



Technische
Universität
Braunschweig



Algorithmen und Datenstrukturen – Übung #8

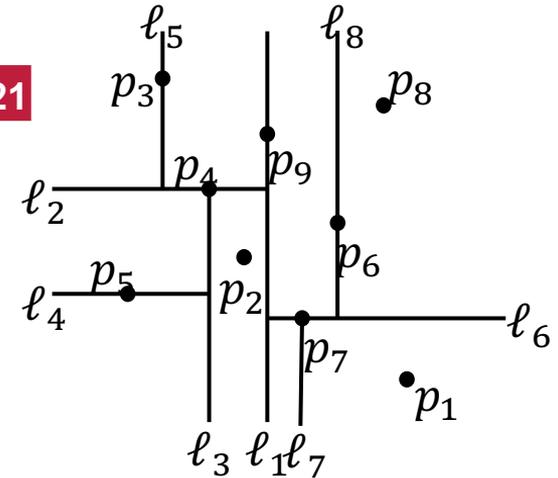
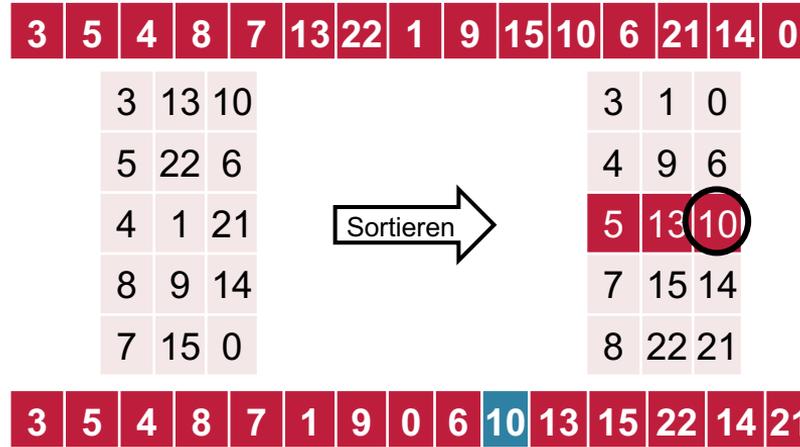
Quicksort, Mediane, kd-Bäume

Arne Schmidt

02.02.23

Heute

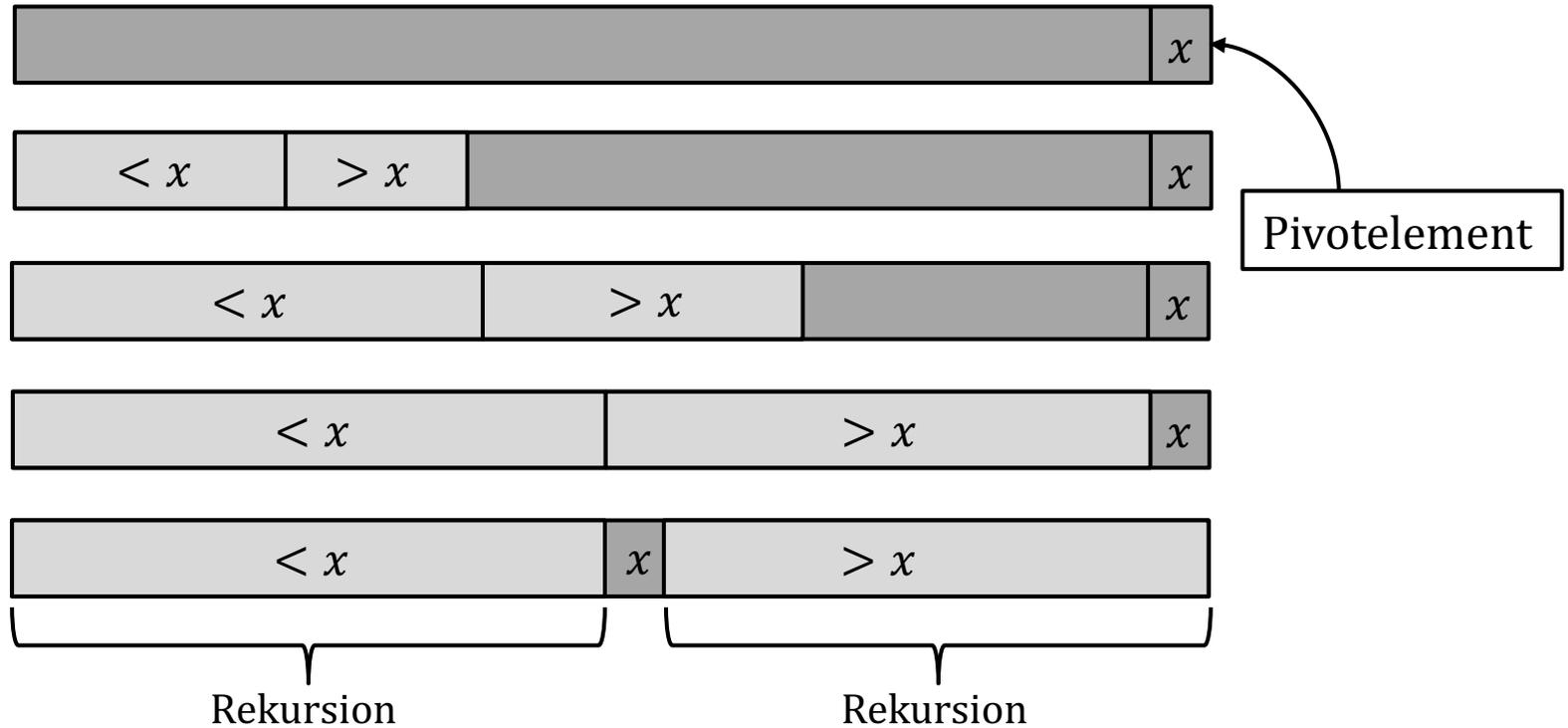
- Quicksort
- Mediane
 - Algorithmus
 - Laufzeit
- kd-Trees



