

# *Kapitel 3: Suche in Graphen*

*Algorithmen und Datenstrukturen*  
*WS 2022/23*

**Prof. Dr. Sándor Fekete**

# Konzentration



# Konzentration

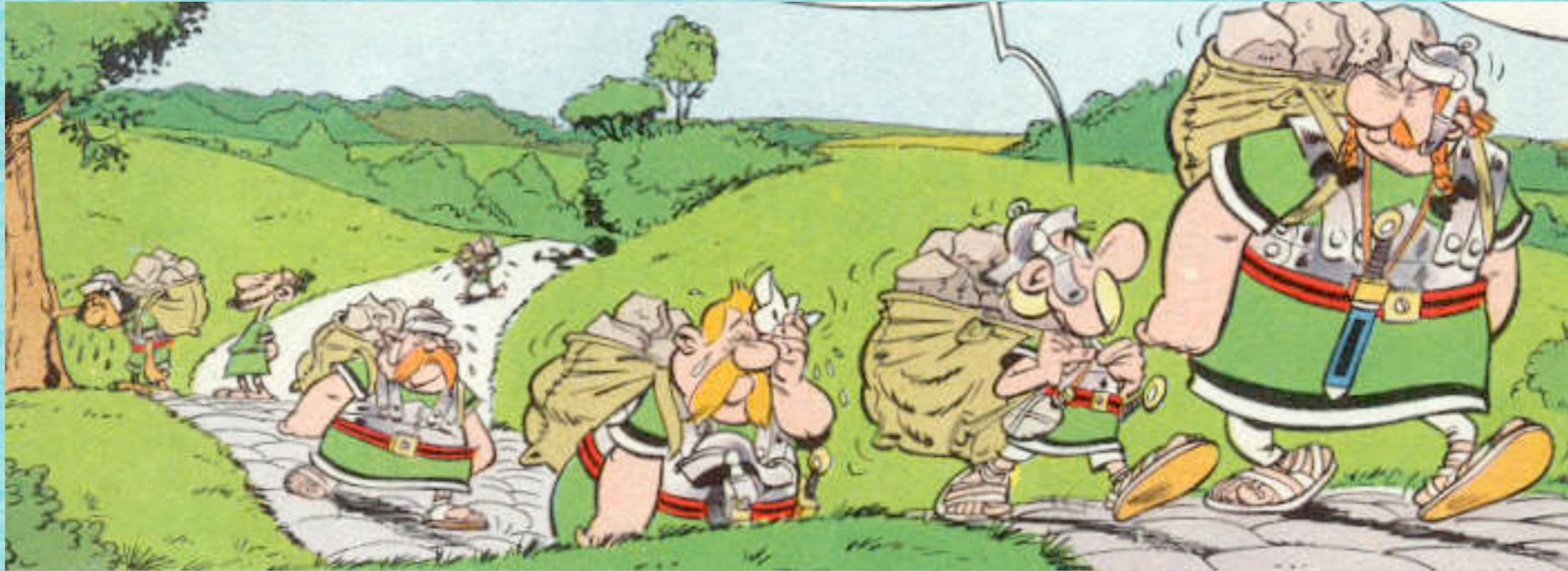


# Konzentration

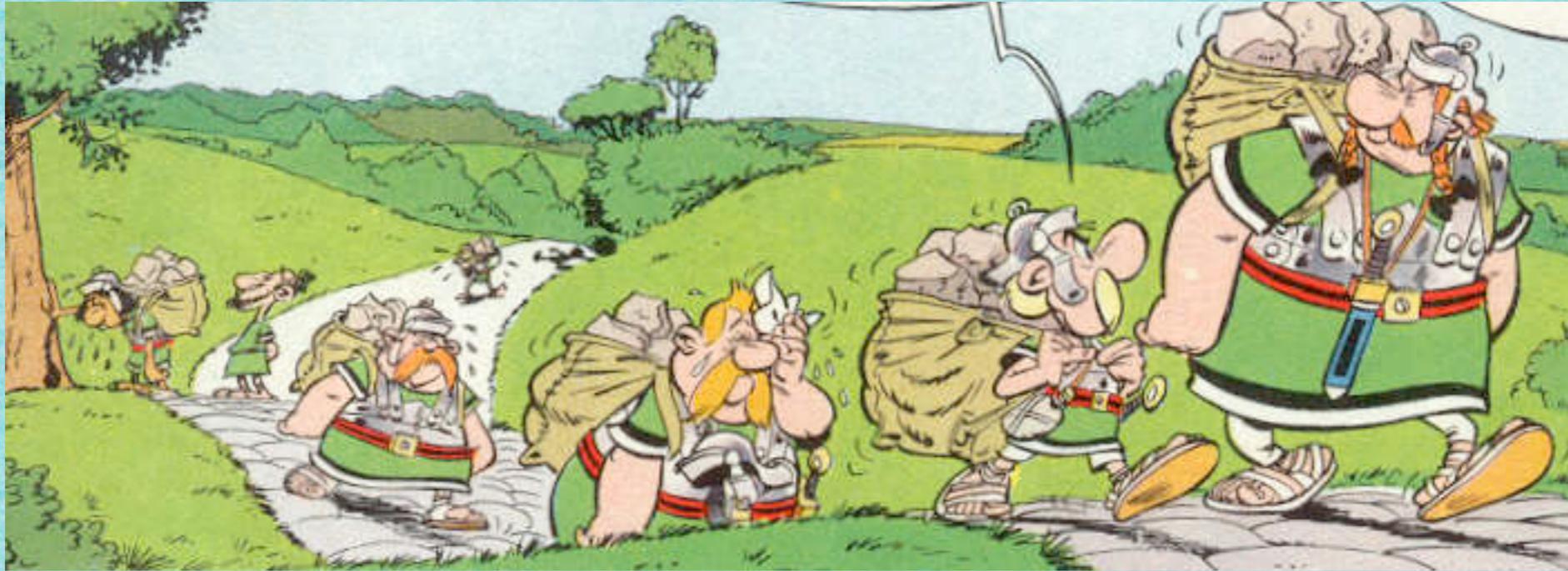


# Zwischenbemerkung!

# Zwischenbemerkung!



# Zwischenbemerkung!



# Grundlagentraining

# Zwischenbemerkung!

# Zwischenbemerkung!



# Zwischenbemerkung!



# Zwischenbemerkung!

Assistent

R. GOSCINNY **Asterix** A. UDERZO

Band 10

## **Asterix** als LEGIONÄR

Hiwi



# Zwischenbemerkung!

**Zwischenbemerkung!**

**Guttenbergix, Erfinder der Buchkopierkunst**

## Zwischenbemerkung!



Gutenbergix, Erfinder der Buchkopierkunst

# Zwischenbemerkung!

# Zwischenbemerkung!

A.1: Zufammenfassen - Kap. 13

a) Annahme  $\sqrt{2}$  ist rational

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Rightarrow \sqrt{2}q = 2q^2 - p^2 = p$$

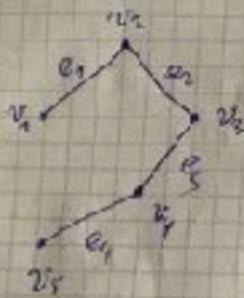
$$p = 2k$$

$$\Rightarrow 2q^2 = 4k^2$$

$$\Rightarrow q^2 = k^2$$

da  $\sqrt{2}$  gerade  $\Rightarrow q$  ist gerade  $\frac{p}{q} = \frac{2c}{2c} \rightarrow$

