



Technische  
Universität  
Braunschweig



# Algorithmen und Datenstrukturen – Übung #8

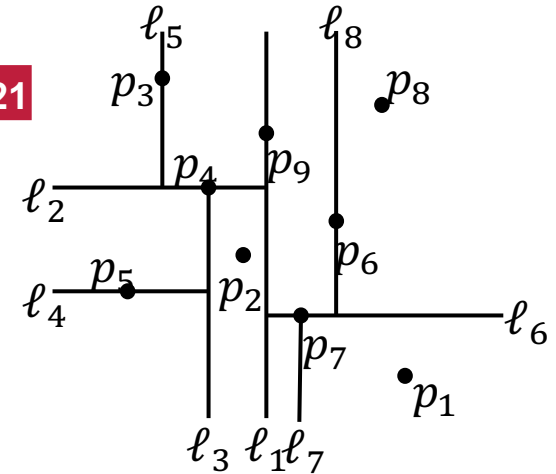
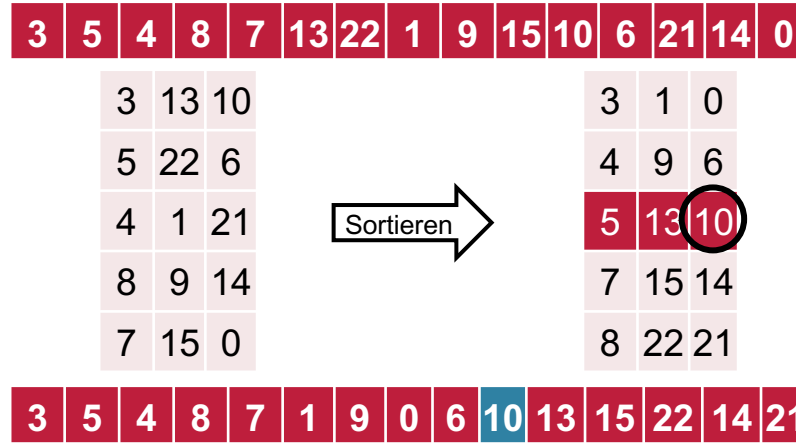
Quicksort, Mediane, kd-Bäume

Arne Schmidt

02.02.23

# Heute

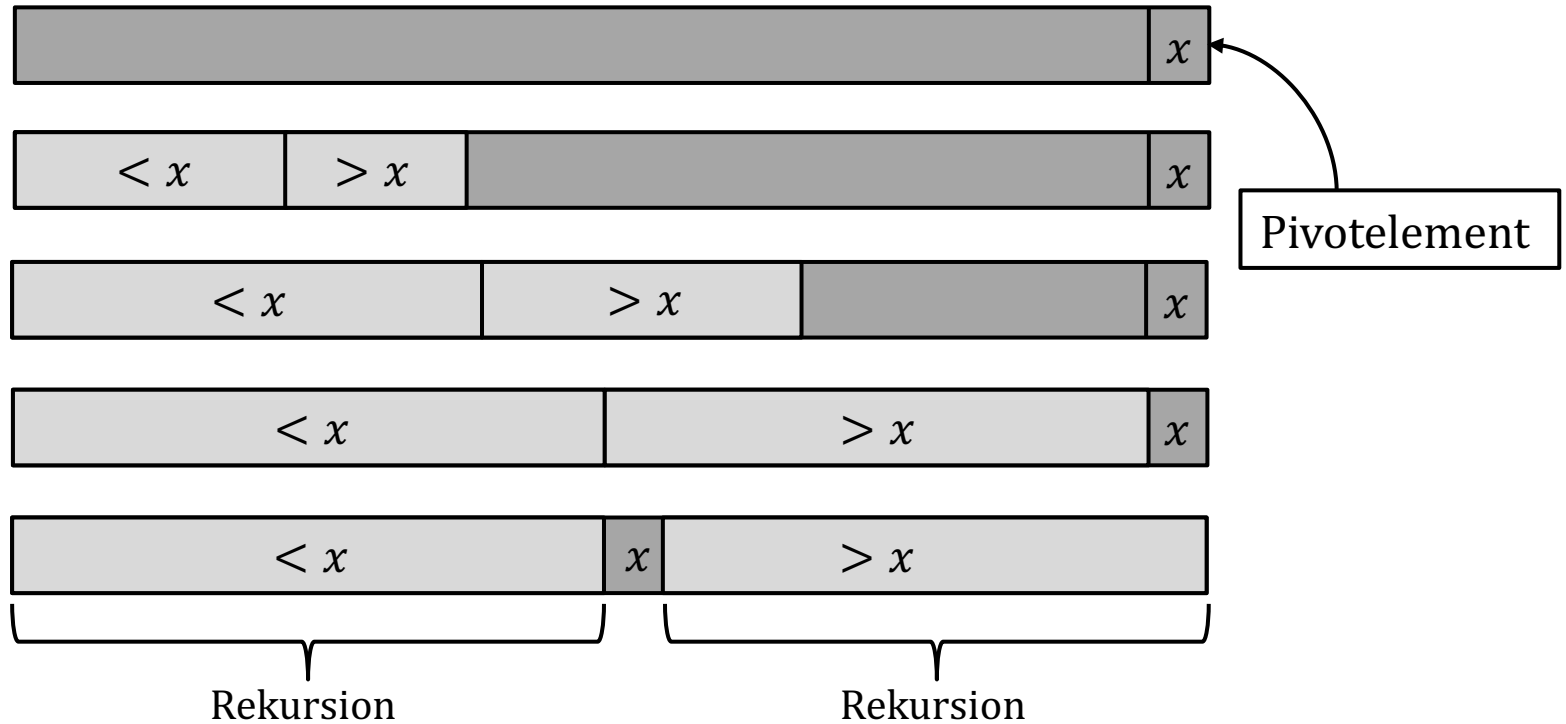
- Quicksort
- Mediane
  - Algorithmus
  - Laufzeit
- kd-Trees



