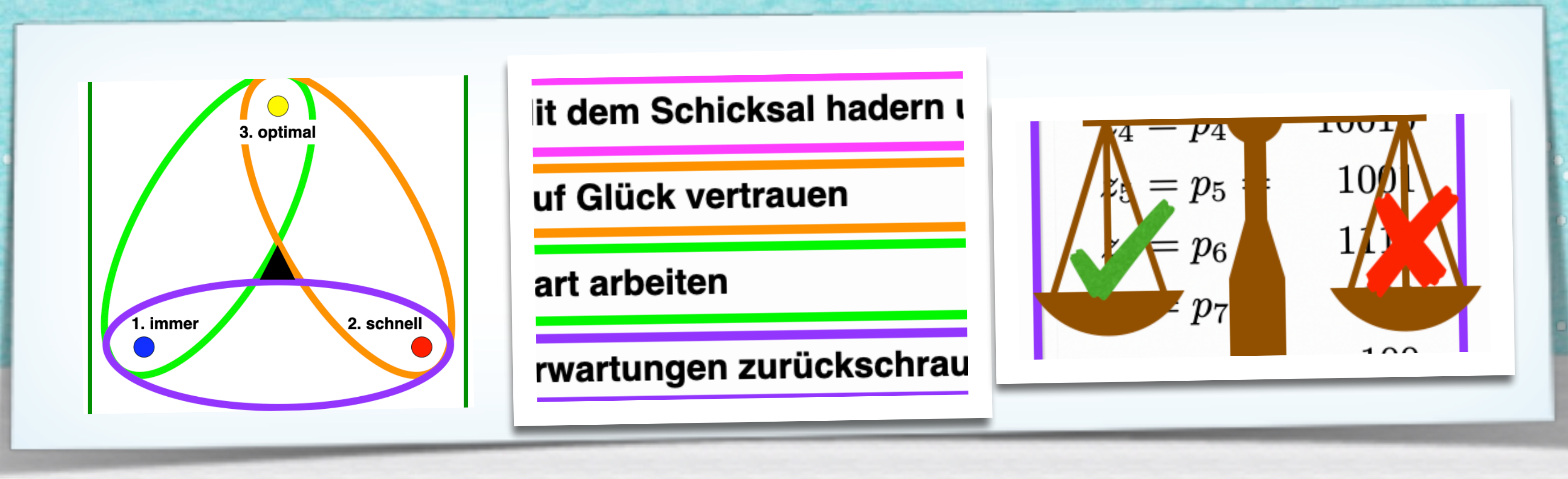


5 Komplexität

Algorithmen und Datenstrukturen 2
Sommer 2023

Prof. Dr. Sándor Fekete

5.1 Die Klasse P: „Perfekte“ Algorithmen

Erwünschte Eigenschaften von Algorithmen

Ziele: Ein „perfekter" Algorithmus sollte

1.immer: für jede beliebige Instanz

2.schnell: in polynomieller Zeit

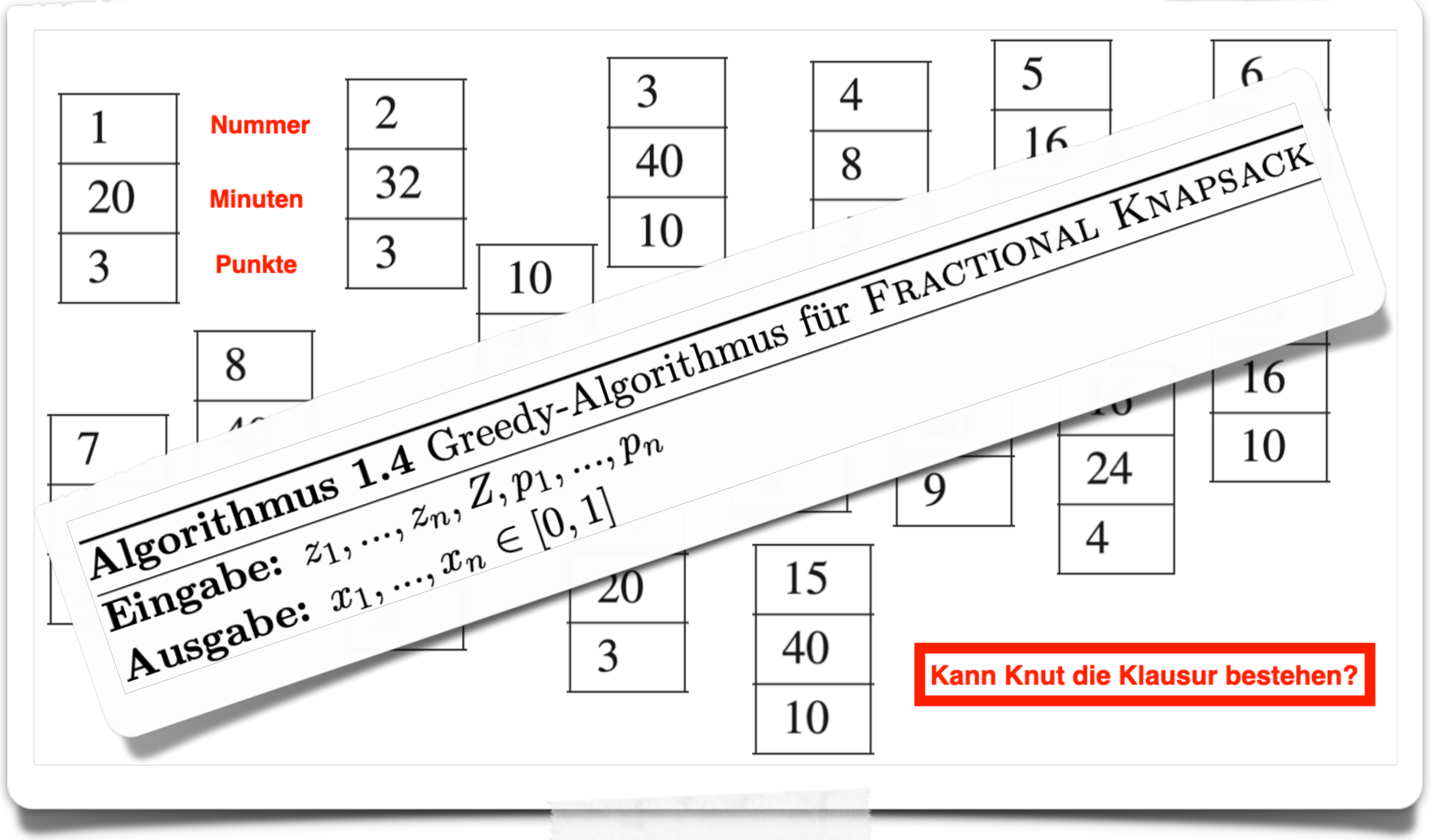
3.optimal: eine bestmögliche Lösung

liefern.