b)

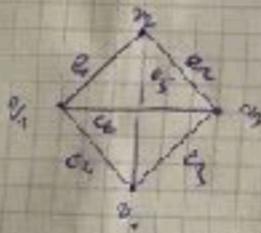


$$v_2 = (e_1, e_2)$$

$$v_3 = (e_3, e_4)$$

A.2:

a)



$v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_3 \rightarrow v_4 \rightarrow v_5$   
Bedingung eines Hamiltonkreises erfüllt. Da der Graph den Grad 3 besitzt, verbindet sich jeder Knoten und somit gibt es immer einen Hamiltonkreis

A.1:

a) Annahme  $\sqrt{2}$  ist rational

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Rightarrow \sqrt{2}q = 2q^2 - p^2 = p$$

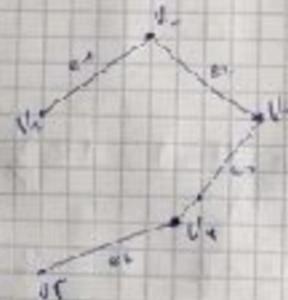
$$p = 2k$$

$$\Rightarrow 2q^2 = 4k^2$$

$$\Rightarrow q^2 = k^2$$

da  $\sqrt{2}$  gerade  $\Rightarrow q$  ist gerade  $\frac{p}{q} = \frac{2c}{2c} \rightarrow$

b)

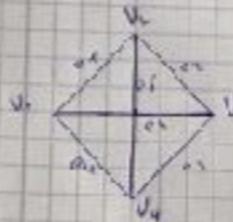


$$v_2 = (e_1, e_4)$$

$$v_3 = (e_2, e_5)$$

A.2:

a)



$$v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_3 \rightarrow v_4 \rightarrow v_5$$

Bedingung eines Hamiltonkreises erfüllt. Da der Graph den Grad 3 besitzt, verbindet sich jeder Knoten und somit gibt es immer einen Hamiltonkreis