# Bisherige Sortierverfahren

Algorithmus	Laufzeit	Idee
Mergesort	$O(n \log n)$	Sortiere Teilarrays und merge sie. Beginne mit kleinstem Teilarray (z.B. der Größe 1)
Quicksort	$O(n^2)$	Pivotisiere und sortiere rekursiv auf beiden Teilarrays weiter.
Radixsort	$O(d(n + k))$	Sortiere Zahlen iterativ nach $d$ Ziffern mit Werten 1 bis $k$ .
Bubblesort (P-Blatt 4)	$O(n^2)$	Iteriere $n$ -mal über das Array und vertausche falschstehende benachbarte Objekte.
Selectionsort	$O(n^2)$	Setze das $i$ -t kleinste Element in der $i$ -ten Iteration an die $i$ -te Stelle
Insertionsort	$O(n^2)$	Setze das $i$ -te Element des Arrays in $A[1] \dots A[i]$ an die richtige Stelle.

# Quicksort – Prinzip



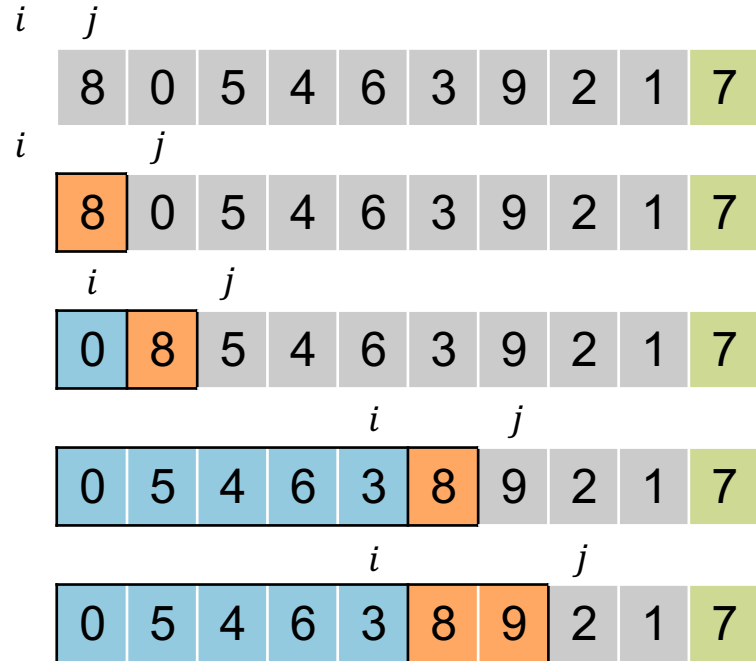
# Quicksort – Partition

## Pivotelement $x$

Letztes Element im Array

## Zwei Zeiger

- $i$ : Letzte Position mit Zahlen  $< x$
- $j$ : Erste Position mit nicht verglichenen Elementen



