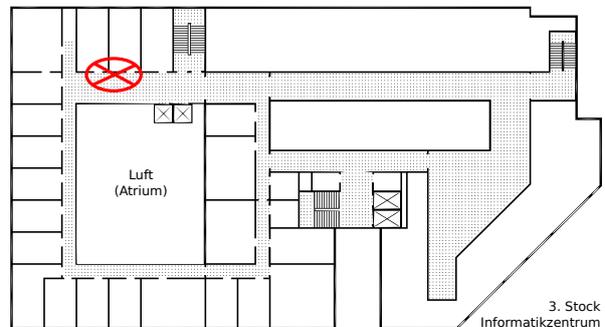


## Hausaufgabenblatt 4

Abgabe der Lösungen bis zum Montag, den 15.01.2024 um 14:00 Uhr im Hausaufgabenschrank bei Raum IZ 337 (siehe Skizze rechts). Es werden nur mit einem dokumentenechten Stift (kein Rot!) geschriebene Lösungen gewertet.

**Auf eure Abgabe unbedingt Namen, Matrikelnummer und Gruppennummer schreiben! Blätter zusammenheften!**



### Hausaufgabe 1 (Binäre Suchbäume):

(3+4+3 Punkte)

- Betrachte einen vollen (nicht zwingend vollständigen) binären Suchbaum  $T$ , in welchem kein Schlüssel doppelt vorhanden ist. Sei  $k_1$  der kleinste und  $k_2$  der größte Schlüssel in  $T$ . Wir schreiben  $P_{k_1}$  und  $P_{k_2}$  für die Menge aller Schlüssel, die im Suchbaum auf dem Weg von der Wurzel zu  $k_1$  beziehungsweise  $k_2$  liegen (Die Mengen enthalten dabei auch jeweils den Schlüssel des Wurzel- und Zielknotens).  
Zeige oder widerlege: Die Summe aller Schlüssel in  $P_{k_1}$  ist maximal so groß wie die Summe der Schlüssel in  $P_{k_2}$ .
- Zeige mit vollständiger Induktion, dass ein AVL-Baum der Höhe  $h$  mindestens  $F_{h+2} - 1$  Knoten enthält.  
(Hinweis:  $F_n$  beschreibt die  $n$ -te Fibonacci-Zahl mit  $F_0 = 0$ ,  $F_1 = 1$  und  $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ .)
- Wir nennen einen Knoten im Suchbaum *Blatt*, wenn dieser keine Kinder besitzt. Ein Knoten mit Kindern ist ein *innerer Knoten*. Sei nun  $b$  die Anzahl der Blätter in einem binären Suchbaum und  $i$  die Anzahl an inneren Knoten.  
Zeige oder widerlege: In einem vollen (nicht zwingend vollständigen) binären Suchbaum mit mindestens einem Knoten gilt  $i = b - 1$ .

### Hausaufgabe 2 (Rekursion in binären Suchbäumen):

(3 Punkte)

Gib einen *rekursiven* Algorithmus mit Laufzeit  $O(n)$  in Pseudocode mit maximal zehn Zeilen an, der als Eingabe einen binären Suchbaum  $T$  erhält. Der Algorithmus gibt zurück, wie viele durch 10 teilbare Schlüssel in  $T$  enthalten sind.

Zeige kurz, dass die Laufzeit eingehalten wird.

(Hinweis: Ein Korrektheitsbeweis ist nicht nötig. Eine Zahl  $n$  ist durch 10 teilbar, wenn  $n \bmod 10 == 0$  gilt.)

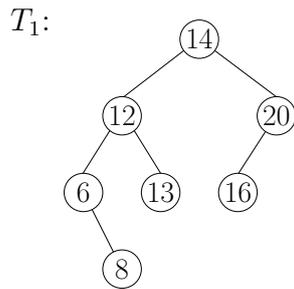
### Hausaufgabe 3 (AVL-Bäume):

(2+3+2 Punkte)

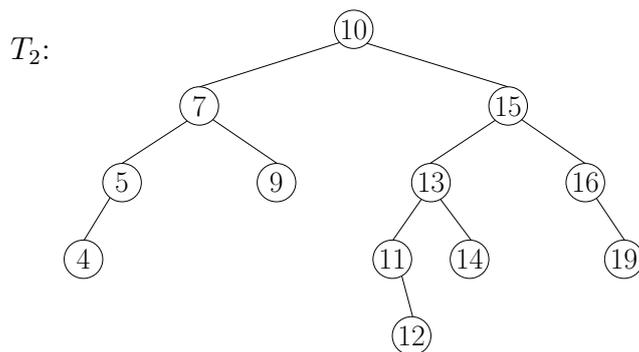
Betrachte in den Aufgabenteilen a) bis c) den Baum, der in der jeweiligen Abbildung dargestellt ist. Führe die Operation des jeweiligen Aufgabenteils und die damit verbundenen Restrukturierungsmaßnahmen zum Erhalt der AVL-Eigenschaft auf dem entsprechenden Baum aus. Zeichne dabei das Resultat nach jeder einzelnen ausgeführten Operation INSERT, DELETE und RESTRUCTURE in einen separaten Baum.

(Hinweis: AVL-Bäume werden in der Woche ab dem 18.12. in den Vorlesungen 14 und 15 sowie in Übung 4 behandelt.)

a) INSERT( $T_1, 18$ )



b) DELETE( $T_2, 9$ )



c) DELETE( $T_3, 11$ )

