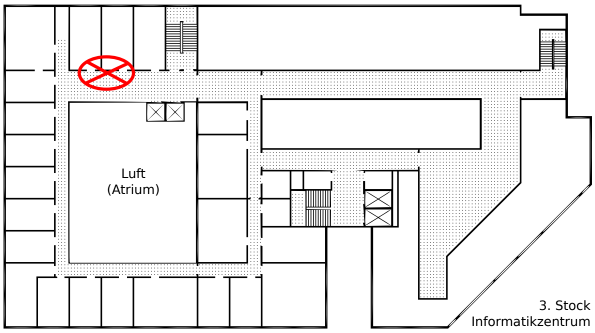
Algorithmen und Datenstrukturen **Winter 2023/24**

Prof. Dr. Sándor P. Fekete
Ramin Kosfeld
Chek-Manh Loi

Abgabe: 18.12.2023
Rückgabe: ab 08.01.2024

Hausaufgabenblatt 3

Abgabe der Lösungen bis zum Montag, den 18.12.2023 um 14:00 Uhr im Hausaufgabenschrank bei Raum IZ 337 (siehe Skizze rechts). Es werden nur mit einem dokumentenechten Stift (kein Rot!) geschriebene Lösungen gewertet.
Auf eure Abgabe unbedingt Namen, Matrikelnummer und Gruppennummer schreiben! Blätter zusammenheften!



Hausaufgabe 1 (Durchmesser von Graphen): **(3+4+4 Punkte)**

Distanzen spielen in der Graphentheorie eine sehr große Rolle. In dieser Aufgabe wollen wir einen Algorithmus entwerfen, der den *Durchmesser* eines Graphen bestimmt, d.h. die maximale kürzeste Distanz zwischen zwei Knoten. Dazu definieren wir folgendes.

- Die *Distanz* $\mathrm{dist}(v, w)$ zwischen zwei Knoten $v, w \in V$ in einem Graphen G ist die Anzahl an Kanten auf einem kürzesten Weg zwischen v und w in G. Gibt es keinen Weg zwischen v und w, so ist $\mathrm{dist}(v, w) = \infty$.
- Die *Exzentrizität* $\mathrm{ex}(v)$ eines Knotens $v \in V$ bezeichnet die Länge eines kürzesten Pfades zu dem am weitesten entfernten Knoten, d.h. $\mathrm{ex}(v) := \max_{w \in V} (\mathrm{dist}(v, w))$.
- Der *Durchmesser* $\mathrm{diam}(G)$ eines Graphen G entspricht dem Maximum über die Exzentrizitäten, d.h. $\mathrm{diam}(G) := \max_{v \in V} (\mathrm{ex}(v))$.

a) Betrachte den in Abbildung 1 abgebildeten Graphen H. Gib folgende Punkte an:

   (i) $\mathrm{ex}(v_1)$ und $\mathrm{ex}(v_7)$.

   (ii) $\mathrm{diam}(H)$

   (iii) Menge $V' \subseteq V$ an Knoten, sodass $\mathrm{ex}(w) = \mathrm{diam}(H)$ für alle $w \in V'$ gilt.

b) Aus der Vorlesung ist Algorithmus 3.17 bekannt (siehe Vorlesung vom 06.12.23), der für jeden Knoten $w \in V$ die kürzeste Distanz zu einem Knoten $v \in V$ bestimmt.

   Entwirf einen Algorithmus Exzentrizität in Pseudocode (maximal 10 Zeilen[1]) mit Laufzeit $O(n + m)$, der für einen gegebenen Graphen G und Knoten $v \in V$ den Wert $\mathrm{ex}(v)$ bestimmt. Begründe kurz, warum die Laufzeit eingehalten wird.

[1] end while, end if, etc. werden dabei nicht mitgezählt.

c) Entwirf einen Algorithmus DURCHMESSER in Pseudocode (maximal 10 Zeilen[1]) mit Laufzeit $O(n^2 + nm)$, der für einen gegebenen Graphen G den Wert $\mathrm{diam}(G)$ bestimmt. Begründe kurz, warum die Laufzeit eingehalten wird.

(Hinweis: Aus der Vorlesung bekannte Algorithmen sowie in vorangegangenen Aufgabenteilen entwickelte Algorithmen können als Subroutine genutzt werden. Ein Korrektheitsbeweis für die Algorithmen ist nicht erforderlich.)

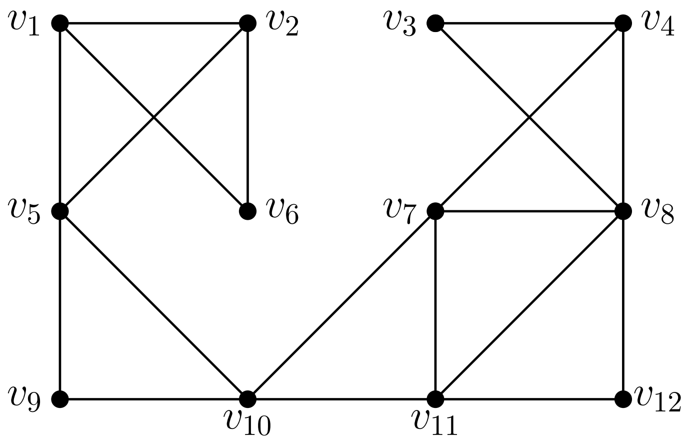


Abbildung 1: Darstellung des Graphen H.

Hausaufgabe 2 (Asymptotisches Wachstum): **(3+3+3 Punkte)**

a) Bestimme geeignete Konstanten, um zu zeigen, dass

$f(n) := 5n^4 + 2n^2 - 9n + 7 \in \Theta(n^4)$.

b) Betrachte die Funktionen $f, g, h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.
Zeige oder widerlege:

$$f(n) \in \Theta(g(n)) \text{ und } g(n) \in \Omega(h(n)) \implies f(n) \in \Theta(h(n))$$

c) In welcher Beziehung stehen die folgenden Klassen zueinander? Schreibe $\subsetneq$ in das Feld, wenn Klasse A in Klasse B enthalten ist (aber $A \neq B$), $\supsetneq$, wenn Klasse B in Klasse A enthalten ist (aber $A \neq B$), $=$, wenn die Klassen A und B übereinstimmen und $\times$, wenn dies alles nicht zutrifft. Eine Begründung ist nicht notwendig.

A	Relation	B
$\Theta(n - \log n)$		$\Theta(n)$
$\Omega(\sqrt{n})$		$\mathcal{O}(n^{0.5} + n^{0.5})$
$\Omega(n \log n)$		$\Theta(1)$
$\Theta(n \log n)$		$\Theta(n^2 \log n)$
$\mathcal{O}\left(\frac{n}{\log n}\right)$		$\mathcal{O}(n)$
$\Omega(\frac{(n-1)n}{2})$		$\Omega((n+1)^2)$