Technische Universität Braunschweig

# Algorithmen und Datenstrukturen – Übung #7

**Mergesort, Master-Theorem, Heapsort**

Arne Schmidt

19.01.2023

# Mergesort

# Mergesort

Algorithmus (grob):

1. Sortiere linke Hälfte
2. Sortiere rechte Hälfte
3. Füge beide Hälften zusammen (merge)

| $A =$ | 4 | 2 | 6 | 3 | 1 | 5 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. $A =$ | | | | | | | |
| 2. $A =$ | | | | | | | |
| 3. $A =$ | | | | | | | |
| 4. $A =$ | | | | | | | |
| 5. $A =$ | | | | | | | |
| 6. $A =$ | | | | | | | |

# Mergesort

Algorithmus (grob):

1. Sortiere linke Hälfte
2. Sortiere rechte Hälfte
3. Füge beide Hälften zusammen (merge)

| $A =$ | 4 | 2 | 6 | 3 | 1 | 5 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. $A =$ | 2 | 4 | | | | | |
| 2. $A =$ | | | | | | | |
| 3. $A =$ | | | | | | | |
| 4. $A =$ | | | | | | | |
| 5. $A =$ | | | | | | | |
| 6. $A =$ | | | | | | | |

# Mergesort

Algorithmus (grob):

1. Sortiere linke Hälfte
2. Sortiere rechte Hälfte
3. Füge beide Hälften zusammen (merge)

| $A =$ | 4 | 2 | 6 | 3 | 1 | 5 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. $A =$ | 2 | 4 | | | | | |
| 2. $A =$ | | | 3 | 6 | | | |
| 3. $A =$ | | | | | | | |
| 4. $A =$ | | | | | | | |
| 5. $A =$ | | | | | | | |
| 6. $A =$ | | | | | | | |

# Mergesort

Algorithmus (grob):

1. Sortiere linke Hälfte
2. Sortiere rechte Hälfte
3. Füge beide Hälften zusammen (merge)

| $A =$ | 4 | 2 | 6 | 3 | 1 | 5 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. $A =$ | 2 | 4 | | | | | |
| 2. $A =$ | | | 3 | 6 | | | |
| 3. $A =$ | 2 | 3 | 4 | 6 | | | |
| 4. $A =$ | | | | | | | |
| 5. $A =$ | | | | | | | |
| 6. $A =$ | | | | | | | |

# Mergesort

Algorithmus (grob):

1. Sortiere linke Hälfte
2. Sortiere rechte Hälfte
3. Füge beide Hälften zusammen (merge)

| $A =$ | 4 | 2 | 6 | 3 | 1 | 5 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. $A =$ | 2 | 4 | | | | | |
| 2. $A =$ | | | 3 | 6 | | | |
| 3. $A =$ | 2 | 3 | 4 | 6 | | | |
| 4. $A =$ | | | | | 1 | 5 | |
| 5. $A =$ | | | | | | | |
| 6. $A =$ | | | | | | | |

# Mergesort

Algorithmus (grob):

1. Sortiere linke Hälfte
2. Sortiere rechte Hälfte
3. Füge beide Hälften zusammen (merge)

| $A =$ | 4 | 2 | 6 | 3 | 1 | 5 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. $A =$ | 2 | 4 | | | | | |
| 2. $A =$ | | | 3 | 6 | | | |
| 3. $A =$ | 2 | 3 | 4 | 6 | | | |
| 4. $A =$ | | | | | 1 | 5 | |
| 5. $A =$ | | | | | 1 | 5 | 7 |
| 6. $A =$ | | | | | | | |

# Mergesort

Algorithmus (grob):

1. Sortiere linke Hälfte
2. Sortiere rechte Hälfte
3. Füge beide Hälften zusammen (merge)

| $A =$ | 4 | 2 | 6 | 3 | 1 | 5 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. $A =$ | 2 | 4 | | | | | |
| 2. $A =$ | | | 3 | 6 | | | |
| 3. $A =$ | 2 | 3 | 4 | 6 | | | |
| 4. $A =$ | | | | | 1 | 5 | |
| 5. $A =$ | | | | | 1 | 5 | 7 |
| 6. $A =$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |

# Mergesort - Laufzeit

Algorithmus (grob):

1. Sortiere linke Hälfte
2. Sortiere rechte Hälfte
3. Füge beide Hälften zusammen (merge)

Sei $T(n)$ die Laufzeit von Mergesort für $n$ Elemente

Schritt 1: $T\left(\frac{n}{2}\right)$

Schritt 2: $T\left(\frac{n}{2}\right)$

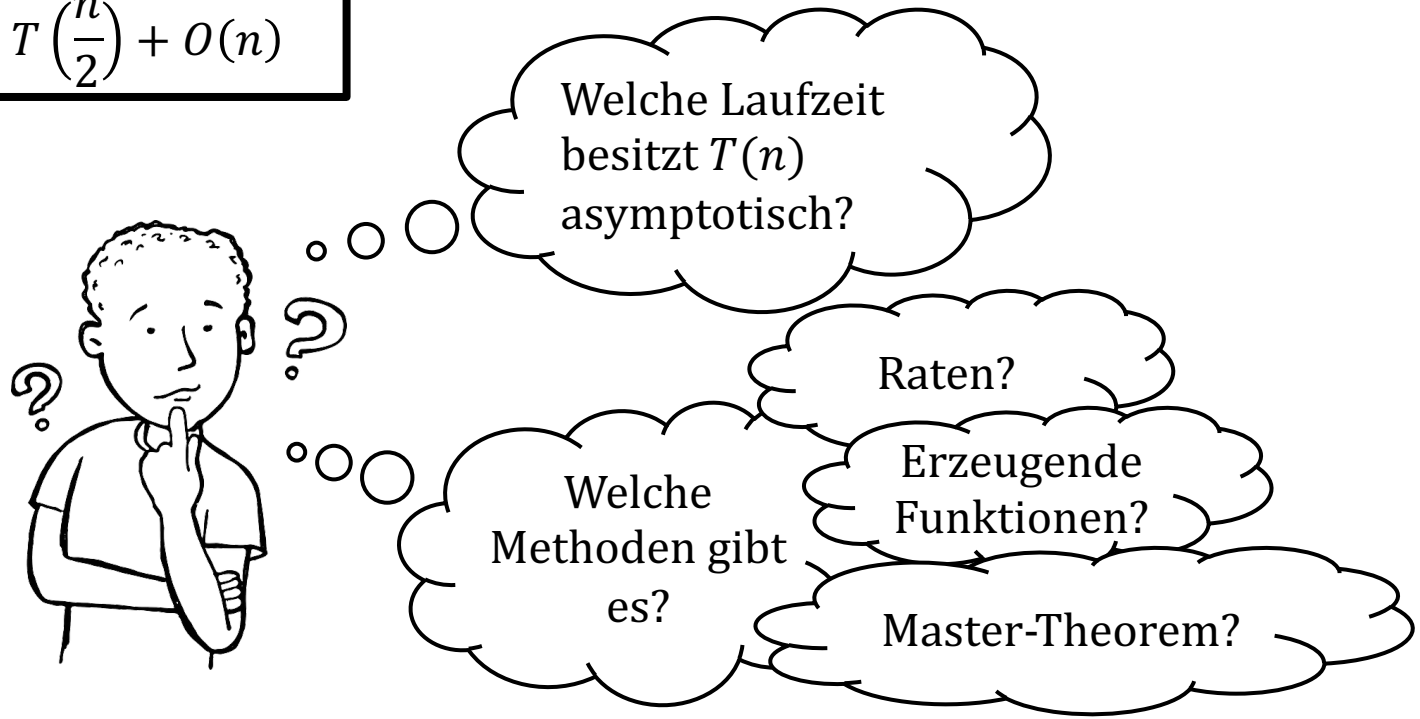
Schritt 3: $O(n)$

Zusammen ergibt das:

$$T(n) = 2 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + O(n)$$

# Lösen von Rekursionsgleichungen

$$T(n) = 2 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + O(n)$$



# Master-Theorem

# Das Master-Theorem

Satz: Sei $T: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Funktion der Form