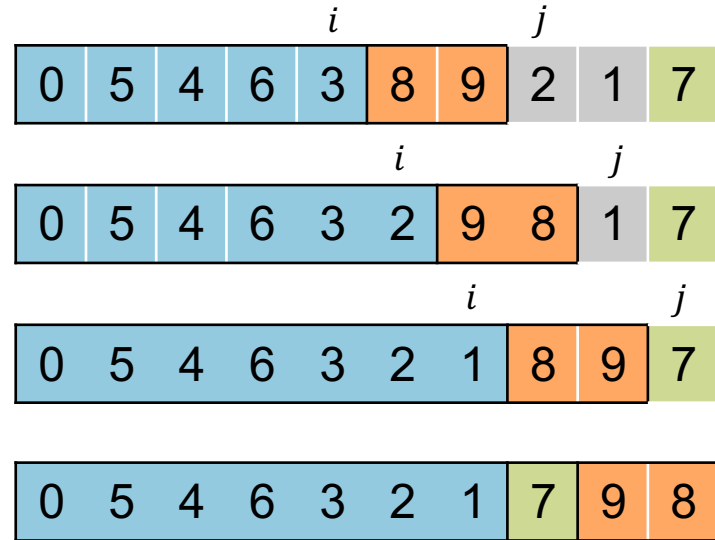
# Quicksort – Partition

## Pivotelement $x$

Letztes Element im Array

## Zwei Zeiger

- $i$ : Letzte Position mit Zahlen  $< x$
- $j$ : Erste Position mit nicht verglichenen Elementen



# Quicksort – Laufzeit

	Best-Case	Average-Case	Worst-Case
Quicksort	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n^2)$

Rekursionsgleichung Worst-Case:

$$T(n) = T(n - 1) + \Theta(n) \Rightarrow T(n) \in \Theta\left(\sum_{i=1}^n i\right) = \Theta(n^2)$$

Rekursionsgleichung Best-Case:

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n) \Rightarrow T(n) \in \Theta(n \log n)$$

# Mediane



# Mediane – Definition

Rang- $k$  Element  $m$  in  $X$ :

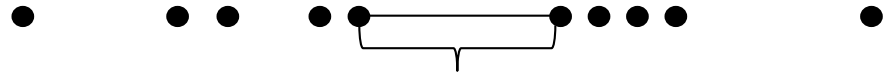
$$|\{x \in X: x \leq m\}| \geq k$$

$$|\{x \in X: x \geq m\}| \geq n - k + 1$$

Für einen Median  $m$  in  $X$  gilt:

$$|\{x \in X: x < m\}| \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

$$|\{x \in X: x > m\}| \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$



Jeder Punkt in diesem Bereich ist ein Median!

Bei  $X = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$  sind sowohl 4 als auch 5 ein Median.

# Mediane – Definition

Rang- $k$  Element  $m$  in  $X$ :

$$|\{x \in X: x \leq m\}| \geq k$$

$$|\{x \in X: x \geq m\}| \geq n - k + 1$$

Für einen Median  $m$  in  $X$  gilt:

$$|\{x \in X: x < m\}| \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

$$|\{x \in X: x > m\}| \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

Bei  $X = \{1,3,5,7,9\}$  ist die 5 der Median und 5 der Durchschnitt.

Bei  $X = \{1,3,5,7,984\}$  ist die 5 der Median und 200 der Durchschnitt.

Der Median  $m$  minimiert

$$\sum_{x \in X} |x - m|$$

Der Durchschnitt  $D$  minimiert

$$\sum_{x \in X} (x - D)^2$$

# Mediane – Algorithmus (I)

## Naive Idee

Sortieren und das Element an der  $k$ -ten Stelle ausgeben

Laufzeit:  $\Theta(n \log n)$

Geht das besser?

## Nutze das Prinzip von Quicksort

Pivotisiere und arbeite rekursiv auf **einem** Teil weiter

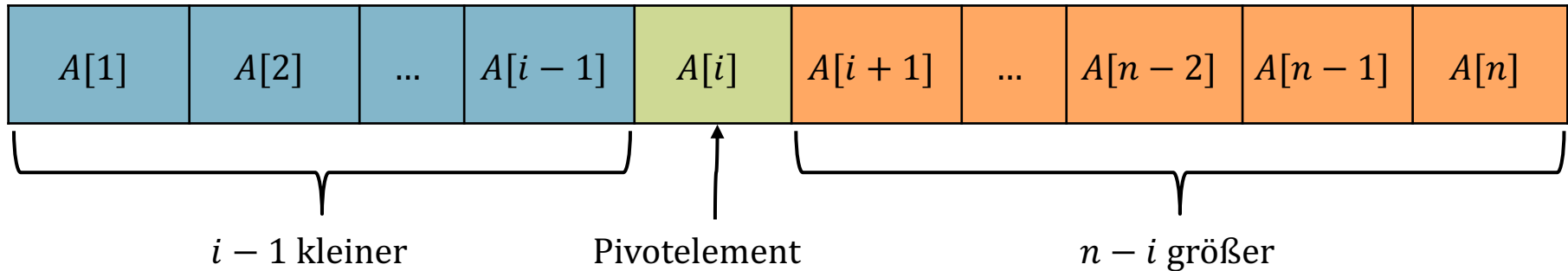
Dazu stellen sich die Fragen:

1. Auf welchem Teilarray geht es weiter?
2. Ist das schneller als  $\Theta(n \log n)$ ?

# Mediane – Algorithmus (II)

1. Auf welchem Teilarray geht es weiter?

Nach Pivotisierung:



## 3 Fälle:

1. Falls  $k < i$ , suche im linken Teilarray nach dem  $k$ -ten Element.
2. Falls  $k = i$ , dann haben wir das  $k$ -te Element gefunden!
3. Falls  $k > i$ , suche im rechten Teilarray nach dem  $(k - i)$ -ten Element.

# Mediane – Algorithmus (III)

2. Ist das schneller als  $\Theta(n \log n)$ ?

Wie bei Quicksort kann größeres Teilarray  $n - 1$  Elemente enthalten. Dadurch Laufzeit  $\Omega(n^2)$

**Idee:** Wähle besseres Pivotelement

1. Teile Zahlen in 5er Gruppen
2. Bestimme Median in jeder Gruppe
3. Bestimme Median der Mediane  $m$
4. Benutze  $m$  als Pivotelement

3 5 4 8 7 13 22 1 9 15 10 6 21 14 0

3	13	10
5	22	6
4	1	21
8	9	14
7	15	0

Sortieren

3	1	0
4	9	6
5	13	10
7	15	14
8	22	21

3 4 5 7 8 1 9 0 6 10 13 15 22 14 21

# Mediane – Analyse

Wie viele Zahlen gibt es, die größer/kleiner als  $m$  sind?

Sortiere die  $t$  5er Gruppen **gedanklich** nach deren Median

$\leq m$	$\leq m$	$\leq m$	$\leq m$	$m$	$\geq m$	$\geq m$	$\geq m$	$\geq m$	$\geq m$

# Mediane – Analyse

Wie viele Zahlen gibt es, die größer/kleiner als  $m$  sind?

Sortiere die  $t$  5er Gruppen **gedanklich** nach deren Median

$\leq m$	$\leq m$	$\leq m$	$\leq m$	$\leq m$					
$\leq m$	$\leq m$	$\leq m$	$\leq m$	$\leq m$					
$\leq m$	$\leq m$	$\leq m$	$\leq m$	$m$	$\geq m$	$\geq m$	$\geq m$	$\geq m$	$\geq m$

Der rote Bereich enthält nur Elemente, die höchstens  $m$  sind. Wie viele sind das?

# Mediane – Analyse

$\leq m$	$\leq m$	$\leq m$	$\leq m$	$\leq m$					
$\leq m$	$\leq m$	$\leq m$	$\leq m$	$\leq m$					
$\leq m$	$\leq m$	$\leq m$	$\leq m$	$m$	$\geq m$	$\geq m$	$\geq m$	$\geq m$	$\geq m$

Der rote Bereich enthält nur Elemente, die höchstens  $m$  sind. Wie viele sind das?

Nehmen wir an wir haben  $t$  Gruppen, so ist der Median  $m$  in der  $\lceil \frac{t}{2} \rceil$ -ten Gruppe.

Bei 5er Gruppen, sind pro Gruppe mindestens 3 Elemente  $\leq m$ .

Entsprechend gibt es mindestens  $3 \cdot \lceil \frac{t}{2} \rceil$  viele Elemente  $\leq m$ .

Damit gibt es maximal  $n - 3 \cdot \lceil \frac{t}{2} \rceil \leq n - \frac{3}{2}t \leq n - \frac{3}{2} \cdot \frac{n}{5} = \frac{7}{10}n$  Elemente größer als  $m$ .

Analog: Maximal  $\frac{7}{10}n$  Elemente kleiner als  $m$ .



# Mediane - Laufzeit

Wir haben also als Laufzeit:

$$T(n) = T\left(\frac{1}{5}n\right) + T\left(\frac{7}{10}n\right) + \Theta(n)$$

Bestimmung Median  
der Mediane

Rekursion in  
linke/rechte Teilhälfte

Aufteilen in Gruppen/  
Pivotisieren/  
...