Definition 5.1. *Ein algorithmisches Problem Π gehört zur Klasse P, wenn es für Π einen Algorithmus mit polynomieller Laufzeit gibt, der immer eine optimale Lösung findet.*

Fractional Knapsack

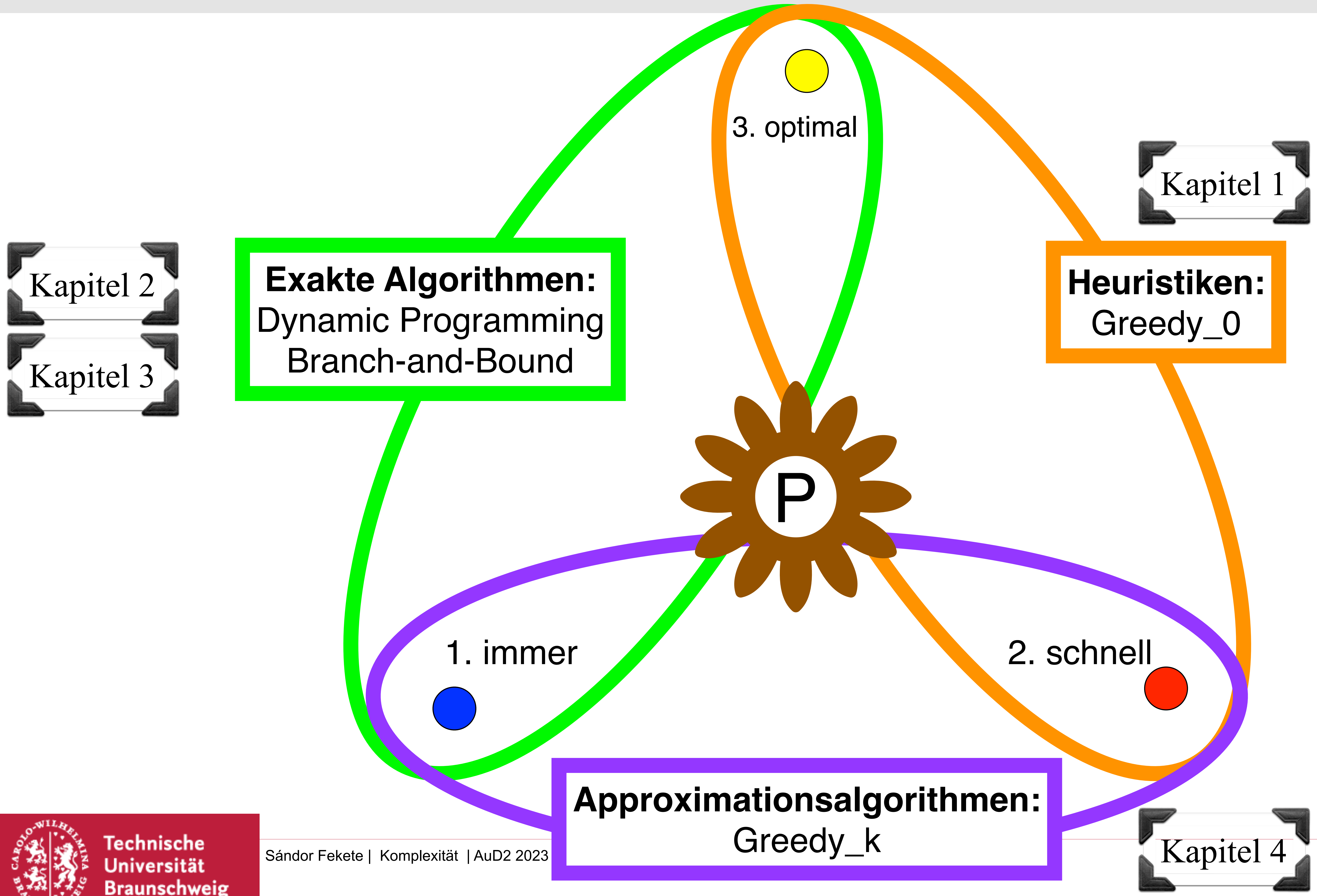
0-1 Knapsack?

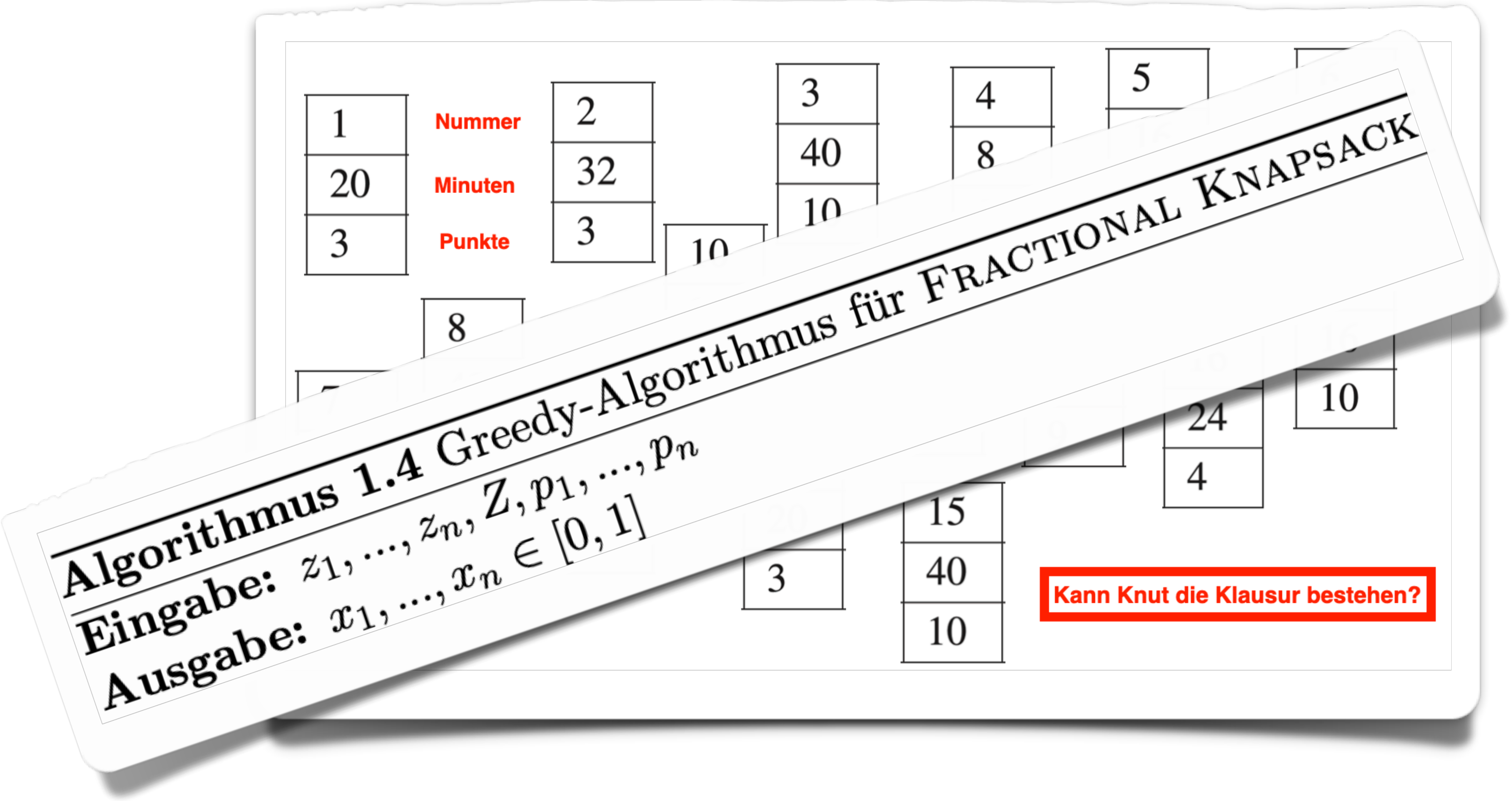


Achtung:

Das klassifiziert Probleme, nicht Algorithmen!