Bisherige Sortierverfahren

Algorithmus	Laufzeit	Idee
Mergesort	$O(n \log n)$	Sortiere Teilarrays und merge sie. Beginne mit kleinstem Teilarray (z.B. der Größe 1)
Quicksort	$O(n^2)$	Pivotisiere und sortiere rekursiv auf beiden Teilarrays weiter.
Radixsort	$O(d(n + k))$	Sortiere Zahlen iterativ nach d Ziffern mit Werten 1 bis k .
Bubblesort (P-Blatt 4)	$O(n^2)$	Iteriere n -mal über das Array und vertausche falschstehende benachbarte Objekte.
Selectionsort	$O(n^2)$	Setze das i -t kleinste Element in der i -ten Iteration an die i -te Stelle
Insertionsort	$O(n^2)$	Setze das i -te Element des Arrays in $A[1] \dots A[i]$ an die richtige Stelle.

Quicksort – Prinzip



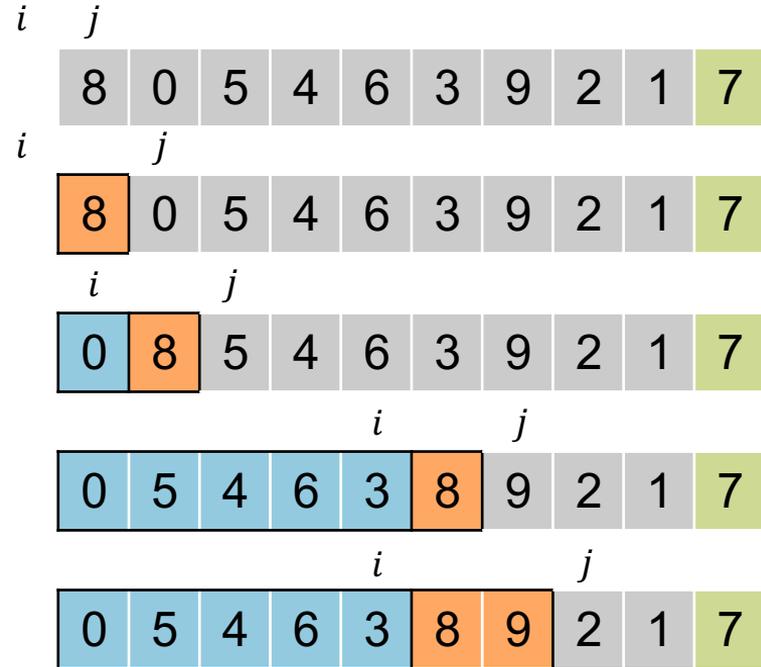
Quicksort – Partition

Pivotelement x

Letztes Element im Array

Zwei Zeiger

- i : Letzte Position mit Zahlen $< x$
- j : Erste Position mit nicht verglichenen Elementen