$$T(n) \coloneqq \sum_{i=1}^{m} T(\alpha_i \cdot n) + \Theta\left(n^k\right),$$

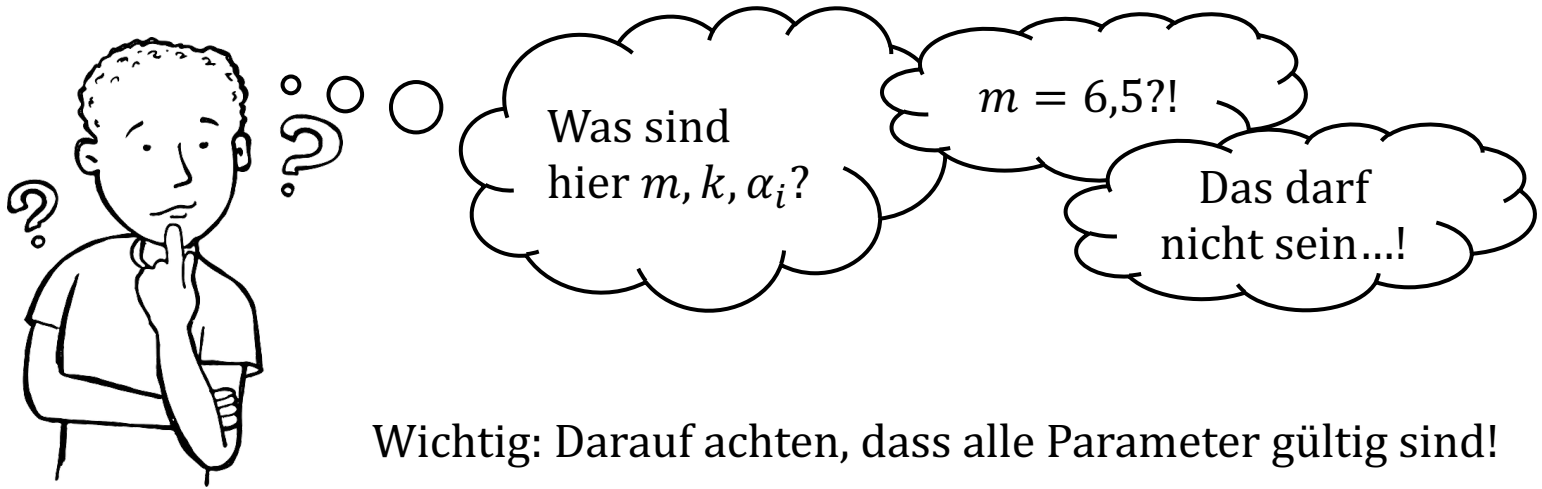
wobei $m \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{R}$ und $0 < \alpha_i < 1$ für alle $i \in \{1, \dots, m\}$.
Dann gilt

$$T(n) \in \begin{cases} \Theta\left(n^k\right), & \text{falls } \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^k < 1 \\ \Theta\left(n^k \log n\right), & \text{falls } \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^k = 1 \\ \Theta(n^c) \text{ mit } \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^c = 1, & \text{falls } \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^k > 1 \end{cases}$$

# Master-Theorem (Beispiele)

# Beispiel 1

$$U(n) = \frac{1}{2} \cdot U\left(\frac{n}{3}\right) + 6 \cdot U\left(\frac{n}{6}\right) + 7n \log n - 8n + 15n^2$$




Wichtig: Darauf achten, dass alle Parameter gültig sind!

# Beispiel 1.2

$$U(n) = 3 \cdot U\left(\frac{n}{3}\right) + 6 \cdot U\left(\frac{n}{6}\right) + \underbrace{7n \log n - 8n + 15n^2}_{\Theta(n^2)}$$

Also:

$m = 9, k = 2$ und $\alpha_1 = \cdots = \alpha_3 = \frac{1}{3}, \alpha_4 = \cdots = \alpha_9 = \frac{1}{6}$

Mit

$$\sum_{i=1}^{9} \alpha_i^2 = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 6 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

folgt $U(n) \in \Theta(n^2)$

# Beispiel 2

$$V(n) = 7n^2 + 5n^3 + 27 \cdot V\left(\frac{n}{3}\right) - 7n$$

Also:

$m = 27, k = 3$ und $\alpha_1 = \cdots = \alpha_{27} = \frac{1}{3}$

Mit

$$\sum_{i=1}^{27} \alpha_i^3 = 27 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{27}{27} = 1$$

folgt $V(n) \in \Theta(n^3 \log n)$

# Beispiel 3

$$W(n) = 9 \cdot W\left(\frac{n}{3}\right) + 7n$$

Also:

$m = 9, k = 1$ und $\alpha_1 = \cdots = \alpha_9 = \frac{1}{3}$

Da

$$\sum_{i=1}^{9} \alpha_i^1 = 9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1 = 3 > 1$$

müssen wir das $c$ suchen!