# Mediane - Laufzeit

$$T(n) = T\left(\frac{1}{5}n\right) + T\left(\frac{7}{10}n\right) + \Theta(n)$$

## Mastertheorem

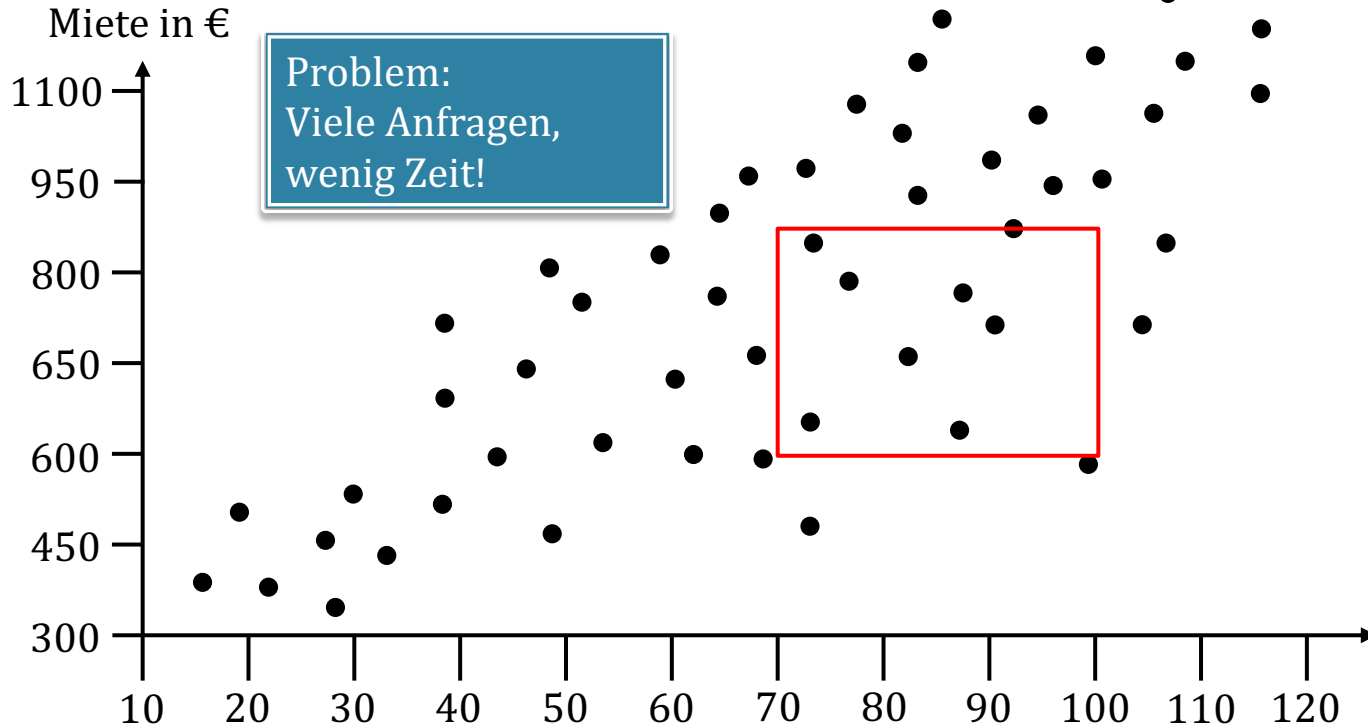
$$m = 2, \quad k = 1, \quad \alpha_1 = \frac{1}{5}, \quad \alpha_2 = \frac{7}{10}$$

$$\sum_{i=1}^2 \alpha_i^1 = \left(\frac{1}{5}\right)^1 + \left(\frac{7}{10}\right)^1 = \frac{2}{10} + \frac{7}{10} = \frac{9}{10} < 1 \rightarrow \text{Fall 1}$$

$$\Rightarrow T(n) \in \Theta(n)$$

# kd-Bäume

# Motivation – Die Wohnungssuche



Suche Wohnung:  
Maximal 875€  
Mindestens 600€  
Maximal 100m<sup>2</sup>  
Mindestens 70m<sup>2</sup>

Gib alle Wohnungen  
im roten Quadrat aus!

Naive Lösung:  
Teste für jeden Punkt,  
ob er im Quadrat liegt.

# kd-Bäume – Konstruktion/Preprocessing

Idee: Konstruiere binären Suchbaum. Suche dabei abwechselnd nach  $x$ - und  $y$ -Koordinate.