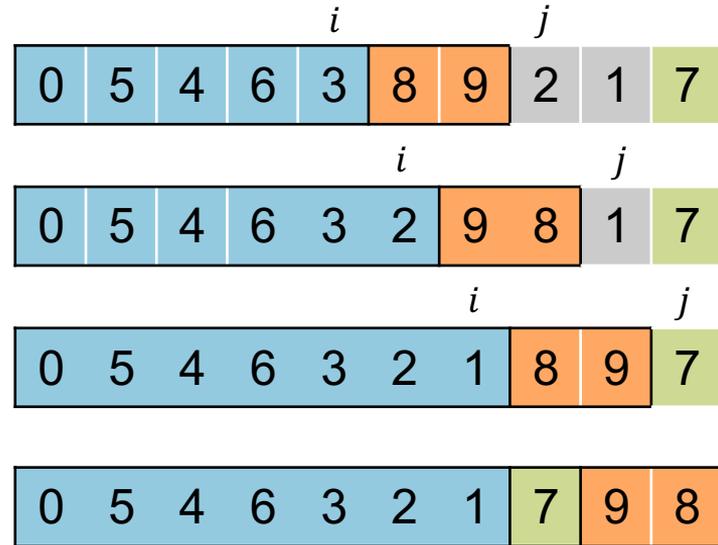
Quicksort – Partition

Pivotelement x

Letztes Element im Array

Zwei Zeiger

- i : Letzte Position mit Zahlen $< x$
- j : Erste Position mit nicht verglichenen Elementen



Quicksort – Laufzeit

	Best-Case	Average-Case	Worst-Case
Quicksort	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n^2)$

Rekursionsgleichung Worst-Case:

$$T(n) = T(n - 1) + \Theta(n) \Rightarrow T(n) \in \Theta\left(\sum_{i=1}^n i\right) = \Theta(n^2)$$

Rekursionsgleichung Best-Case:

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n) \Rightarrow T(n) \in \Theta(n \log n)$$

Mediane

Mediane – Definition

Rang- k Element m in X :

$$|\{x \in X: x \leq m\}| \geq k$$

$$|\{x \in X: x \geq m\}| \geq n - k + 1$$

Für einen Median m in X gilt:

$$|\{x \in X: x < m\}| \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

$$|\{x \in X: x > m\}| \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$



Jeder Punkt in diesem Bereich ist ein Median!

Bei $X = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ sind sowohl 4 als auch 5 ein Median.

Mediane – Definition

Rang- k Element m in X :

$$|\{x \in X: x \leq m\}| \geq k$$

$$|\{x \in X: x \geq m\}| \geq n - k + 1$$

Für einen Median m in X gilt:

$$|\{x \in X: x < m\}| \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

$$|\{x \in X: x > m\}| \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

Bei $X = \{1,3,5,7,9\}$ ist die 5 der Median und 5 der Durchschnitt.

Bei $X = \{1,3,5,7,984\}$ ist die 5 der Median und 200 der Durchschnitt.

Der Median m minimiert

$$\sum_{x \in X} |x - m|$$

Der Durchschnitt D minimiert

$$\sum_{x \in X} (x - D)^2$$

Mediane – Algorithmus (I)

Naive Idee

Sortieren und das Element an der k -ten Stelle ausgeben

Laufzeit: $\Theta(n \log n)$

Geht das besser?

Nutze das Prinzip von Quicksort

Pivotisiere und arbeite rekursiv auf **einem** Teil weiter

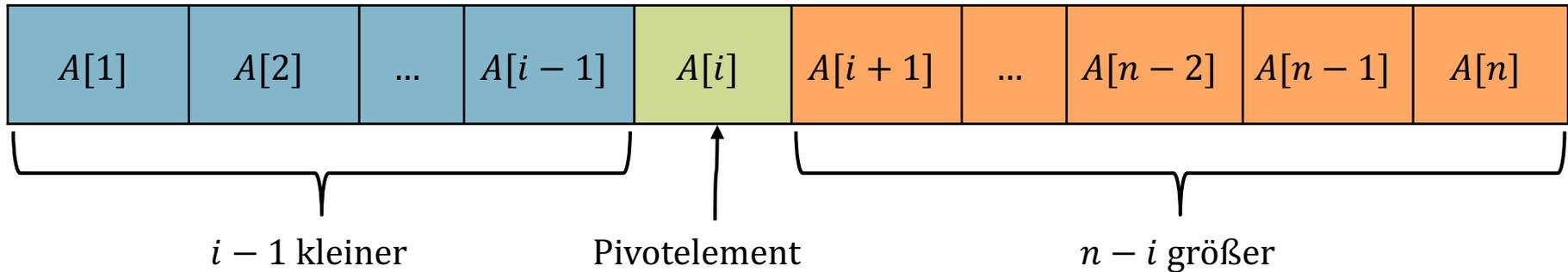
Dazu stellen sich die Fragen:

1. Auf welchem Teilarray geht es weiter?
2. Ist das schneller als $\Theta(n \log n)$?

Mediane – Algorithmus (II)

1. Auf welchem Teilarray geht es weiter?

Nach Pivotisierung:



3 Fälle:

1. Falls $k < i$, suche im linken Teilarray nach dem k -ten Element.
2. Falls $k = i$, dann haben wir das k -te Element gefunden!
3. Falls $k > i$, suche im rechten Teilarray nach dem $(k - i)$ -ten Element.