# Zwischenbemerkung!

A.1:  
Zugewandte Mathematik - Kapitel 13  
a) Annahme  $\sqrt{2}$  ist rational  
 $\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Rightarrow \sqrt{2}q = 2q^2 - p^2 = p$   
 $p = 2k$   
 $\Rightarrow 2q^2 = 4k^2$   
 $\Rightarrow q^2 = 2k^2$   
da  $q$  gerade  $\Rightarrow q$  ist gerade  $\frac{p}{q} = \frac{2c}{2c} \rightarrow$

A.1:  
a) Annahme  $\sqrt{2}$  ist rational  
 $\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Rightarrow \sqrt{2}q = 2q^2 - p^2 = p$   
 $p = 2k$   
 $\Rightarrow 2q^2 = 4k^2$   
 $\Rightarrow q^2 = 2k^2$

- (4) Versucht der Prüfling, das Ergebnis seiner Studien- oder Prüfungsleistung durch Täuschung oder Benutzung nicht zugelassener Hilfsmittel zu beeinflussen, gilt die betreffende Studien- oder Prüfungsleistung als mit „nicht bestanden“ bzw. „nicht ausreichend“ bewertet. Schon das Mitführen eines zu Täuschungszwecken geeigneten Hilfsmittels im Prüfungsraum gilt als Täuschung. Erlaubte Hilfsmittel und der Umgang mit zu Täuschungszwecken geeigneten Hilfsmitteln werden durch die Prüfende oder den Prüfenden vor Prüfungsbeginn bekanntgegeben. In besonders schweren Fällen kann der Prüfungsausschuss zusätzlich das endgültige Nichtbestehen der Prüfungs- oder der Studienleistung und damit das Scheitern in dem Studiengang feststellen. Ein besonders schwerer Fall liegt insbesondere bei Plagiaten, Verwendung nicht zugelassener elektronischer Hilfsmittel, auch zur Kommunikation während der Prüfung, bei organisiertem Zusammenwirken mehrerer Personen und bei Wiederholungsfällen vor. Ein Prüfling, der den ordnungsgemäßen Ablauf der Prüfung stört, kann von der oder dem jeweils Prüfenden oder Aufsichtsführenden von der Fortsetzung der Prüfung ausgeschlossen werden; in diesem Fall gilt die betreffende Prüfung als mit „nicht ausreichend“ bzw. „nicht bestanden“ bewertet. Der Prüfling, der nach Satz 1 einer Täuschung verdächtig ist, darf nach Herausgabe des Täuschungsmittels die Prüfung fortsetzen. Das Täuschungsmittel kann bis zum Abschluss des Verfahrens konfisziert werden. Das Täuschungsmittel wird spätestens mit Bestandskraft der Entscheidung zurückgegeben.

besteht nicht  
immer

# Zwischenbemerkung!

A.1:  $\sqrt{2}$  ist irrational

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Rightarrow \sqrt{2}q = 2q^2 - p^2 = p$$
$$p = 2k$$
$$\Rightarrow 2q^2 = 4k^2$$
$$\Rightarrow q^2 = 2k^2$$

oder  $q$  ist gerade  $\Rightarrow q$  ist gerade  $\frac{p}{q} = \frac{2c}{2d} \rightarrow$

A.1:  $\sqrt{2}$  ist irrational

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Rightarrow \sqrt{2}q = 2q^2 - p^2 = p$$
$$p = 2k$$
$$\Rightarrow 2q^2 = 4k^2$$
$$\Rightarrow q^2 = 2k^2$$

- (4) Versucht der Prüfling, das Ergebnis seiner **Studien- oder Prüfungsleistung** durch Täuschung oder Benutzung nicht zugelassener Hilfsmittel zu beeinflussen, gilt die betreffende Studien- oder Prüfungsleistung als mit „nicht bestanden“ bzw. „nicht ausreichend“ bewertet. Schon das Mitführen eines zu Täuschungszwecken geeigneten Hilfsmittels im Prüfungsraum gilt als Täuschung. Erlaubte Hilfsmittel und der Umgang mit zu Täuschungszwecken geeigneten Hilfsmitteln werden durch die Prüfende oder den Prüfenden vor Prüfungsbeginn bekanntgegeben. In besonders schweren Fällen kann der Prüfungsausschuss zusätzlich das endgültige Nichtbestehen der Prüfungs- oder der Studienleistung und damit das Scheitern in dem Studiengang feststellen. Ein besonders schwerer Fall liegt insbesondere bei Plagiaten, Verwendung nicht zugelassener elektronischer Hilfsmittel, auch zur Kommunikation während der Prüfung, bei organisiertem Zusammenwirken mehrerer Personen und bei Wiederholungsfällen vor. Ein Prüfling, der den ordnungsgemäßen Ablauf der Prüfung stört, kann von der oder dem jeweils Prüfenden oder Aufsichtsführenden von der Fortsetzung der Prüfung ausgeschlossen werden; in diesem Fall gilt die betreffende Prüfung als mit „nicht ausreichend“ bzw. „nicht bestanden“ bewertet. Der Prüfling, der nach Satz 1 einer Täuschung verdächtig ist, darf nach Herausgabe des Täuschungsmittels die Prüfung fortsetzen. Das Täuschungsmittel kann bis zum Abschluss des Verfahrens konfisziert werden. Das Täuschungsmittel wird spätestens mit Bestandskraft der Entscheidung zurückgegeben.