Also suche c, sodass gilt

$$\sum_{i=1}^{9} \alpha_i^c = 1$$

$$\Leftrightarrow 9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^c = 1$$

$$\Leftrightarrow 9 = 3^c$$

$$\Leftrightarrow \log_3 9 = c$$

$$\Leftrightarrow 2 = c$$

Also:

$W(n) \in \Theta(n^2)$

(Sortieren mit)

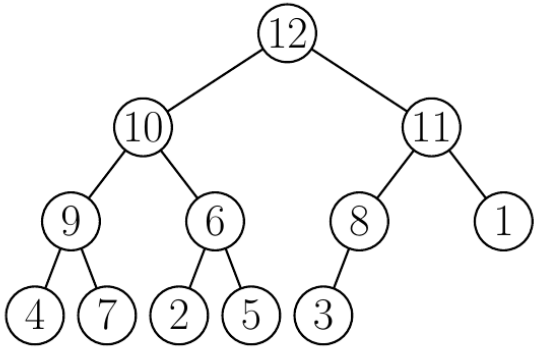
# Max-Heaps

# Max-Heaps – Definition

Ein Max-Heap ist ein binärer Baum mit folgenden Eigenschaften:

- Jeder Knoten besitzt einen Schlüssel
- Ebene $i < h$ besitzt $2^{i-1}$ Knoten, wobei $h$ die Höhe des Baumes ist.
- Auf Ebene $h$ sind die linken $n - 2^{h-1} + 1$ Positionen besetzt.
- Der Schlüssel jedes Knotens ist mindestens so groß wie die seiner beiden Kinder.

$$A = [12, 10, 11, 9, 6, 8, 1, 4, 7, 2, 5, 3]$$



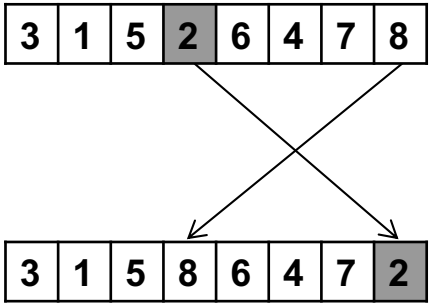
# Build-Max-Heap

```
1: function BUILD-MAX-HEAP(A)
2:     heap-größe[A] := länge[A]
3:     for i = ⌊länge[A]/2⌋ down to 1 do
4:         MAX-HEAPIFY(A, i)
```

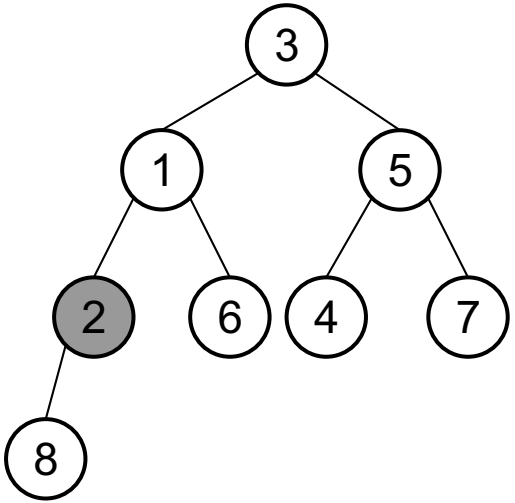
```
1: function MAX-HEAPIFY(A, i)
2:     ℓ := links(i), r := rechts(i)
3:     if ℓ ≤ heap-größe[A] und A[ℓ] > A[i] then
4:         max := ℓ
5:     else
6:         max := i
7:     if r ≤ heap-größe[A] und A[r] > A[max] then
8:         max := r
9:     if max ≠ i then
10:        Vertausche A[max]und A[i]
11:        MAX-HEAPIFY(A, max)
```