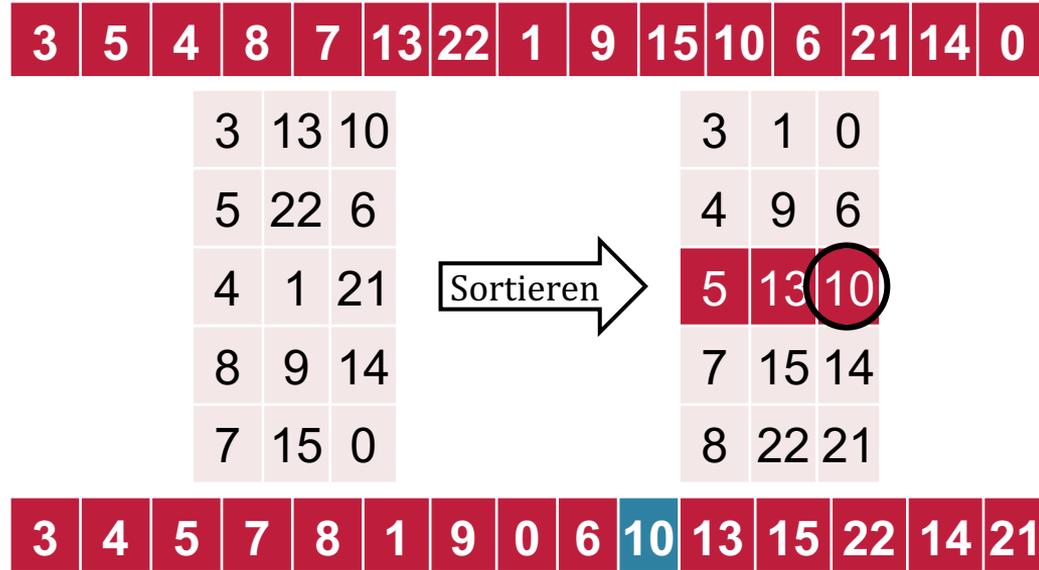
Mediane – Algorithmus (III)

2. Ist das schneller als $\Theta(n \log n)$?

Wie bei Quicksort kann größeres Teilarray $n - 1$ Elemente enthalten. Dadurch Laufzeit $\Omega(n^2)$

Idee: Wähle besseres Pivotelement

1. Teile Zahlen in 5er Gruppen
2. Bestimme Median in jeder Gruppe
3. Bestimme Median der Mediane m
4. Benutze m als Pivotelement



Mediane – Analyse

Wie viele Zahlen gibt es, die größer/kleiner als m sind?

Sortiere die t 5er Gruppen **gedanklich** nach deren Median

$\leq m$	$\leq m$	$\leq m$	$\leq m$	m	$\geq m$				

Mediane – Analyse

Wie viele Zahlen gibt es, die größer/kleiner als m sind?

Sortiere die t 5er Gruppen **gedanklich** nach deren Median

$\leq m$									
$\leq m$									
$\leq m$	$\leq m$	$\leq m$	$\leq m$	m	$\geq m$				

Der rote Bereich enthält nur Elemente, die höchstens m sind. Wie viele sind das?

Mediane – Analyse

$\leq m$									
$\leq m$									
$\leq m$	$\leq m$	$\leq m$	$\leq m$	m	$\geq m$				

Der rote Bereich enthält nur Elemente, die höchstens m sind. Wie viele sind das?

Nehmen wir an wir haben t Gruppen, so ist der Median m in der $\lceil \frac{t}{2} \rceil$ -ten Gruppe.

Bei 5er Gruppen, sind pro Gruppe mindestens 3 Elemente $\leq m$.

Entsprechend gibt es mindestens $3 \cdot \lceil \frac{t}{2} \rceil$ viele Elemente $\leq m$.

Damit gibt es maximal $n - 3 \cdot \lceil \frac{t}{2} \rceil \leq n - \frac{3}{2}t \leq n - \frac{3}{2} \cdot \frac{n}{5} = \frac{7}{10}n$ Elemente größer als m .

Analog: Maximal $\frac{7}{10}n$ Elemente kleiner als m .