besteht nicht  
immer

# Zwischenbemerkung!

A.1:  $\sqrt{2}$  ist irrational

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Rightarrow \sqrt{2}q = 2q^2 - p^2 = p$$
$$p = 2k$$
$$\Rightarrow 2q^2 = 4k^2$$
$$\Rightarrow q^2 = 2k^2$$

da  $q$  gerade  $\Rightarrow q$  ist gerade  $\frac{p}{q} = \frac{2c}{2c} \rightarrow$

A.1:  $\sqrt{2}$  ist irrational

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Rightarrow \sqrt{2}q = 2q^2 - p^2 = p$$
$$p = 2k$$
$$\Rightarrow 2q^2 = 4k^2$$
$$\Rightarrow q^2 = 2k^2$$

- (4) Versucht der Prüfling, das Ergebnis seiner **Studien- oder Prüfungsleistung** durch Täuschung oder Benutzung nicht zugelassener Hilfsmittel zu beeinflussen, gilt die betreffende Studien- oder Prüfungsleistung als mit „nicht bestanden“ bzw. „nicht ausreichend“ bewertet. Schon das Mitführen eines zu Täuschungszwecken geeigneten Hilfsmittels im Prüfungsraum gilt als Täuschung. Erlaubte Hilfsmittel und der Umgang mit zu Täuschungszwecken geeigneten Hilfsmitteln werden durch die Prüfende oder den Prüfenden vor Prüfungsbeginn bekanntgegeben. **In besonders schweren Fällen kann der Prüfungsausschuss zusätzlich das endgültige Nichtbestehen der Prüfungs- oder der Studienleistung und damit das Scheitern in dem Studiengang feststellen.** Ein besonders schwerer Fall liegt insbesondere bei Plagiaten, Verwendung nicht zugelassener elektronischer Hilfsmittel, auch zur Kommunikation während der Prüfung, bei organisiertem Zusammenwirken mehrerer Personen und bei Wiederholungsfällen vor. Ein Prüfling, der den ordnungsgemäßen Ablauf der Prüfung stört, kann von der oder dem jeweils Prüfenden oder Aufsichtsführenden von der Fortsetzung der Prüfung ausgeschlossen werden; in diesem Fall gilt die betreffende Prüfung als mit „nicht ausreichend“ bzw. „nicht bestanden“ bewertet. Der Prüfling, der nach Satz 1 einer Täuschung verdächtig ist, darf nach Herausgabe des Täuschungsmittels die Prüfung fortsetzen. Das Täuschungsmittel kann bis zum Abschluss des Verfahrens konfisziert werden. Das Täuschungsmittel wird spätestens mit Bestandskraft der Entscheidung zurückgegeben.

# Zwischenbemerkung!

A.1:  $\sqrt{2}$  ist irrational

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Rightarrow \sqrt{2}q = 2q^2 - p^2 = p$$
$$p = 2k$$
$$\Rightarrow 2q^2 = 4k^2$$
$$\Rightarrow q^2 = 2k^2$$

da  $q$  gerade  $\Rightarrow q$  ist gerade  $\frac{p}{q} = \frac{2c}{2d} \rightarrow$

A.1:  $\sqrt{2}$  ist irrational

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Rightarrow \sqrt{2}q = 2q^2 - p^2 = p$$
$$p = 2k$$
$$\Rightarrow 2q^2 = 4k^2$$
$$\Rightarrow q^2 = 2k^2$$

- (4) Versucht der Prüfling, das Ergebnis seiner **Studien- oder Prüfungsleistung** durch Täuschung oder Benutzung nicht zugelassener Hilfsmittel zu beeinflussen, gilt die betreffende Studien- oder Prüfungsleistung als mit „nicht bestanden“ bzw. „nicht ausreichend“ bewertet. Schon das Mitführen eines zu Täuschungszwecken geeigneten Hilfsmittels im Prüfungsraum gilt als Täuschung. Erlaubte Hilfsmittel und der Umgang mit zu Täuschungszwecken geeigneten Hilfsmitteln werden durch die Prüfende oder den Prüfenden vor Prüfungsbeginn bekanntgegeben. **In besonders schweren Fällen kann der Prüfungsausschuss zusätzlich das endgültige Nichtbestehen der Prüfungs- oder der Studienleistung und damit das Scheitern in dem Studiengang feststellen.** Ein besonders schwerer Fall liegt insbesondere bei **Plagiaten**, Verwendung nicht zugelassener elektronischer Hilfsmittel, auch zur Kommunikation während der Prüfung, bei organisiertem Zusammenwirken mehrerer Personen und bei **Wiederholungsfällen vor.** Ein Prüfling, der den ordnungsgemäßen Ablauf der Prüfung stört, kann von der oder dem jeweils Prüfenden oder Aufsichtsführenden von der Fortsetzung der Prüfung ausgeschlossen werden; in diesem Fall gilt die betreffende Prüfung als mit „nicht ausreichend“ bzw. „nicht bestanden“ bewertet. Der Prüfling, der nach Satz 1 einer Täuschung verdächtig ist, darf nach Herausgabe des Täuschungsmittels die Prüfung fortsetzen. Das Täuschungsmittel kann bis zum Abschluss des Verfahrens konfisziert werden. Das Täuschungsmittel wird spätestens mit Bestandskraft der Entscheidung zurückgegeben.