Das Dreieck der Perfektion



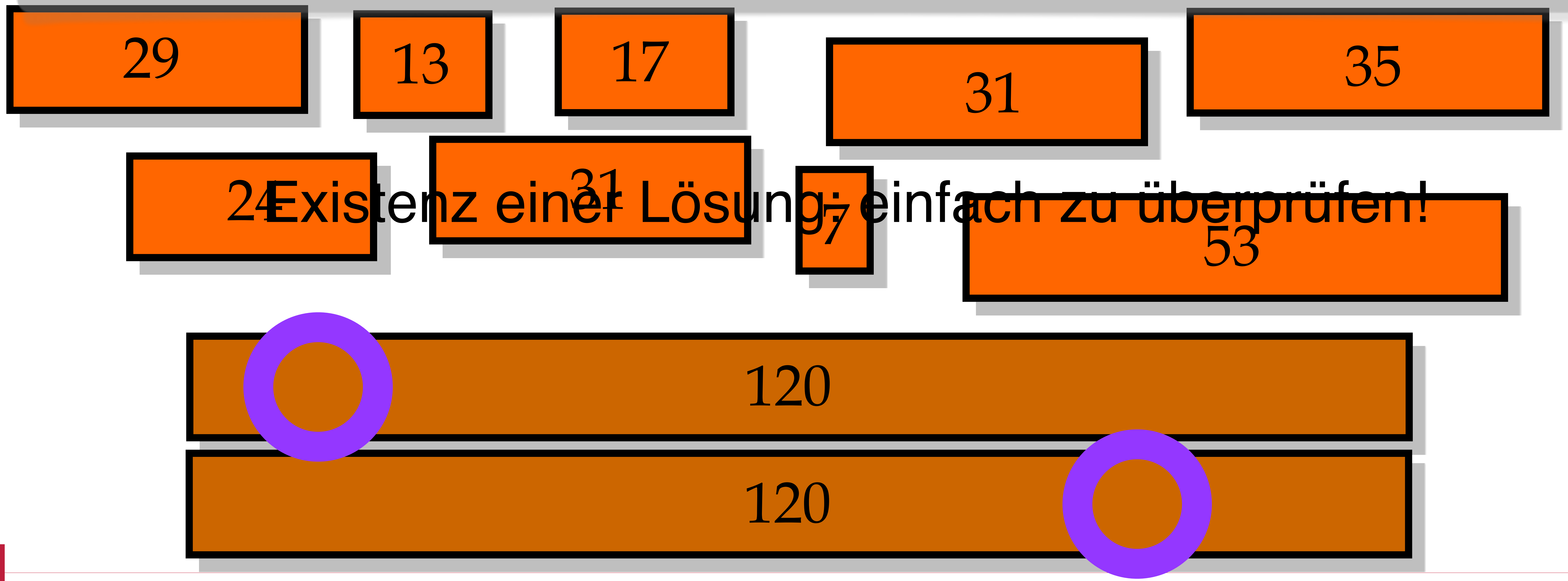


Gehört 0-1 Knapsack zu P?

5.2 Die Klasse NP: „NachPrüfen“

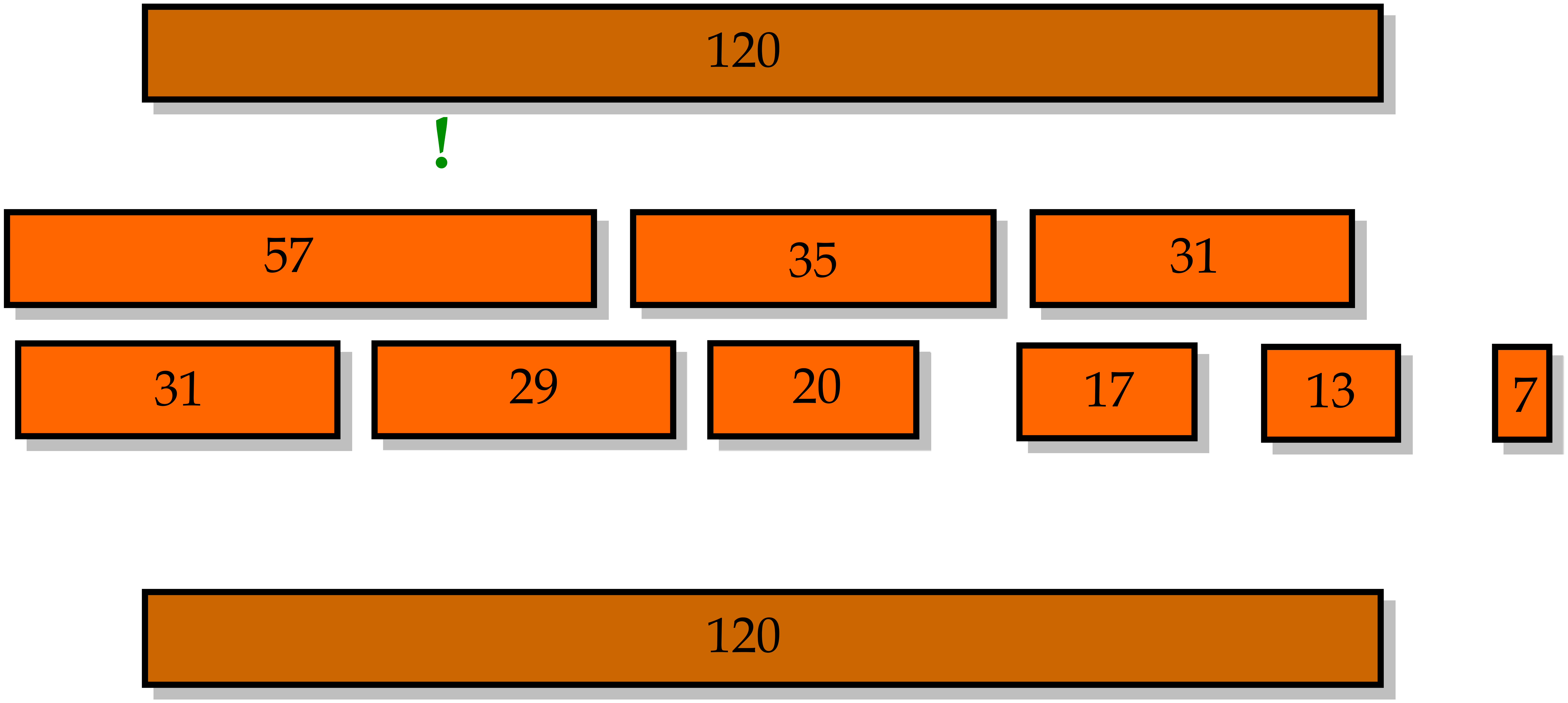
Nachprüfen!