# Build-Max-Heap

Als Array

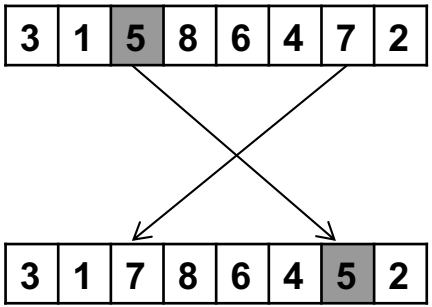



Als Baum

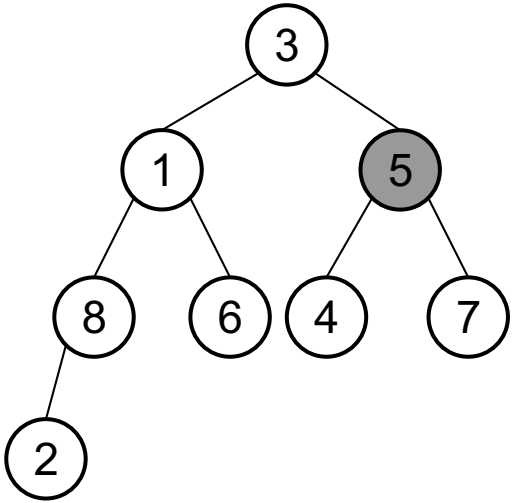


# Build-Max-Heap

Als Array

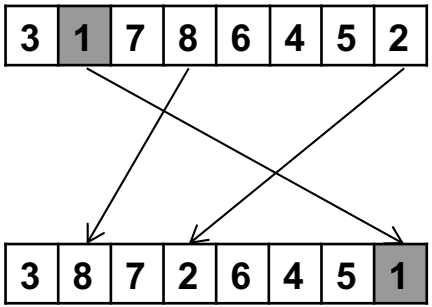



Als Baum

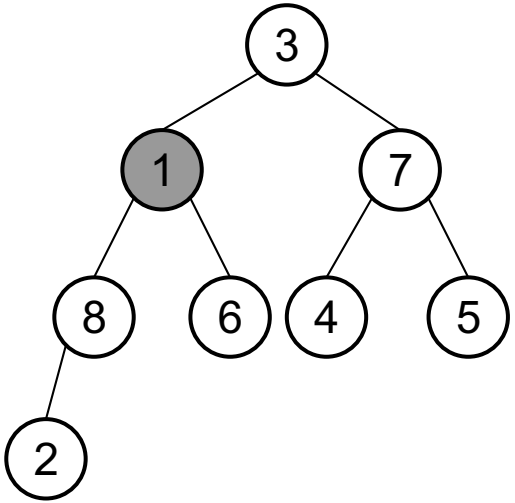


# Build-Max-Heap

Als Array

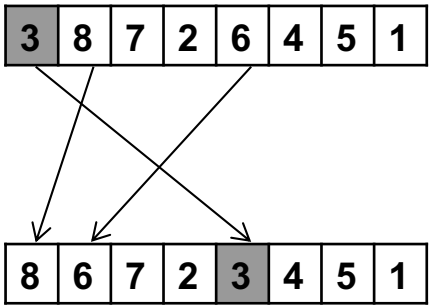



Als Baum

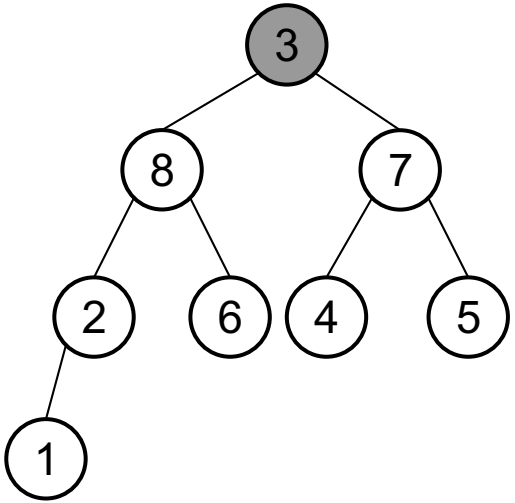


# Build-Max-Heap

Als Array




Als Baum



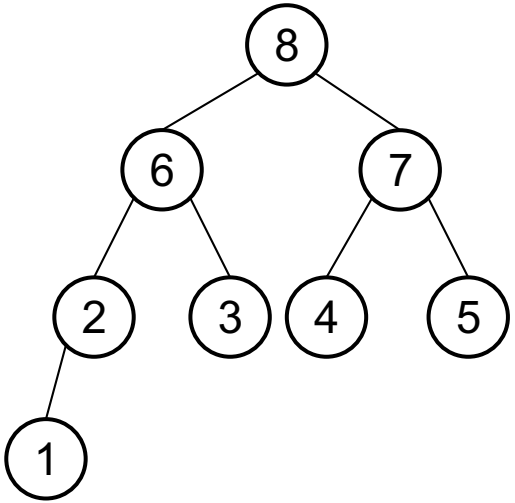
# Build-Max-Heap

Als Array

Fertig!

| 8 | 6 | 7 | 2 | 3 | 4 | 5 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|

Als Baum



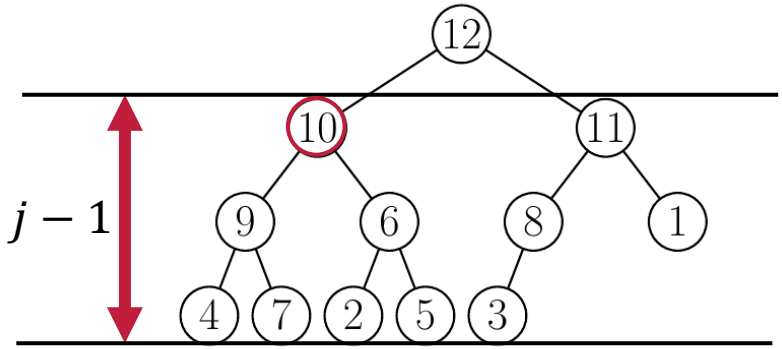
# Build-Max-Heap

```
1: function BUILD-MAX-HEAP(A)
2:     heap-größe[A] := länge[A]
3:     for i = ⌊länge[A]/2⌋ down to 1 do
4:         MAX-HEAPIFY(A, i)
```

```
1: function MAX-HEAPIFY(A, i)
2:     ℓ := links(i), r := rechts(i)
3:     if ℓ ≤ heap-größe[A] und A[ℓ] > A[i] then
4:         max := ℓ
5:     else
6:         max := i
7:     if r ≤ heap-größe[A] und A[r] > A[max] then
8:         max := r
9:     if max ≠ i then
10:        Vertausche A[max]und A[i]
11:        MAX-HEAPIFY(A, max)
```

# Build-Max-Heap

```
1:  function MAX-HEAPIFY(A, i)
2:      ℓ := links(i), r := rechts(i)
3:      if ℓ ≤ heap-größe[A] und A[ℓ] > A[i] then
4:          max := ℓ
5:      else
6:          max := i
7:      if r ≤ heap-größe[A] und A[r] > A[max] then
8:          max := r
9:      if max ≠ i then
10:         Vertausche A[max]und A[i]
11:         MAX-HEAPIFY(A, max)
```




Für Knoten auf Ebene $h - j$ benötigen wir maximal $O(j)$ Durchgänge.