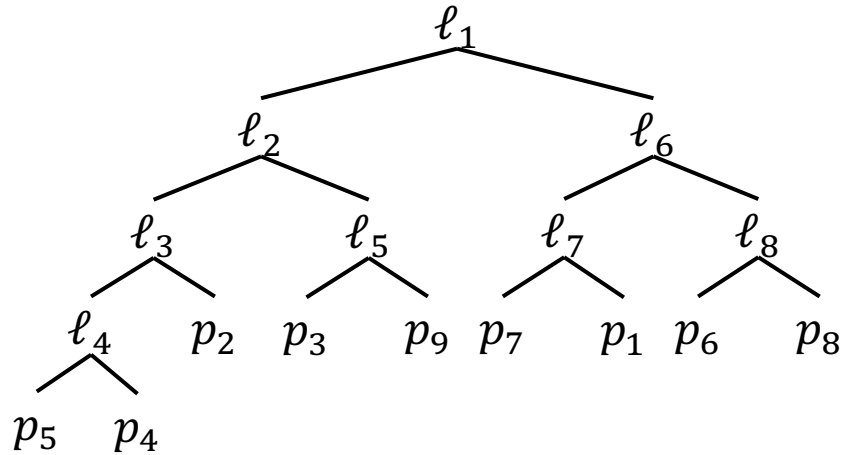
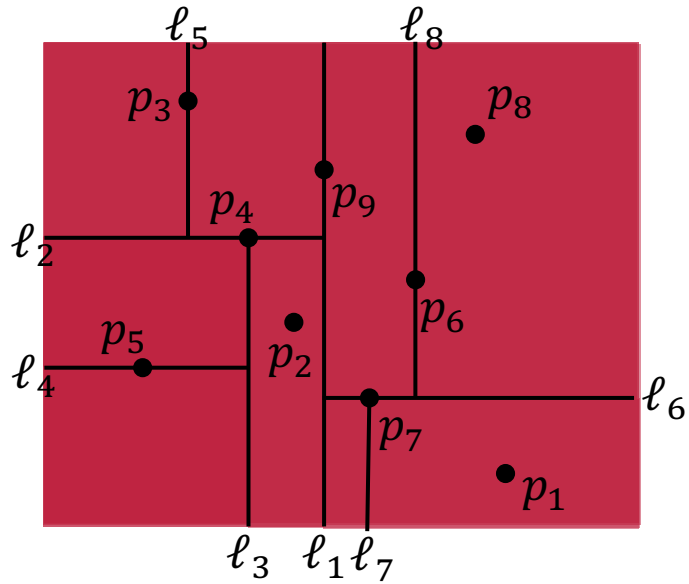
## Algorithmus BUILDKDTREE

Eingabe: Punktmenge  $P$ , Rekursionstiefe  $depth$

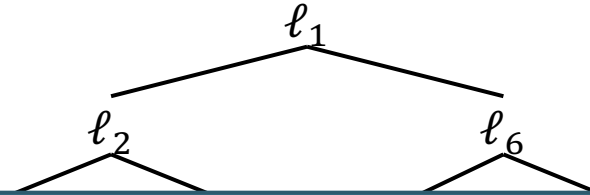
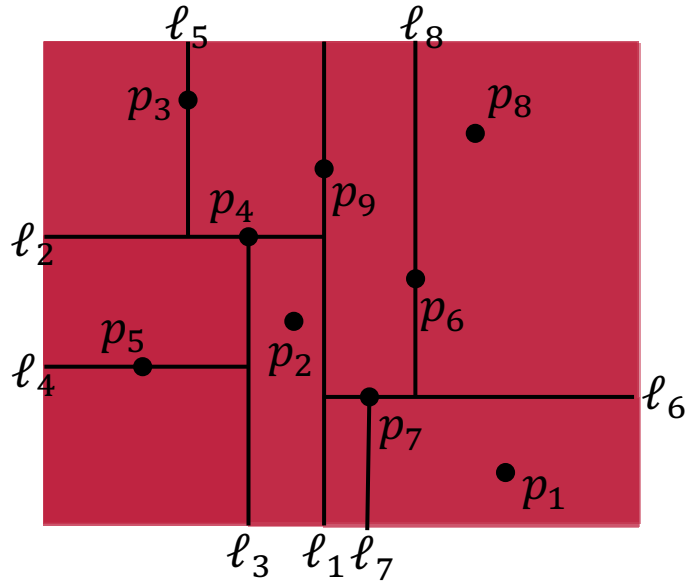
Ausgabe: Wurzel eines k-d-Baums

1. **if** ( $|P| = 1$ )
2.     **return** Blatt mit diesem Punkt
3. **else if** ( $depth$  ist gerade)
4.     Teile in zwei Teilmengen  $P_1 (\leq \ell)$  und  $P_2 (> \ell)$  an vertikaler Median-Linie  $\ell$
5. **else**
6.     Teile in zwei Teilmengen  $P_1 (\leq \ell)$  und  $P_2 (> \ell)$  an horizontaler Median-Linie  $\ell$
7.     Setze  $v_{left} := \text{BUILDKDTREE}(P_1, depth+1)$
8.     Setze  $v_{right} := \text{BUILDKDTREE}(P_2, depth+1)$
9.     Erzeuge Knoten  $v$  für  $\ell$  mit  $v_{left}$  und  $v_{right}$  als Kinderknoten
10. **return**  $v$