# Zwischenbemerkung!

A.1: Zufammenfassen - Aufgabe 13

a) Annahme  $\sqrt{2}$  ist rational

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Rightarrow \sqrt{2}q = 2q^2 - p^2 = p$$

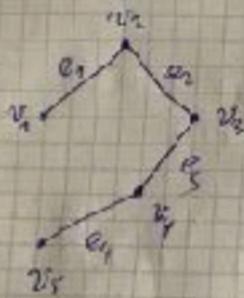
$$p = 2k$$

$$\Rightarrow 2q^2 = 4k^2$$

$$\Rightarrow q^2 = k^2$$

da  $\sqrt{2}$  gerade  $\Rightarrow q$  ist gerade  $\frac{p}{q} = \frac{2c}{2c} \rightarrow$

b)

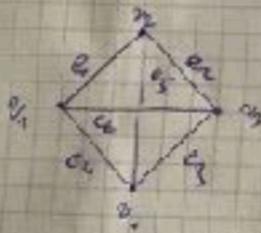


$$v_2 = (e_1, e_2)$$

$$v_3 = (e_3, e_4)$$

A.2:

a)



$v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_3 \rightarrow v_4 \rightarrow v_1$   
 Bedingung eines Hamiltonkreises erfüllt. Da der Graph den Grad 3 besitzt, verbindet sich jeder Knoten und somit gibt es immer einen Hamiltonkreis

A.1:

a) Annahme  $\sqrt{2}$  ist rational

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Rightarrow \sqrt{2}q = 2q^2 - p^2 = p$$

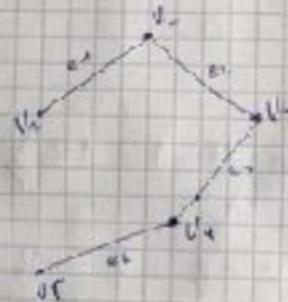
$$p = 2k$$

$$\Rightarrow 2q^2 = 4k^2$$

$$\Rightarrow q^2 = k^2$$

da  $\sqrt{2}$  gerade  $\Rightarrow q$  ist gerade  $\frac{p}{q} = \frac{2c}{2c} \rightarrow$

b)

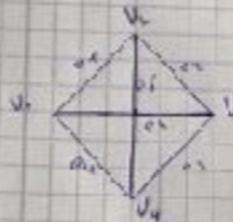


$$v_2 = (e_1, e_2)$$

$$v_3 = (e_3, e_4)$$

A.2:

a)

