiedenen natürlichen Zahlen. Wie lautet die Definition eines Rang-k Elements in X?

b) Betrachte die Menge $X = \{5, 3, 2, 100, 12, 7\}$. Bestimme folgende Elemente.

Rang-5 Element: ______________________________

Alle Mediane: ______________________________

c) Beschreibe die Schritte die benötigt werden, um das Rang-k Element in einer Menge X von paarweise verschiedenen Zahlen in $O(n)$ Zeit zu finden.
(Hinweis: Ein Korrektheitsbeweis und eine Laufzeitanalyse sind nicht erforderlich.)

Aufgabe 6: Sortieren **(6+4+3 Punkte)**

a) Sortiere das Array A aus Abbildung 3 mit dem Algorithmus MERGESORT. Gib (separat und in chronologischer Reihenfolge) das Array A nach jedem Aufruf von MERGE an. Elemente, die nicht zum im jeweiligen Mergeschritt betrachteten Teilarray gehören, müssen nicht angegeben werden. Die Aufrufe von MERGE auf einem Teilarray der Länge 1 müssen nicht angegeben werden. Nutze zur Bearbeitung der Aufgabe die in Abbildung 3 gegebene Tabelle.

$A =$	2	3	9	8	4	6	5
1. $A =$							
2. $A =$							
3. $A =$							
4. $A =$							
5. $A =$							
6. $A =$							

Abbildung 3: MERGESORT auf Array A.

b) Welche Eigenschaft erfüllt ein stabiler Sortieralgorithmus? Ist QUICKSORT in der aus der Vorlesung bekannten Version stabil? Begründe deine Antwort.

c) Welche Laufzeit besitzt QUICKSORT für n Zahlen im Worst-Case? Begründe kurz unter welchen Voraussetzungen dieser schlechteste Fall eintritt.

Aufgabe 7: Algorithmenentwurf **(7 Punkte)**

a) Gegeben sei ein binärer Suchbaum B mit Wurzelknoten r. Entwirf einen **rekursiven** Algorithmus in Pseudocode (maximal 10 Zeilen), welcher die Anzahl Knoten mit ungeradem Schlüssel ausgehend von r in $O(n)$ Zeit bestimmt.

Wir nennen die Funktion CountOdd. Ein typischer Aufruf der Funktion bekommt den Wurzelknoten mittels CountOdd(r) übergeben. Begründe außerdem kurz, warum die Laufzeit $O(n)$ eingehalten wird.

Aufgabe 8: Kurzfragen **(2+2+2+2+2 Punkte)**

Kreuze die korrekten Aussagen an. Es gibt nur Punkte für vollständig korrekt angekreuzte Teilaufgaben.

(Hinweis: In jeder Teilaufgabe ist immer mindestens eine Aussage korrekt.)

a) In einem einfachen Graphen …

- … ist die Anzahl der Knoten mit ungeradem Grad immer gerade. ☐
- … gibt es keine isolierten Knoten. ☐
- … gibt es weder doppelte Kanten noch Schleifen. ☐

b) Die Adjazenzmatrix für einen einfachen Graphen mit n Knoten und m Kanten …

- … benötigt immer $O(m)$ viel Speicherplatz. ☐
- … gibt an, welche Kanten an welchen Knoten anliegen. ☐
- … enthält auf der Diagonalen ausschließlich Nullen. ☐

c) Ein Hamiltonpfad in einem Graphen mit n Knoten…

- … besucht jeden Knoten exakt einmal. ☐
- … kann Kanten doppelt benutzen. ☐
- … besitzt genau $n - 1$ Kanten. ☐

d) MERGESORT…

- … basiert auf dem Prinzip „Teile und Herrsche“. ☐
- … ist ein vergleichsbasiertes Sortierverfahren. ☐
- … hat im Best-Case eine Laufzeit von $O(n)$. ☐

e) Wird eine Subroutine, welche die Laufzeit $O(n)$ besitzt, $O(\log n)$-mal wiederholt, so ist die asymptotische Gesamtlaufzeit…

- … unbekannt, da zunächst die absolute Laufzeit bekannt sein muss. ☐
- … $O(n)$. ☐
- … $O(n \log n)$. ☐

Viel Erfolg ☺