Jeder Durchgang kostet $O(1)$

# Build-Max-Heap

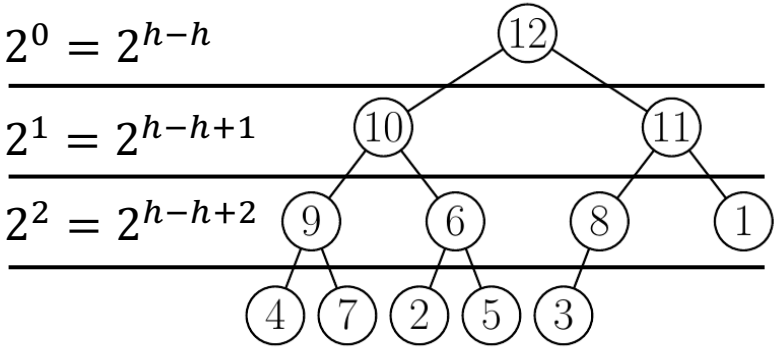
```
1: function BUILD-MAX-HEAP(A)
2:     heap-größe[A] := länge[A]
3:     for i = ⌊länge[A]/2⌋ down to 1 do
4:         MAX-HEAPIFY(A, i)
```

```
1: function MAX-HEAPIFY(A, i)
2:     ℓ := links(i), r := rechts(i)
3:     if ℓ ≤ heap-größe[A] und A[ℓ] > A[i] then
4:         max := ℓ
5:     else
6:         max :=
7:     if r ≤ ] und A[r] > A[max] then
8:         ma
9:     if max ≠ i then
10:        Vertausche A[max]und A[i]
11:        MAX-HEAPIFY(A, max)
```

Für Knoten auf Ebene $h - j$: $O(j)$

# Build-Max-Heap

```
1: function BUILD-MAX-HEAP(A)
2:     heap-größe[A] := länge[A]
3:     for i = ⌊länge[A]/2⌋ down to 1 do
4:         MAX-HEAPIFY(A, i)
```




Laufzeit:

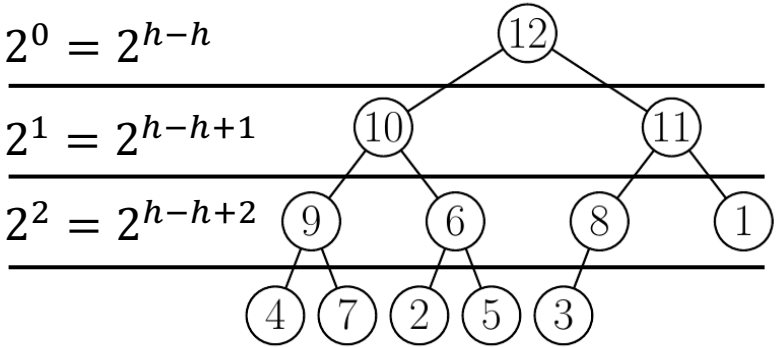
$$O\left(1 + \sum_{j=1}^{h} 2^{h-j} \cdot j\right) = O\left(2^h \cdot \sum_{j=1}^{h} \frac{j}{2^j}\right)$$

Per Induktion:

$$\sum_{j=1}^{h} \frac{j}{2^j} = 2 - \frac{h+2}{2^h}$$

# Build-Max-Heap

```
1: function BUILD-MAX-HEAP(A)
2:     heap-größe[A] := länge[A]
3:     for i = ⌊länge[A]/2⌋ down to 1 do
4:         MAX-HEAPIFY(A, i)
```




Laufzeit:

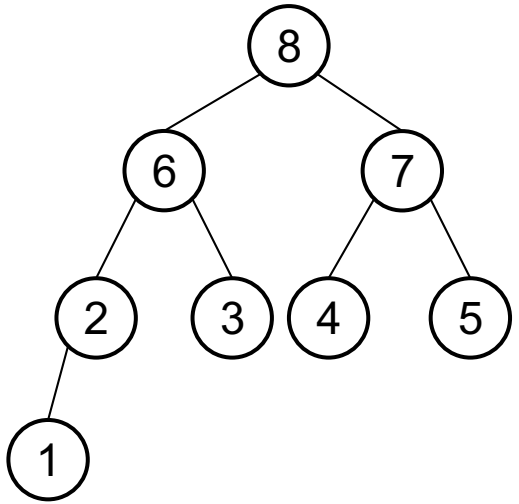
$$O\left(1 + \sum_{j=1}^{h} 2^{h-j} \cdot j\right) = O\left(2^h \cdot \sum_{j=1}^{h} \frac{j}{2^j}\right) = O(2^h) = O(n)$$