Mediane - Laufzeit

Wir haben also als Laufzeit:

$$T(n) = T\left(\frac{1}{5}n\right) + T\left(\frac{7}{10}n\right) + \Theta(n)$$

Bestimmung Median
der Mediane

Rekursion in
linke/rechte Teilhälfte

Aufteilen in Gruppen/
Pivotisieren/
...

Mediane - Laufzeit

$$T(n) = T\left(\frac{1}{5}n\right) + T\left(\frac{7}{10}n\right) + \Theta(n)$$

Mastertheorem

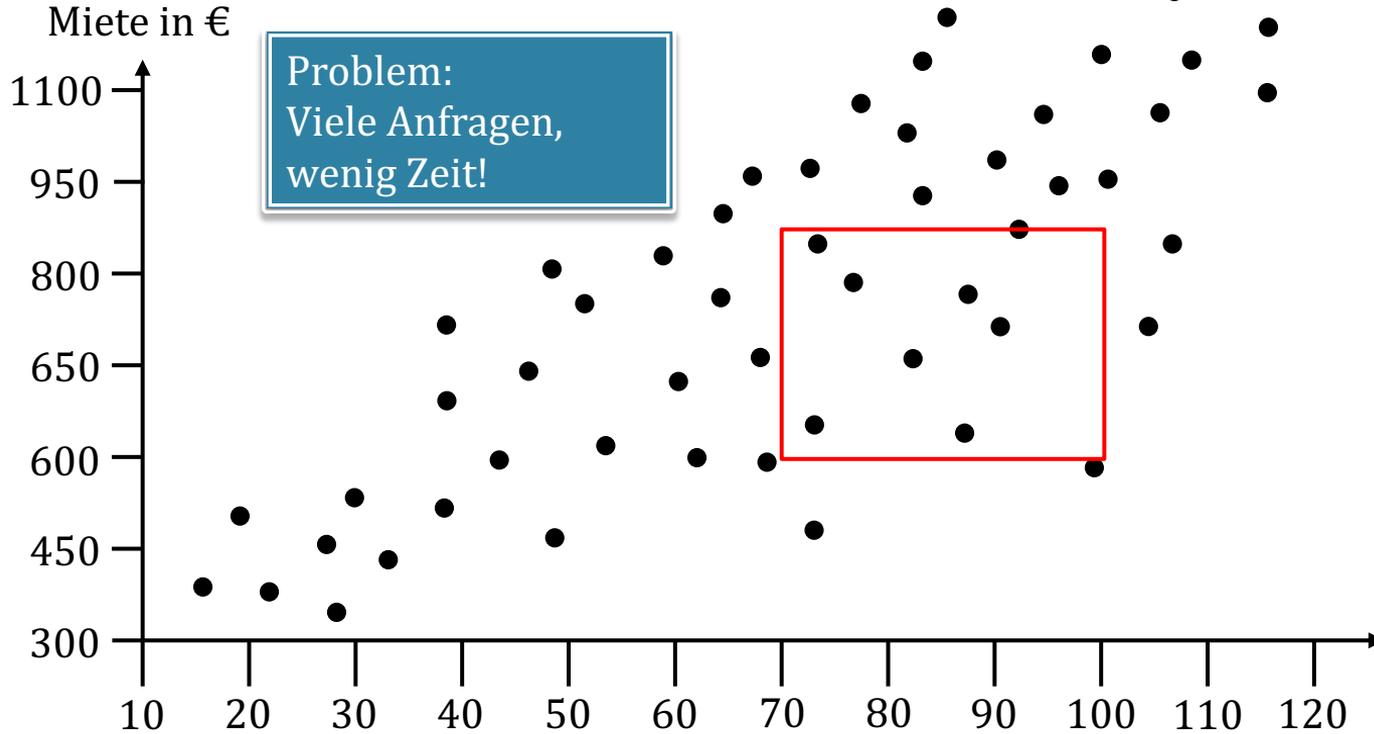
$$m = 2, \quad k = 1, \quad \alpha_1 = \frac{1}{5}, \quad \alpha_2 = \frac{7}{10}$$

$$\sum_{i=1}^2 \alpha_i^1 = \left(\frac{1}{5}\right)^1 + \left(\frac{7}{10}\right)^1 = \frac{2}{10} + \frac{7}{10} = \frac{9}{10} < 1 \rightarrow \text{Fall 1}$$

$$\Rightarrow T(n) \in \Theta(n)$$

kd-Bäume

Motivation – Die Wohnungssuche



Suche Wohnung:
Maximal 875€
Mindestens 600€
Maximal 100m²
Mindestens 70m²

Gib alle Wohnungen
im roten Quadrat aus!