# kd-Bäume - Beispiel



# kd-Bäume - Beispiel



Laufzeit des Algorithmus ist  $O(n \log n)$

*Beweis*

- (1) Median-Linien können in  $O(n)$  Zeit gefunden werden.
- (2) Rekursionsgleichung für die Laufzeit ist also

$$T(n) = O(n) + 2T\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right)$$

Nach Mastertheorem ist das  $O(n \log n)$ .

# kd-Bäume – Search Query

## Algorithmus SEARCHKDTREE

Eingabe: Wurzel  $v$  eines (Teil-)baums, Rechteck  $R$

Ausgabe: Knoten unterhalb  $v$ , die in  $R$  liegen

1. **if** ( $v$  ist ein Blatt)
2.     Gib  $v$  aus, falls  $v$  in  $R$
3. **else**
4.     **if** (Region( $l(v)$ ) ganz in  $R$ )
5.         REPORTSUBTREE( $l(v)$ )
6.     **else if** (Region( $l(v)$ ) schneidet  $R$ )
7.         SEARCHKDTREE( $l(v)$ ,  $R$ )
8.     **if** (Region( $r(v)$ ) ganz in  $R$ )
9.         REPORTSUBTREE( $r(v)$ )
10.    **else if** (Region( $r(v)$ ) schneidet  $R$ )
11.         SEARCHKDTREE( $r(v)$ ,  $R$ )



# kd-Bäume – Search Query

Laufzeit ist  $O(\sqrt{n} + x)$ , wobei  $x$  die Anzahl an ausgegebenen Elementen ist.

Das nennt sich *output-sensitive*, d.h. die Laufzeit ist von der Größe des Outputs abhängig.

*Beweisidee:*

Wie viele *geschnittene* Regionen müssen betrachtet werden? Man kann die Rekursionsgleichung aufstellen:

$$Q(n) = 2 + 2Q\left(\frac{n}{4}\right).$$

Also  $Q(n) \in O(\sqrt{n})$ . So viele Elemente können geprüft werden, die nicht in  $R$  liegen. Die  $O(x)$  sind die Elemente in  $R$ .

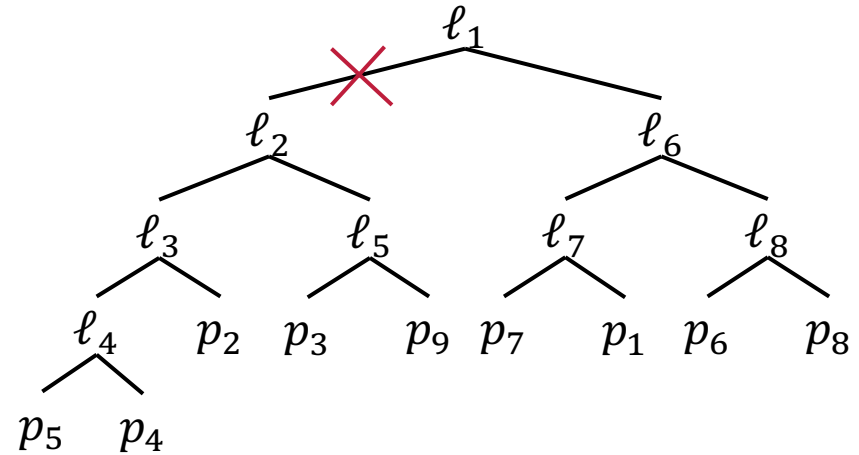
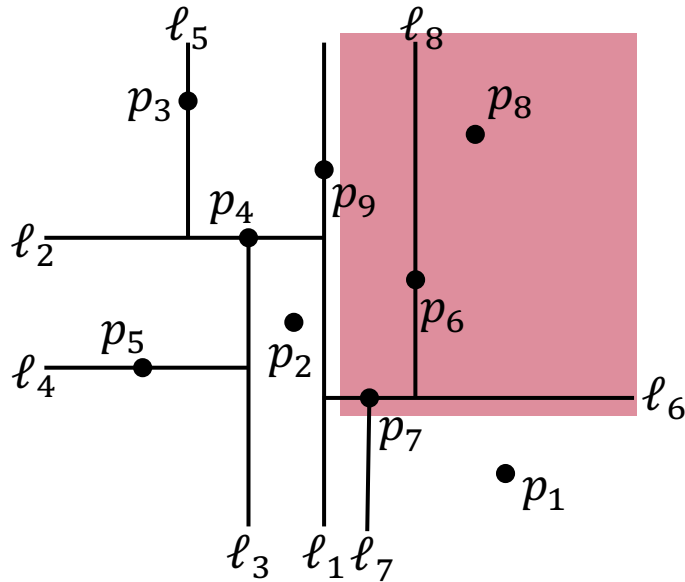
## Algorithmus SEARCHKDTREE