Per Induktion:

$$\sum_{j=1}^{h} \frac{j}{2^j} = 2 - \frac{h+2}{2^h}$$

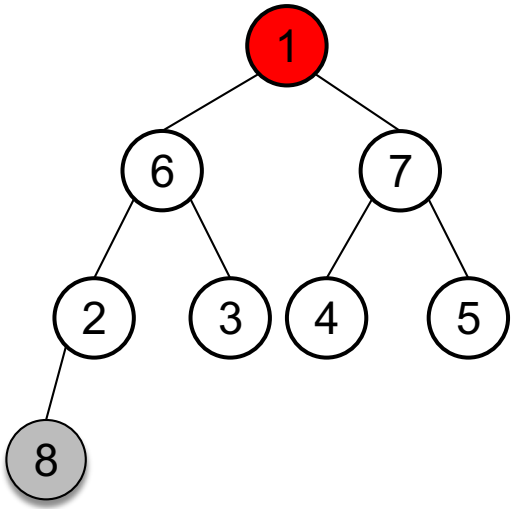
# Heapsort

```
function SORT(A)
    BUILD-MAX-HEAP(A)
    for i ←length(A) downto 2 do
        vertausche A[1] und A[i]
        heap-größe[A] ← heap-größe[A] − 1
        MAX-HEAPIFY(A, 1)
    end for
end function
```



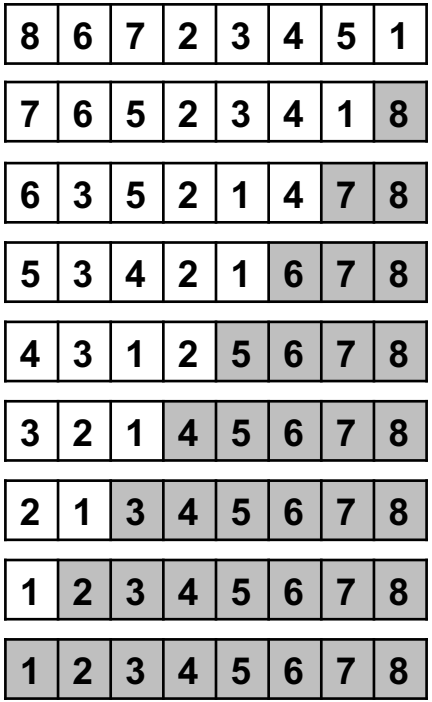
# Heapsort

```
function SORT(A)
    BUILD-MAX-HEAP(A)
    for i ←length(A) downto 2 do
        vertausche A[1] und A[i]
        heap-größe[A] ← heap-größe[A] − 1
        MAX-HEAPIFY(A, 1)
    end for
end function
```



# Heapsort

```
function SORT(A)
    BUILD-MAX-HEAP(A)
    for i ←length(A) downto 2 do
        vertausche A[1] und A[i]
        heap-größe[A] ← heap-größe[A] − 1
        MAX-HEAPIFY(A, 1)
    end for
end function
```



# Heapsort – Laufzeit

```
function SORT(A)
    BUILD-MAX-HEAP(A)
    for i ←length(A) downto 2 do
        vertausche A[1] und A[i]
        heap-größe[A] ← heap-größe[A] − 1
        MAX-HEAPIFY(A, 1)
    end for
end function
```

Build-Max-Heap: $O(n)$

In der For-Schleife:

1. Vertauschen: $O(1)$
2. Verkleinern: $O(1)$
3. Max-Heapify: $O(\log n)$

Für $n$ Iterationen ist das $O(n \log n)$

# Heapsort – Korrektheit

Heapsort ist ein Sortierverfahren.

Beweis:

- Wir zeigen: Nach der i-ten Iteration besitzen wir wieder einen Max-Heap auf den restlichen Feldern
  ➔Wir können das nächstgrößere Element an die richtige Stelle sortieren.
- Zu Beginn, besitzen wir einen Max-Heap.
  ➔das größte Element ist an der ersten Stelle.
- Angenommen, wir haben zu Beginn der Iteration $i$ einen Max-Heap auf den aktiven $n - i + 1$ Feldern.
- Nach dem Tauschen des $i$ größten Elements nach hinten und nach Verkleinern des Arrays:
  ➔U.U. kein Max-Heap vorhanden.
- Aber: Jeder Knoten außer Wurzel erfüllt Max-Heap Eigenschaft.
- Also: Max-Heapify auf Wurzelknoten reicht aus, um einen Max-Heap wiederherzustellen!
- Wir tauschen also in jeder Iteration das richtige Element nach hinten!

# Fragen?