Naive Lösung:
Teste für jeden Punkt,
ob er im Quadrat liegt.

kd-Bäume – Konstruktion/Preprocessing

Idee: Konstruiere binären Suchbaum. Suche dabei abwechselnd nach x - und y -Koordinate.

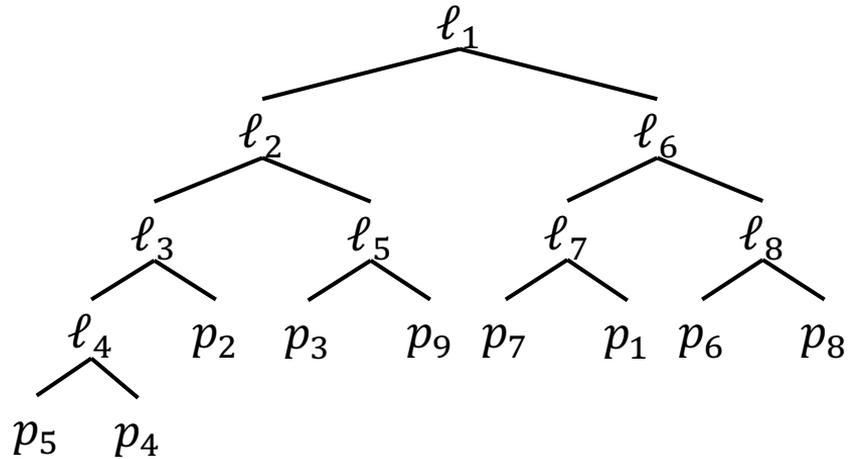
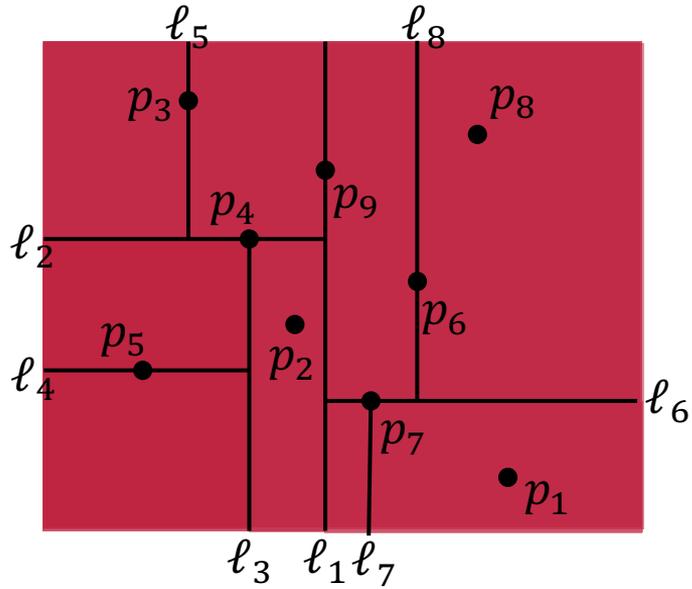
Algorithmus BUILDKDTREE

Eingabe: Punktmenge P , Rekursionstiefe $depth$

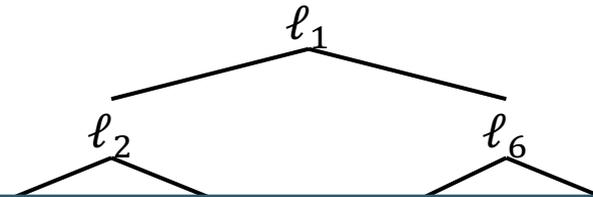
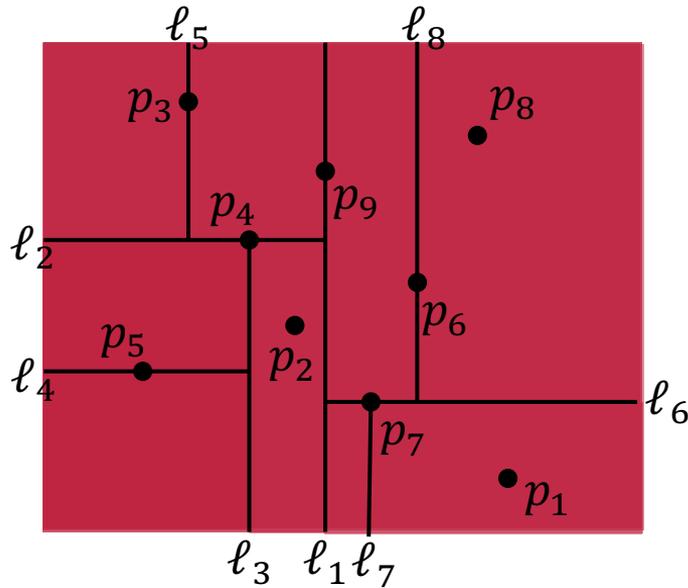
Ausgabe: Wurzel eines k-d-Baums