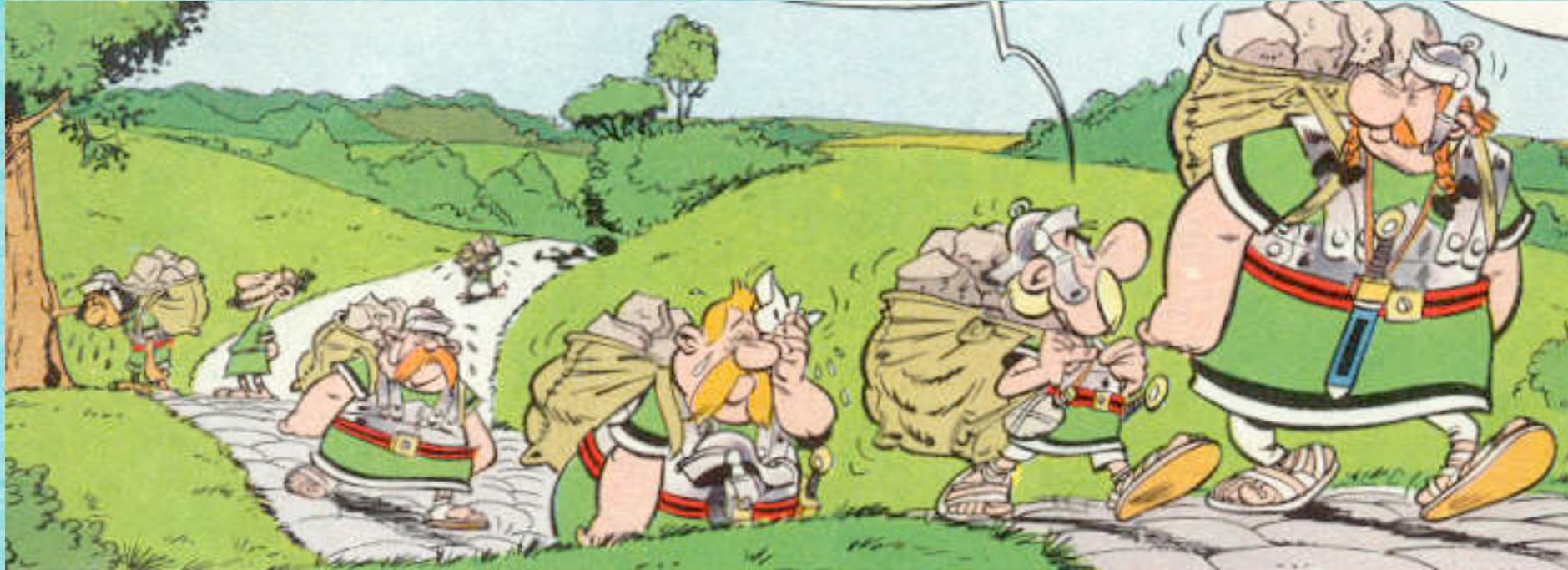


$$v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_3 \rightarrow v_4 \rightarrow v_1$$

Bedingung eines Hamiltonkreises erfüllt. Da der Graph den Grad 3 besitzt, verbindet sich jeder Knoten und somit gibt es immer einen Hamiltonkreis