Eingabe: Wurzel  $v$  eines (Teil-)baums, Rechteck  $R$

Ausgabe: Knoten unterhalb  $v$ , die in  $R$  liegen

1. **if** ( $v$  ist ein Blatt)
2.     Gib  $v$  aus, falls  $v$  in  $R$
3. **else**
4.     **if** (Region( $l(v)$ ) ganz in  $R$ )
5.         REPORTSUBTREE( $l(v)$ )
6.     **else if** (Region( $l(v)$ ) schneidet  $R$ )
7.         SEARCHKDTREE( $l(v)$ ,  $R$ )
8.     **if** (Region( $r(v)$ ) ganz in  $R$ )
9.         REPORTSUBTREE( $r(v)$ )
10.    **else if** (Region( $r(v)$ ) schneidet  $R$ )
11.         SEARCHKDTREE( $r(v)$ ,  $R$ )

# kd-Bäume - Beispiel



Welche Punkte liegen im Rechteck?

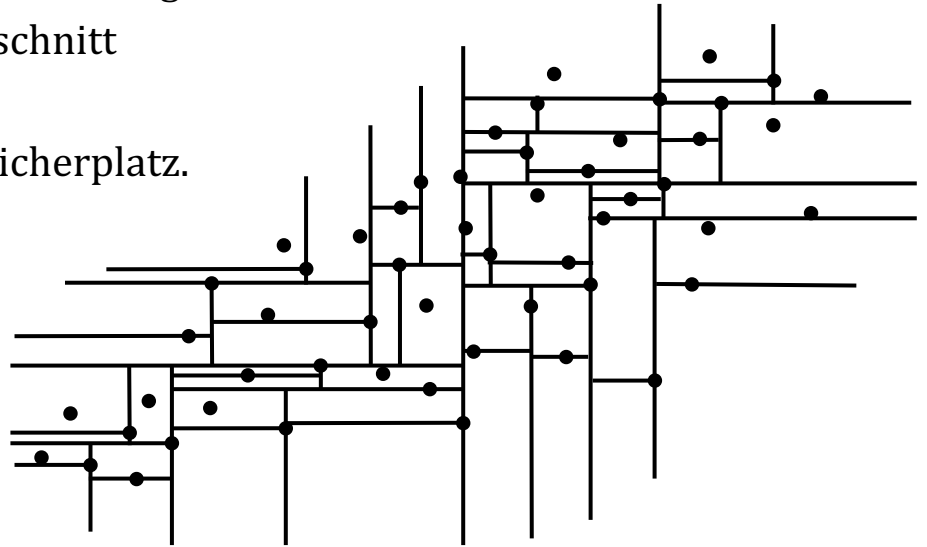
Antwort:  $p_7$   $p_6$   $p_8$

# kd-Bäume – Höhere Dimensionen

Bisher nur 1D und 2D betrachtet. Laufzeiten für  $k \geq 2$  Dimensionen:

- BuildKDTree:  $O(n \log n)$
- SearchKDTree:  $O(n^{1-\frac{1}{k}} + x)$ , um  $x$  Elemente auszugeben
- FindNearestNeighbor:  $O(\log n)$  im Durchschnitt

Weiterer Vorteil: Sie benötigen nur  $O(n)$  Speicherplatz.



# Klausur

# Klausurinformationen

## Tag:

03.03.2023

## Zeit:

zwischen 10:30  
Uhr und 13:30  
Uhr

(Dauer 2  
Stunden)

## Raum:

wird am  
02.03.2023  
bekanntgegeben

## Mitbringen:

Studenausweis,  
Stift (blauer /  
schwarzer  
Kugelschreiber)

# Klausurvorbereitung

## Tutoren (Sprechstunde):

Fragen an die  
Tutoren  
(wenig Plätze)

## Skript:

Gutes  
unterstützendes  
Material

## Alte Klausuren:

Guter Überblick,  
was zu erwarten  
ist

## Training!

Hausaufgaben,  
Kopfrechnen, ...

# Klausureinsicht (voraussichtlich)

**Zeit:**

Mo. 13.03.  
13-15 Uhr

**Raum:**

IZ 313