Beispiel 1.10.
Partition für $\{z_1, ..., z_9\} = \{7, 13, 17, 24, 29, 31, 31, 35, 53\}$
Gesamtsumme: 240

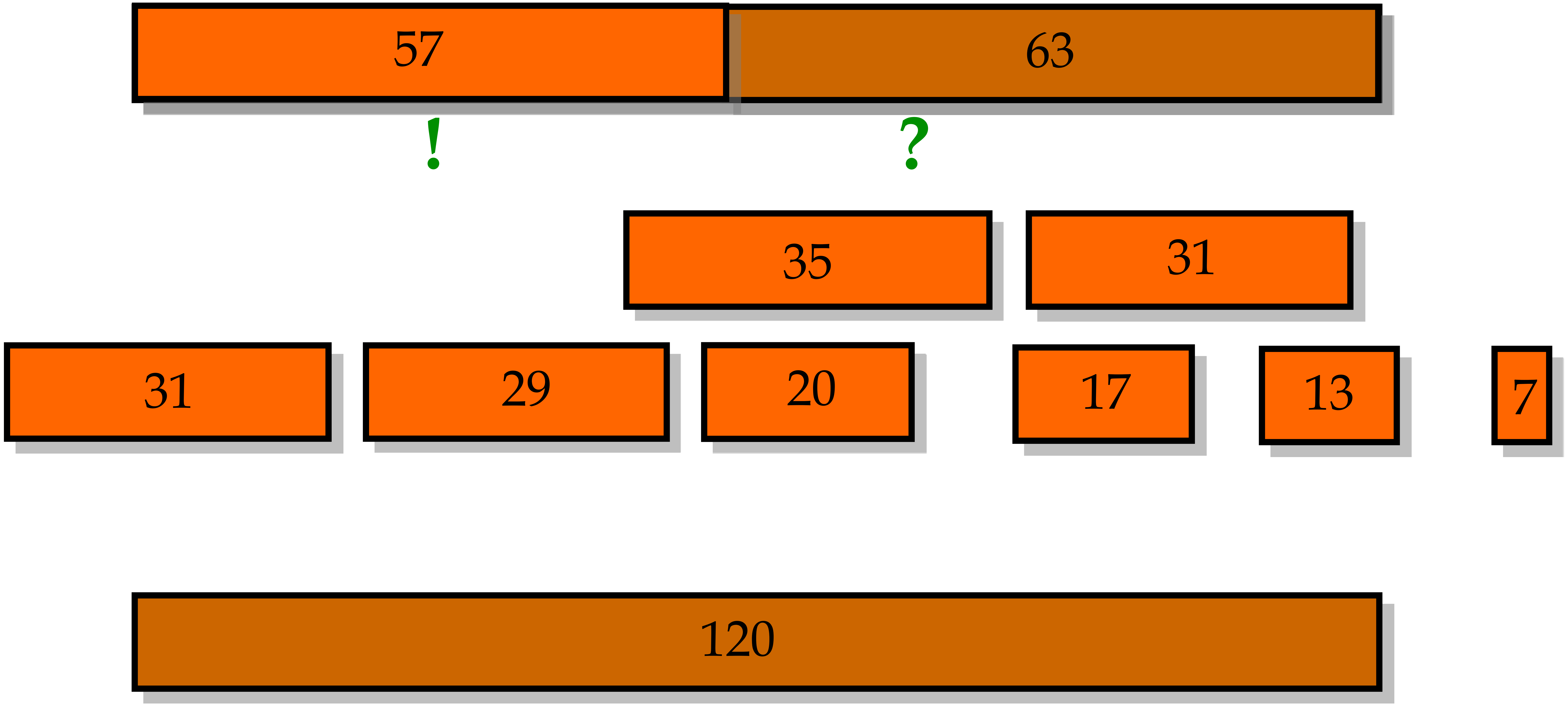


Existenz einer Lösung: einfach zu überprüfen!

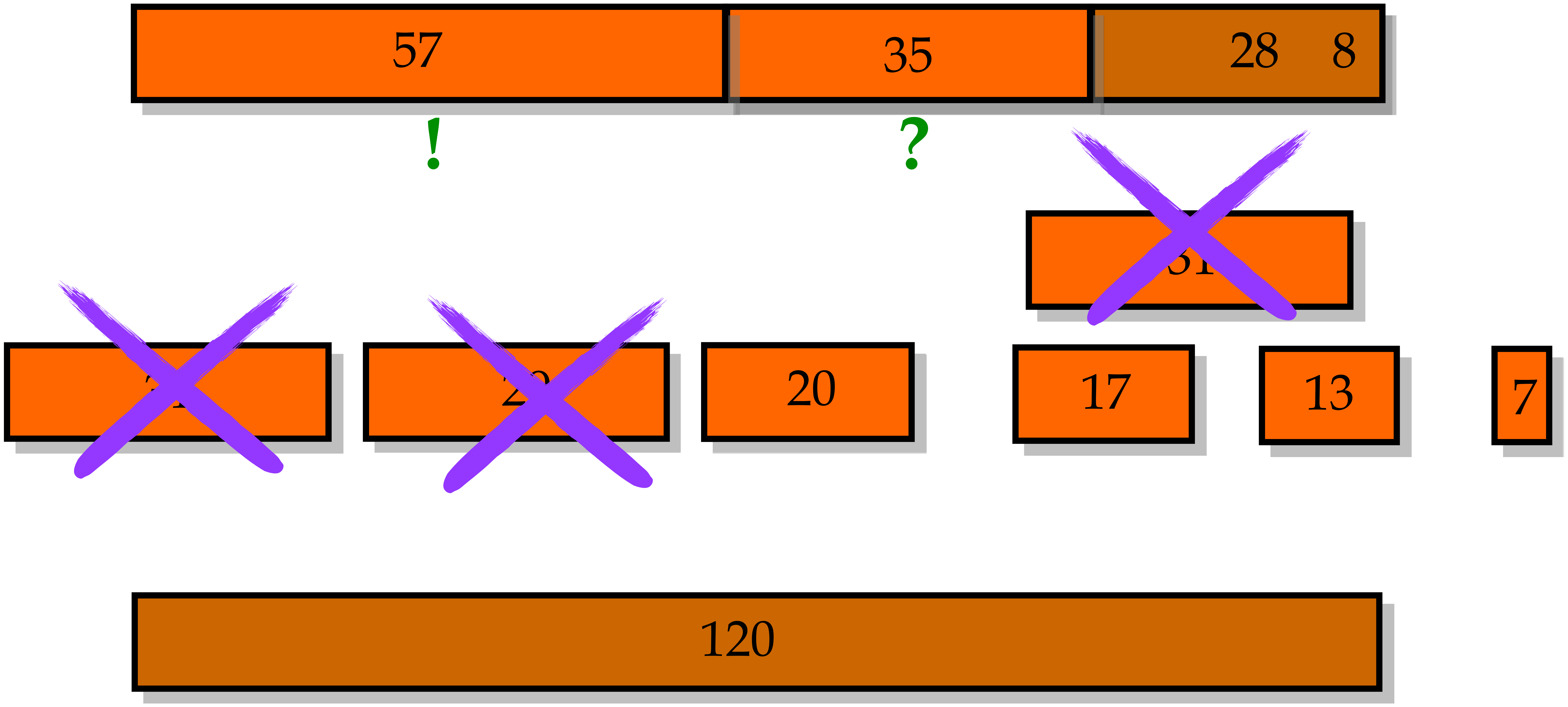
Keine Lösung?!