1. **if** ($|P| = 1$)
2. **return** Blatt mit diesem Punkt
3. **else if** ($depth$ ist gerade)
4. Teile in zwei Teilmengen $P_1 (\leq \ell)$ und $P_2 (> \ell)$ an vertikaler Median-Linie ℓ
5. **else**
6. Teile in zwei Teilmengen $P_1 (\leq \ell)$ und $P_2 (> \ell)$ an horizontaler Median-Linie ℓ
7. Setze $v_{left} := \text{BUILDKDTREE}(P_1, depth+1)$
8. Setze $v_{right} := \text{BUILDKDTREE}(P_2, depth+1)$
9. Erzeuge Knoten v für ℓ mit v_{left} und v_{right} als Kinderknoten
10. **return** v

kd-Bäume - Beispiel



kd-Bäume - Beispiel



Laufzeit des Algorithmus ist $O(n \log n)$

Beweis

- (1) Median-Linien können in $O(n)$ Zeit gefunden werden.
- (2) Rekursionsgleichung für die Laufzeit ist also

$$T(n) = O(n) + 2T\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right)$$

Nach Mastertheorem ist das $O(n \log n)$.

kd-Bäume – Search Query

Algorithmus SEARCHKDTREE

Eingabe: Wurzel v eines (Teil-)baums, Rechteck R

Ausgabe: Knoten unterhalb v , die in R liegen

1. **if** (v ist ein Blatt)
2. Gib v aus, falls v in R
3. **else**
4. **if** (Region($l(v)$) ganz in R)
5. REPORTSUBTREE($l(v)$)
6. **else if** (Region($l(v)$) schneidet R)
7. SEARCHKDTREE($l(v)$, R)
8. **if** (Region($r(v)$) ganz in R)
9. REPORTSUBTREE($r(v)$)
10. **else if** (Region($r(v)$) schneidet R)
11. SEARCHKDTREE($r(v)$, R)

kd-Bäume – Search Query

Laufzeit ist $O(\sqrt{n} + x)$, wobei x die Anzahl an ausgegebenen Elementen ist.

Das nennt sich *output-sensitive*, d.h. die Laufzeit ist von der Größe des Outputs abhängig.

Beweisidee:

Wie viele *geschnittene* Regionen müssen betrachtet werden? Man kann die Rekursionsgleichung aufstellen:

$$Q(n) = 2 + 2Q\left(\frac{n}{4}\right).$$

Also $Q(n) \in O(\sqrt{n})$. So viele Elemente können geprüft werden, die nicht in R liegen. Die $O(x)$ sind die Elemente in R .

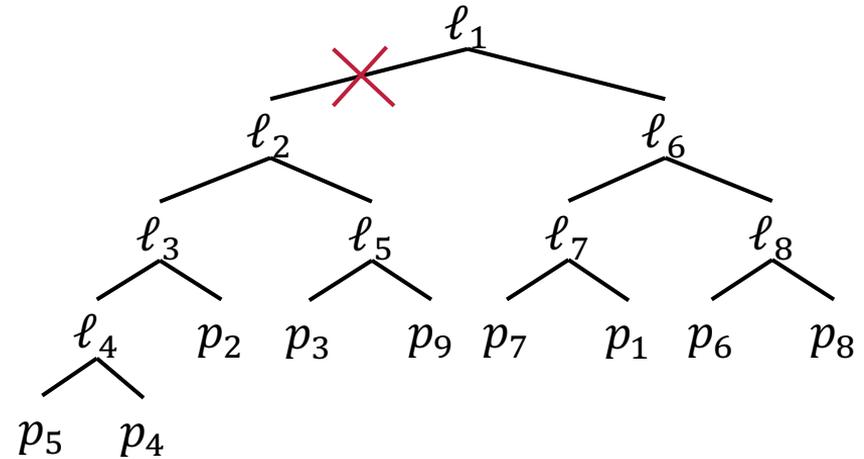
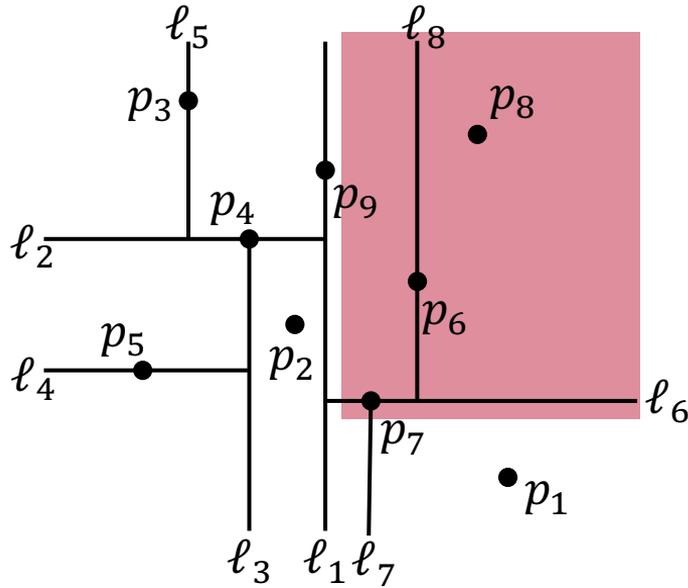
Algorithmus SEARCHKDTREE