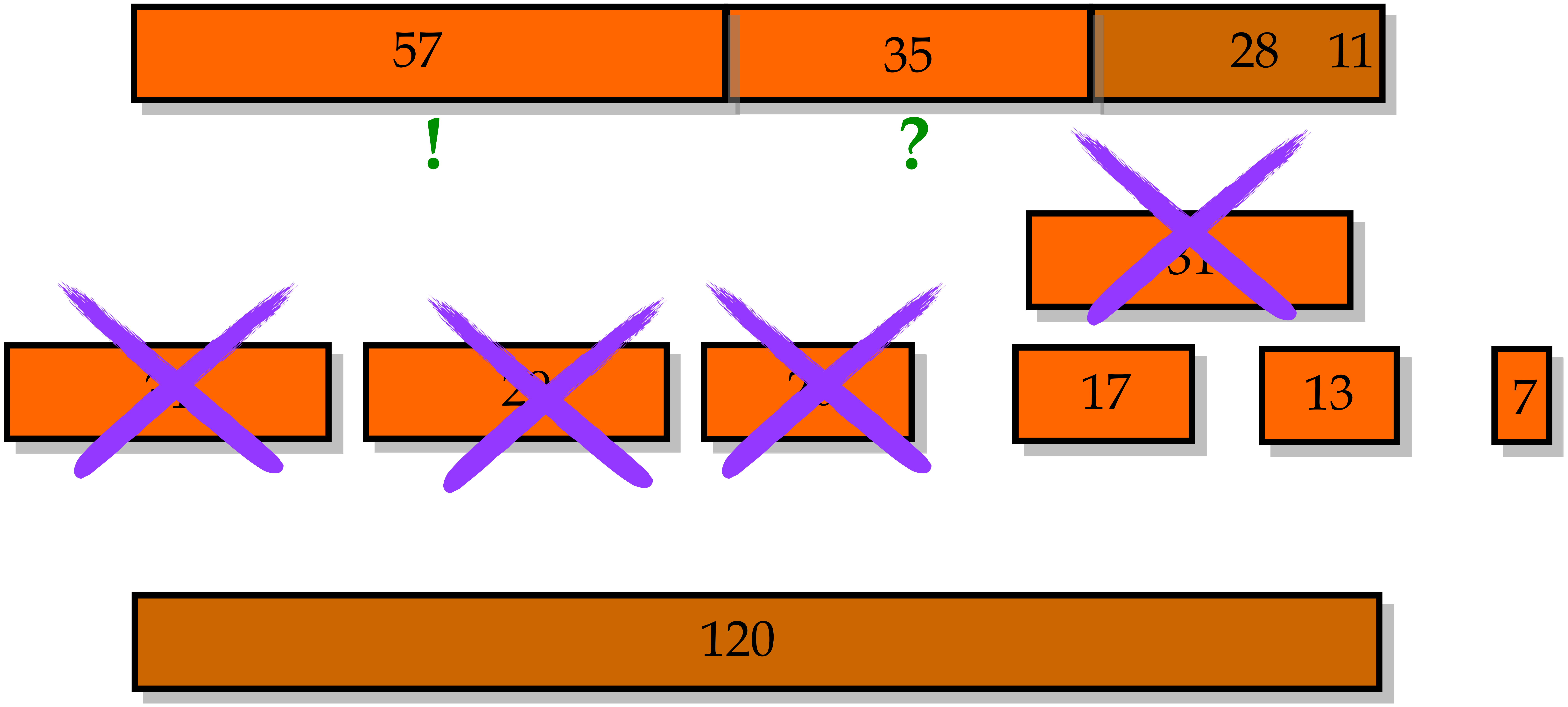
Keine Lösung?!



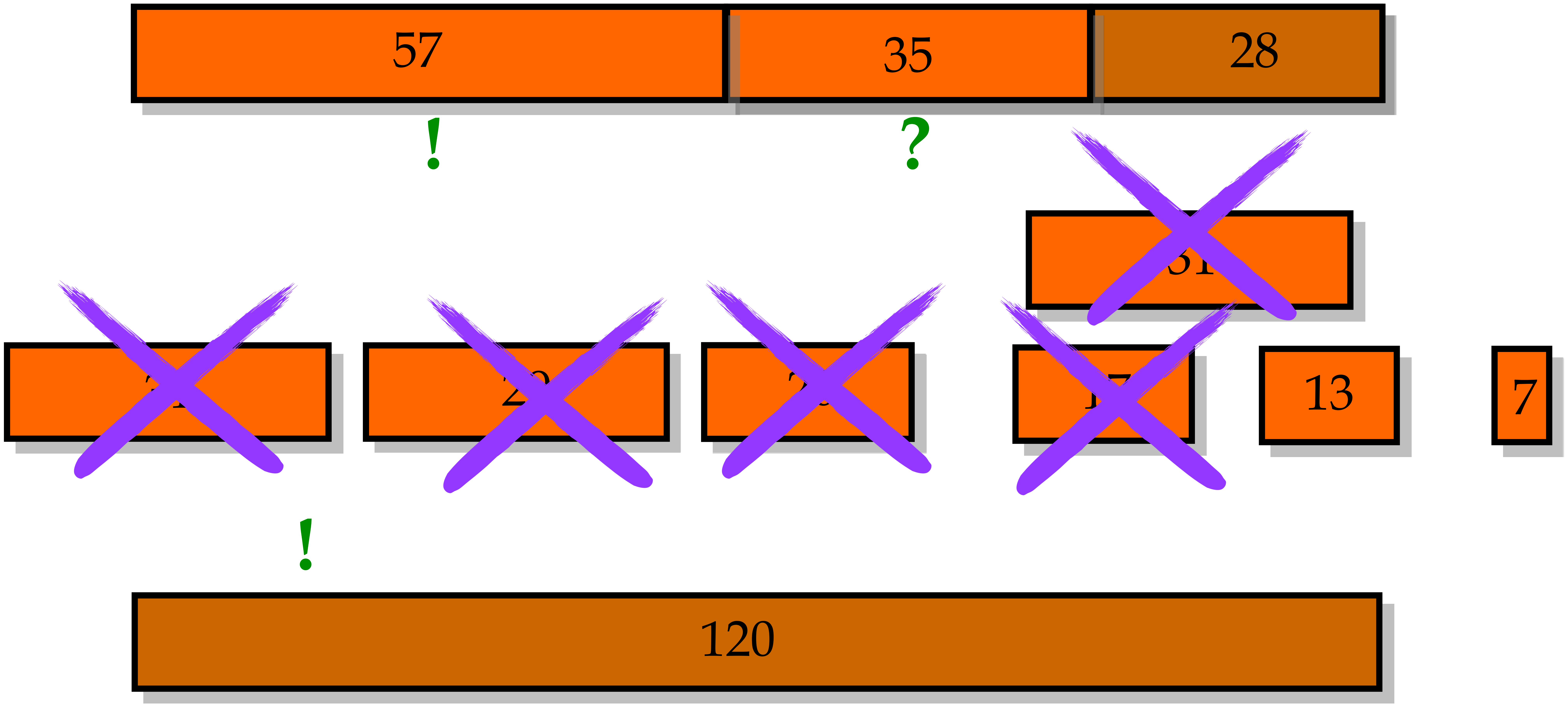
Keine Lösung?!



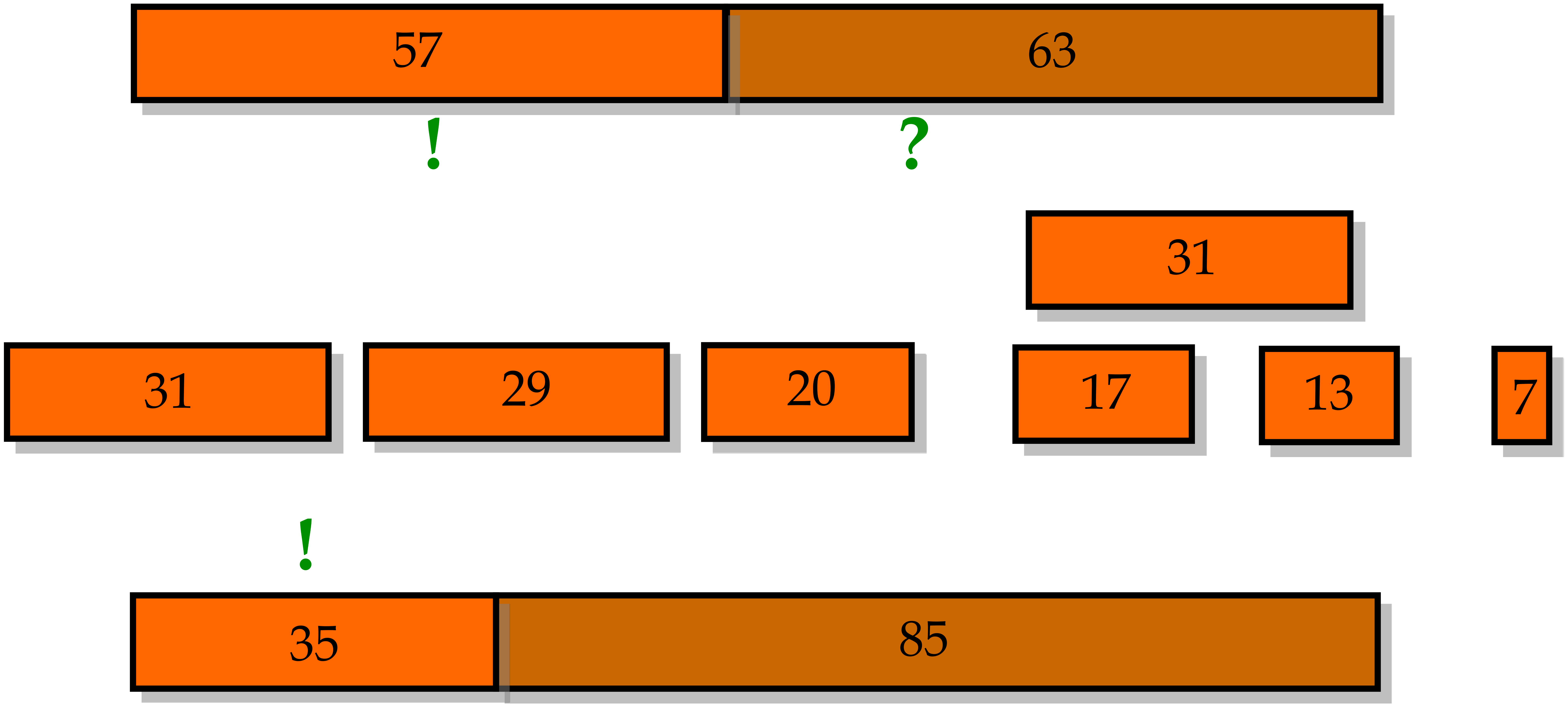
Keine Lösung?!



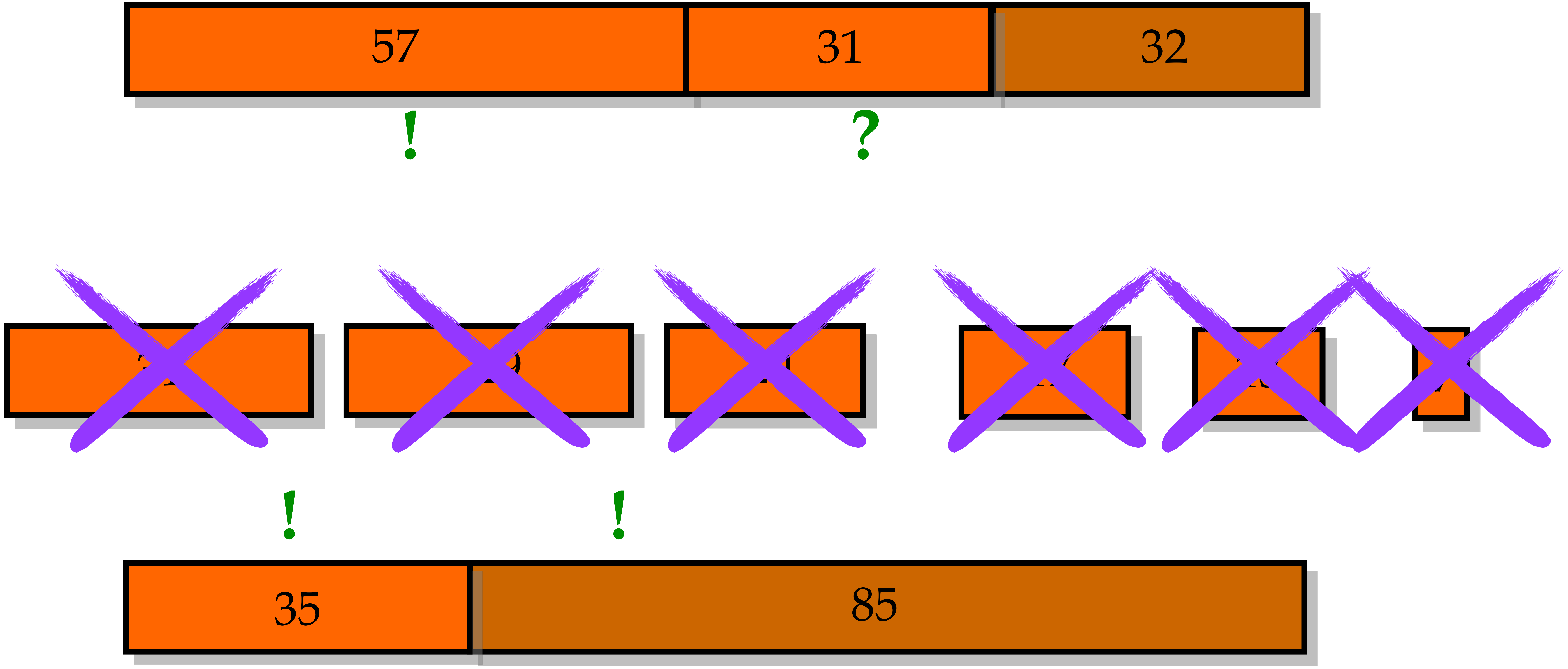
Keine Lösung?!



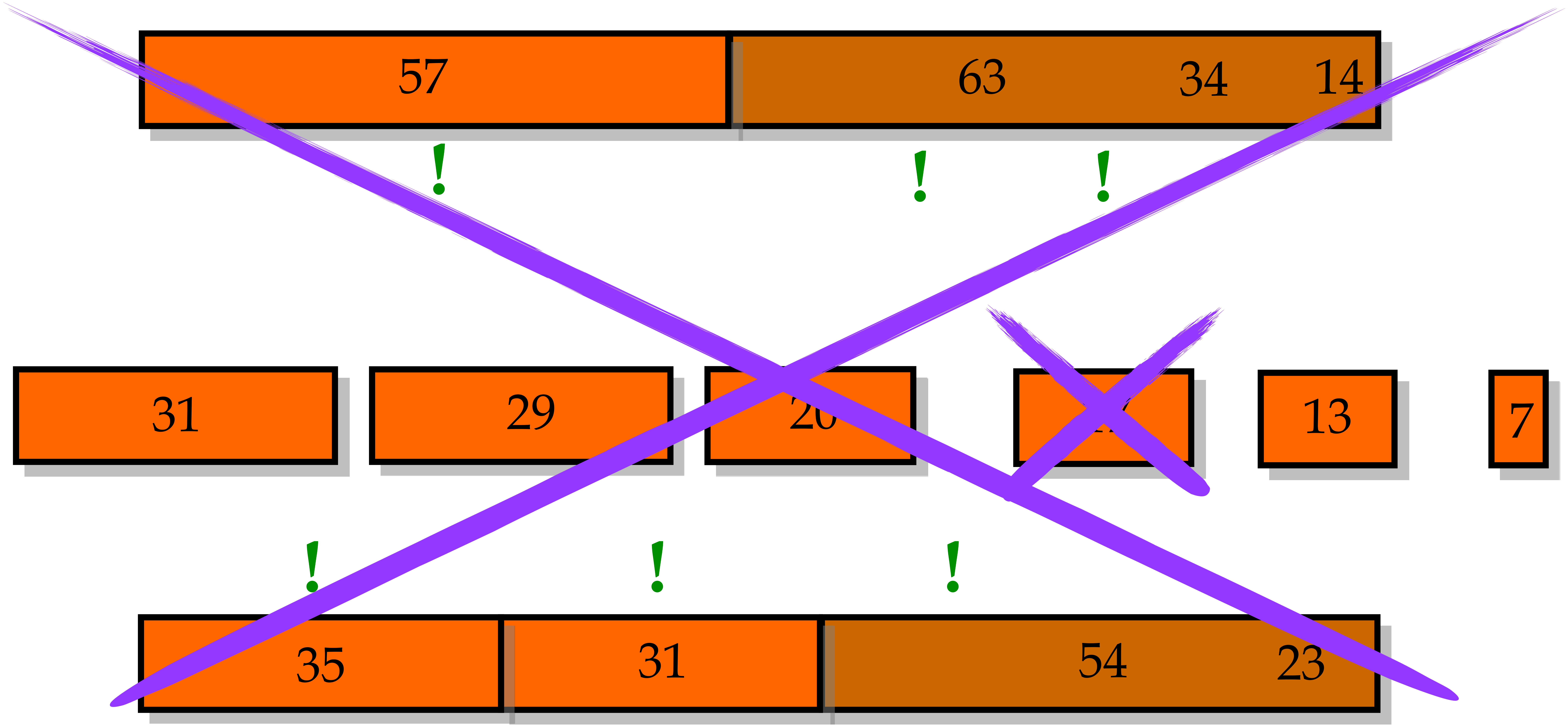
Keine Lösung?!