Eingabe: Wurzel v eines (Teil-)baums, Rechteck R

Ausgabe: Knoten unterhalb v , die in R liegen

1. **if** (v ist ein Blatt)
2. Gib v aus, falls v in R
3. **else**
4. **if** (Region($l(v)$) ganz in R)
5. REPORTSUBTREE($l(v)$)
6. **else if** (Region($l(v)$) schneidet R)
7. SEARCHKDTREE($l(v)$, R)
8. **if** (Region($r(v)$) ganz in R)
9. REPORTSUBTREE($r(v)$)
10. **else if** (Region($r(v)$) schneidet R)
11. SEARCHKDTREE($r(v)$, R)

kd-Bäume - Beispiel



Welche Punkte liegen im Rechteck?

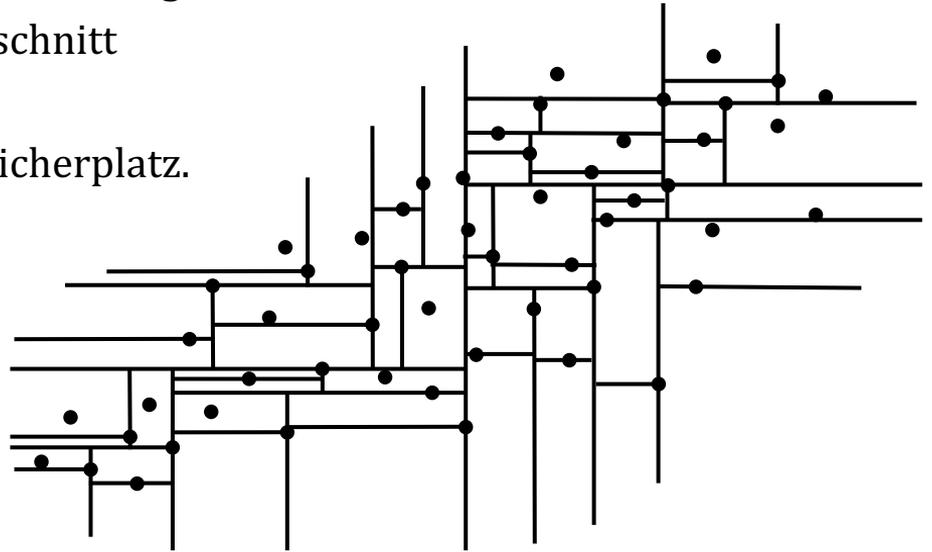
Antwort: p_7 p_6 p_8

kd-Bäume – Höhere Dimensionen

Bisher nur 1D und 2D betrachtet. Laufzeiten für $k \geq 2$ Dimensionen:

- BuildKDTree: $O(n \log n)$
- SearchKDTree: $O(n^{1-\frac{1}{k}} + x)$, um x Elemente auszugeben
- FindNearestNeighbor: $O(\log n)$ im Durchschnitt

Weiterer Vorteil: Sie benötigen nur $O(n)$ Speicherplatz.



Klausur

Klausurinformationen

Tag:

03.03.2023

Zeit:

zwischen 10:30
Uhr und 13:30
Uhr

(Dauer 2
Stunden)

Raum:

wird am
02.03.2023
bekanntgegeben

Mitbringen:

Studenausweis,
Stift (blauer /
schwarzer
Kugelschreiber)

Klausurvorbereitung

Tutoren (Sprechstunde):

Fragen an die
Tutoren
(wenig Plätze)

Skript:

Gutes
unterstützendes
Material

Alte Klausuren:

Guter Überblick,
was zu erwarten
ist

Training!

Hausaufgaben,
Kopfrechnen, ...

Klausureinsicht (voraussichtlich)

Zeit:

Mo. 13.03.
13-15 Uhr

Raum:

IZ 313