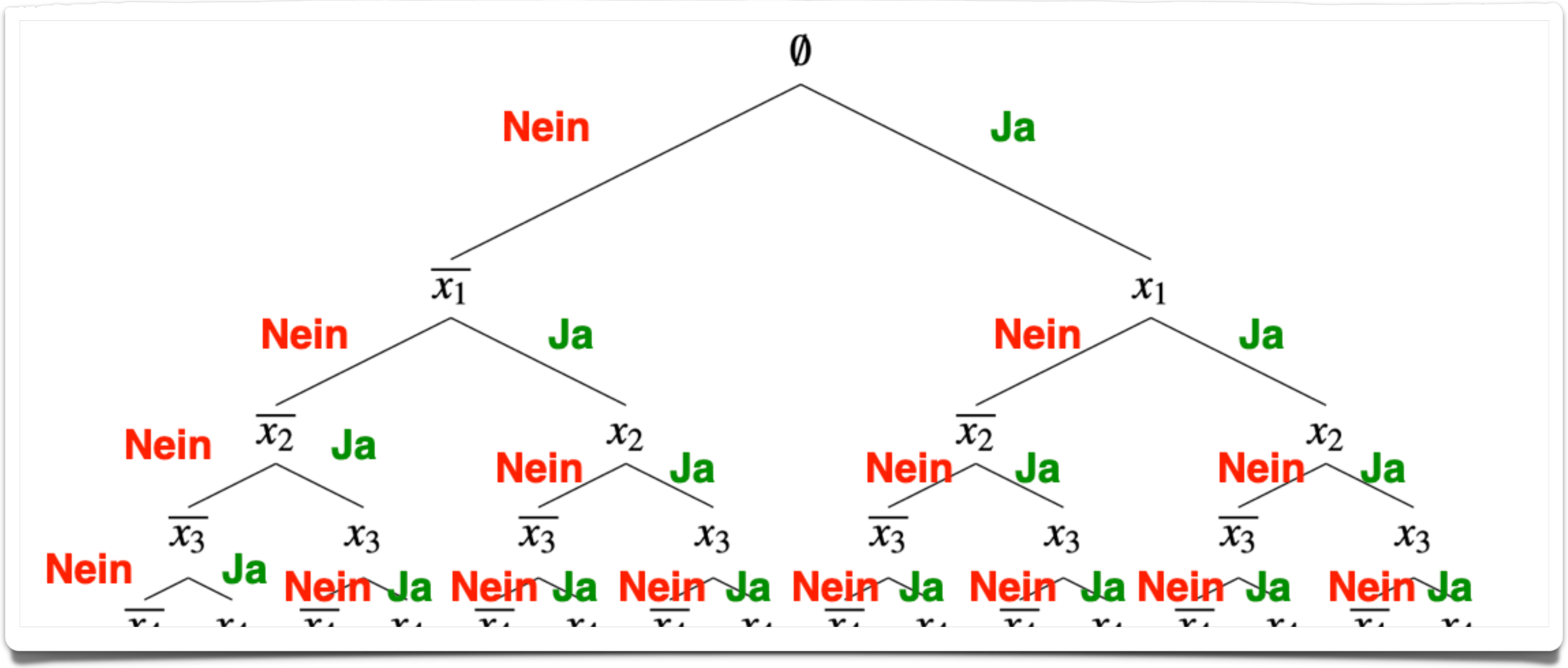
Keine Lösung?!



Keine Lösung?!

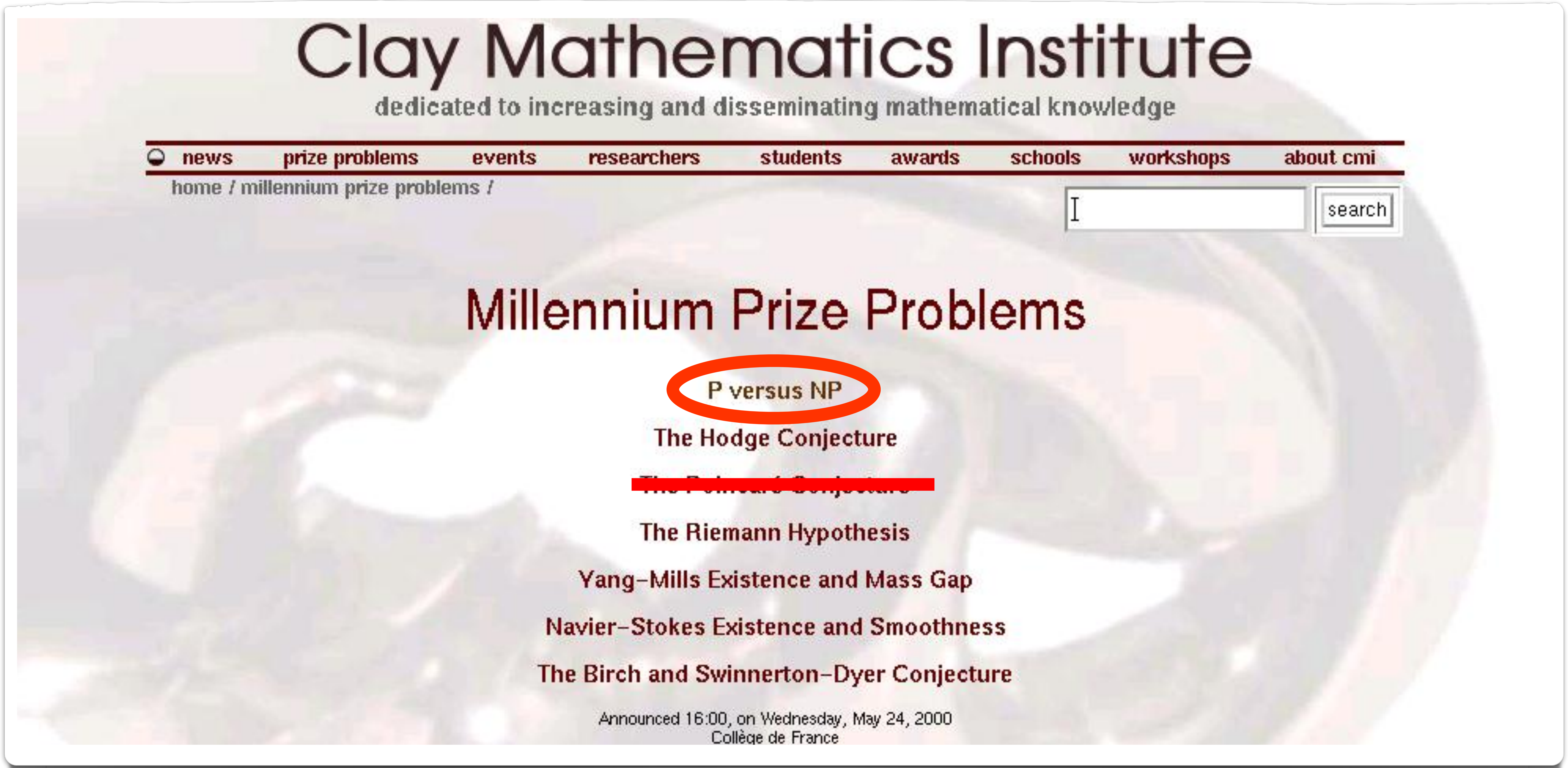


Enumeration



- Exponentiell viele Fälle!
- Kann man Arbeit sparen?

P vs. NP


Clay Mathematics Institute
dedicated to increasing and disseminating mathematical knowledge
news
prize problems
events
researchers
students
awards
schools
workshops
about cmi
home / millennium prize problems /
search
Millennium Prize Problems
P versus NP
The Hodge Conjecture
The Riemann Hypothesis
Yang–Mills Existence and Mass Gap
Navier–Stokes Existence and Smoothness
The Birch and Swinnerton–Dyer Conjecture
Announced 16:00, on Wednesday, May 24, 2000
Collège de France

Feinheiten

- Definition der Klasse NP über schnelle Verifizierbarkeit ist anschaulich.
- Eine formalere Definition (über nichtdeterministische Turingmaschinen) lernt man in Theoretischer Informatik.
- Genau genommen sind Probleme in der Klasse NP Entscheidungsprobleme: Gibt es eine Lösung?
- Die zugehörigen Optimierungsprobleme kann man aber durch eine Reihe von Entscheidungsproblemen lösen:
  - ✓ Gibt es eine Lösung mindestens vom Wert OPT?

5.3 Ein Beispiel mit Logik

Beispiel 5.5: Knapsack

Beispiel 5.5.
Wir betrachten die folgende Knapsack-Instanz mit $n = 12$, $z_i = p_i$, $Z = 111444$ und den folgenden Objekten:

Gibt es eine Menge $S \subseteq \{1, \ldots 12\}$ mit $\sum_{i \in S} z_i = \sum_{i \in S} p_i = Z$?

$$
\begin{aligned}
z_1 &= p_1 = & 100110 \\
z_2 &= p_2 = & 100001 \\
z_3 &= p_3 = & 10101 \\
z_4 &= p_4 = & 10010 \\
z_5 &= p_5 = & 1001 \\
z_6 &= p_6 = & 1110 \\
z_7 &= p_7 = & 200 \\
z_8 &= p_8 = & 100 \\
z_9 &= p_9 = & 20 \\
z_{10} &= p_{10} = & 10 \\
z_{11} &= p_{11} = & 2 \\
z_{12} &= p_{12} = & 1
\end{aligned}
$$

Beispiel 5.5: Beobachtungen

$x_1 \vee \overline{x_1}$	**1. Ziffer:** Man muss 1 oder 2 auswählen, aber nicht beide.
$x_2 \vee \overline{x_2}$	**2. Ziffer:** Man muss 3 oder 4 auswählen, aber nicht beide.
$x_3 \vee \overline{x_3}$	**3. Ziffer:** Man muss 5 oder 6 auswählen, aber nicht beide.
$(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3})$	**4. Ziffer:** Man muss 1, 3 oder 6 auswählen, dann kann man mit 7 und 8 den Wert 4 erzeugen.
$(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})$	**5. Ziffer:** Man muss 1, 4 oder 6 auswählen, dann kann man mit 9 und 10 den Wert 4 erzeugen.
$(\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3)$	**6. Ziffer:** Man muss 2, 3 oder 5 auswählen, dann kann man mit 11 und 12 den Wert 4 erzeugen.

$$
\begin{aligned}
z_1 = p_1 &= 100110 \\
z_2 = p_2 &= 100001 \\
z_3 = p_3 &= 10101 \\
z_4 = p_4 &= 10010 \\
z_5 = p_5 &= 1001 \\
z_6 = p_6 &= 1110 \\
z_7 = p_7 &= 200 \\
z_8 = p_8 &= 100 \\
z_9 = p_9 &= 20 \\
z_{10} = p_{10} &= 10 \\
z_{11} = p_{11} &= 2 \\
z_{12} = p_{12} &= 1
\end{aligned}
$$

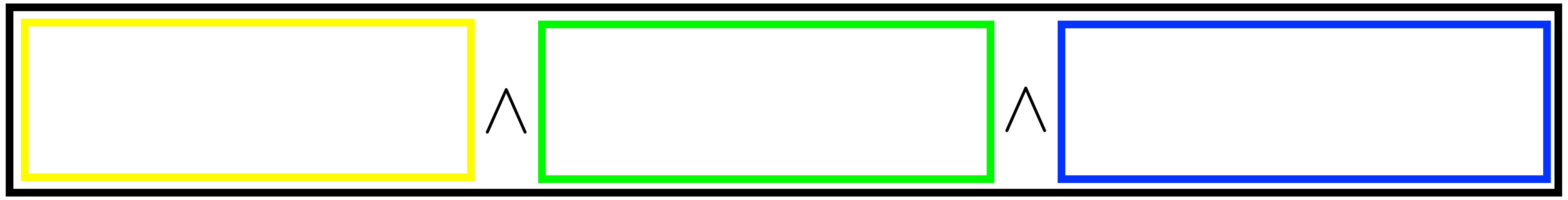
111444

Beispiel 5.5: Äquivalenz

$x_1 \vee \overline{x_1}$

$x_2 \vee \overline{x_2}$

$x_3 \vee \overline{x_3}$



$\Leftrightarrow$

z_1	$= p_1$	$=$	100110
z_2	$= p_2$	$=$	100001
z_3	$= p_3$	$=$	10101
z_4	$= p_4$	$=$	10010
z_5	$= p_5$	$=$	1001
z_6	$= p_6$	$=$	1110
z_7	$= p_7$	$=$	200
z_8	$= p_8$	$=$	100
z_9	$= p_9$	$=$	20
z_{10}	$= p_{10}$	$=$	10
z_{11}	$= p_{11}$	$=$	2
z_{12}	$= p_{12}$	$=$	1

111444

$(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3})$

$(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})$

$(\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3)$

Konkret: Jede Lösung der logischen Formel entspricht einer Lösung der Instanz SUBSET SUM — und umgekehrt.

Allgemein: Für jede logische Formel dieser Art lässt sich schnell eine äquivalente Instanz von SUBSET SUM konstruieren.

Also: Wenn wir einen „perfekten“ Algorithmus für SUBSET SUM haben, dann können wir auch schnell entscheiden, ob eine logische Formel lösbar ist.

Vielen Dank!

s.fekete@tu-bs.de