# Zwischenbemerkung!

# Zwischenbemerkung!



# Konzentration

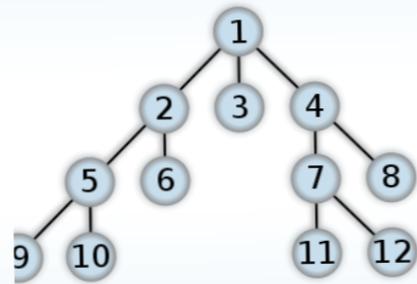


# Konzentration



# Konzentration





# *Kapitel 3: Suche in Graphen*

*Algorithmen und Datenstrukturen*  
*WS 2022/23*

**Prof. Dr. Sándor Fekete**

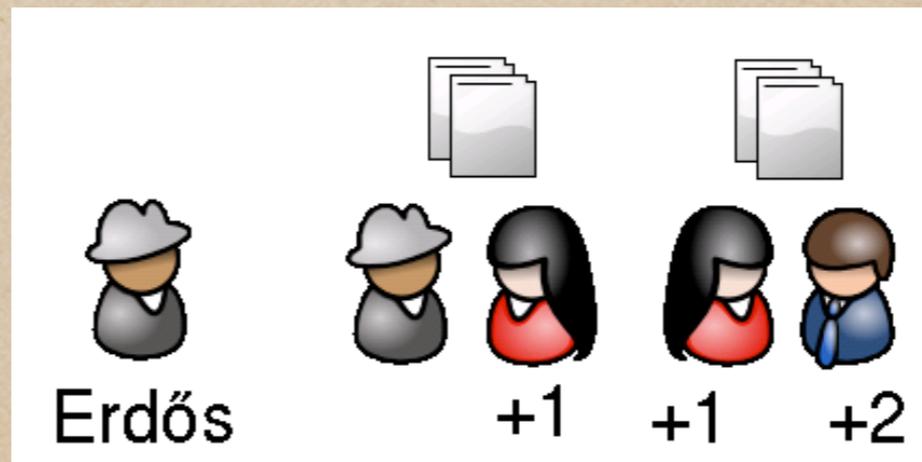
## 3.1 Vorspann

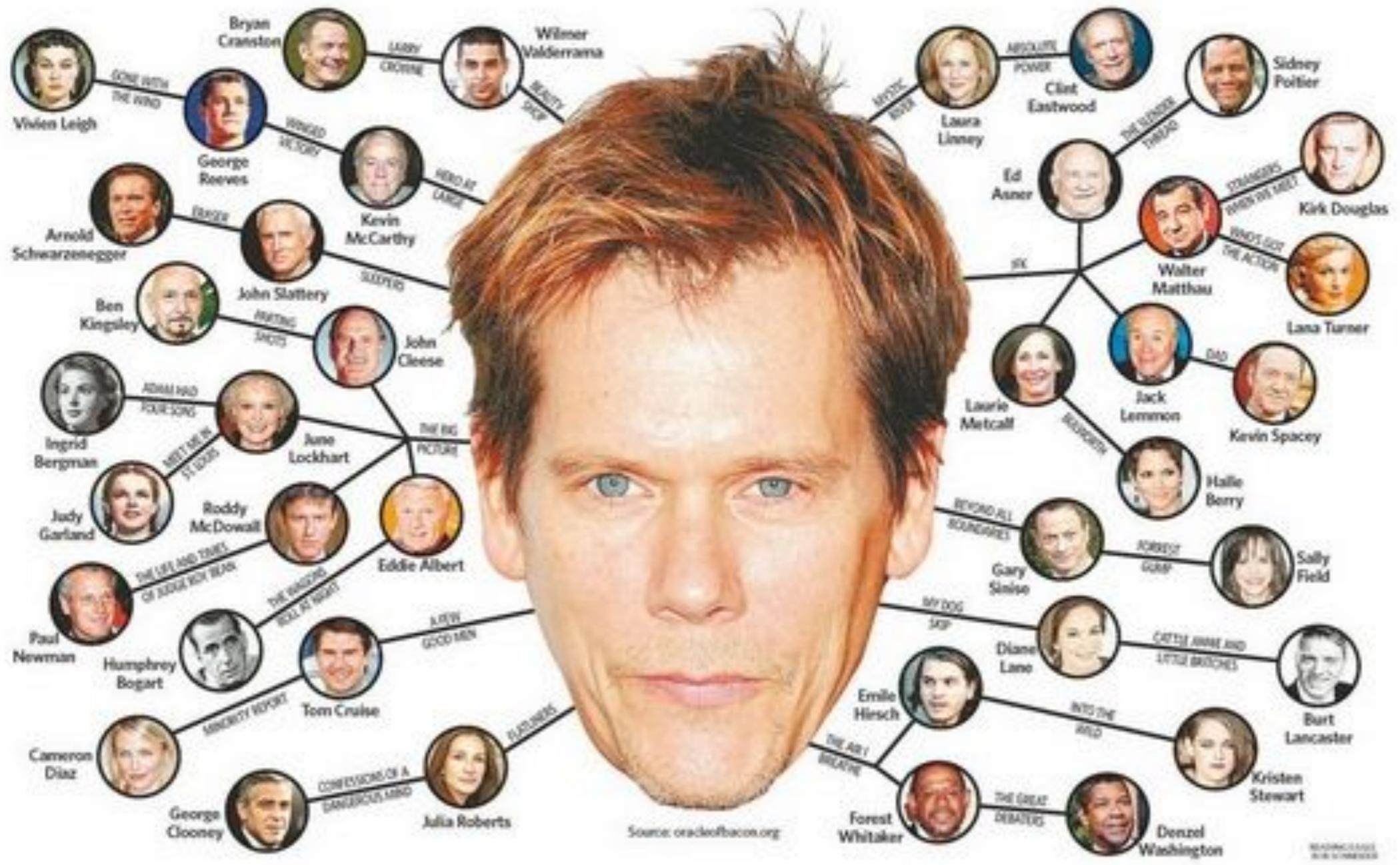


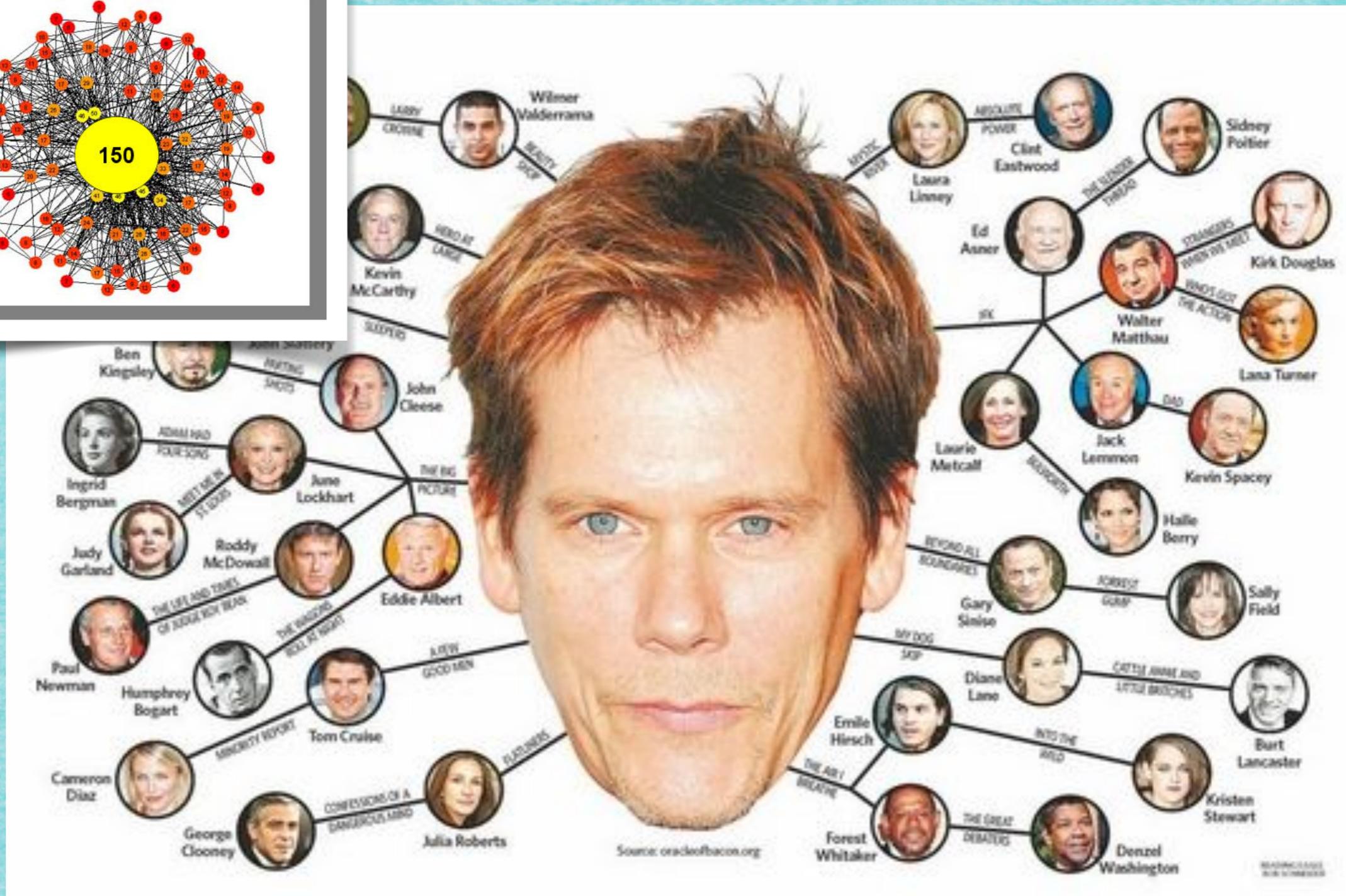
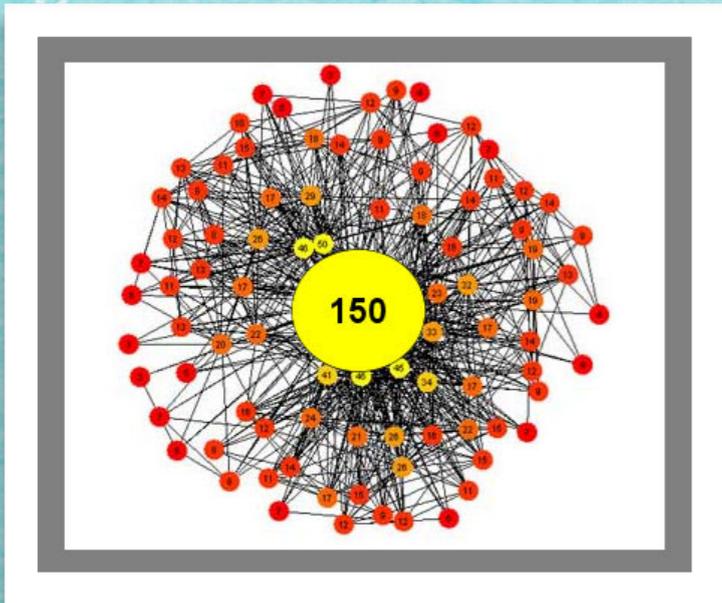
Paul Erdős, 1913-1996

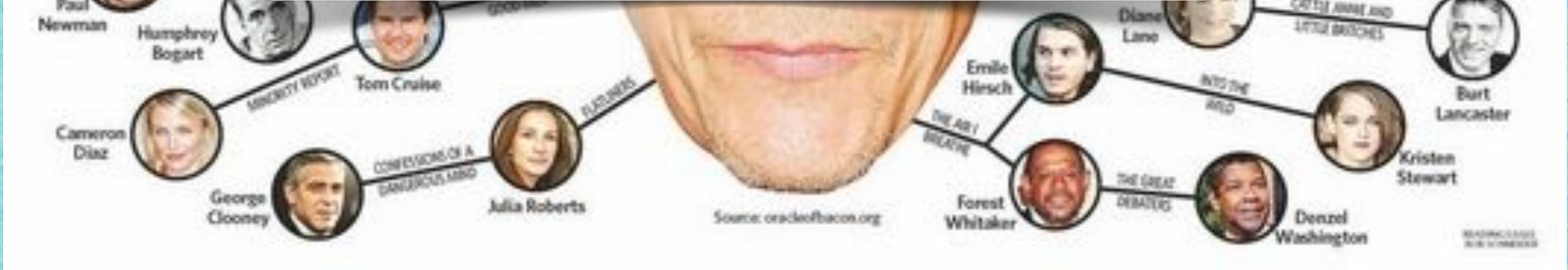
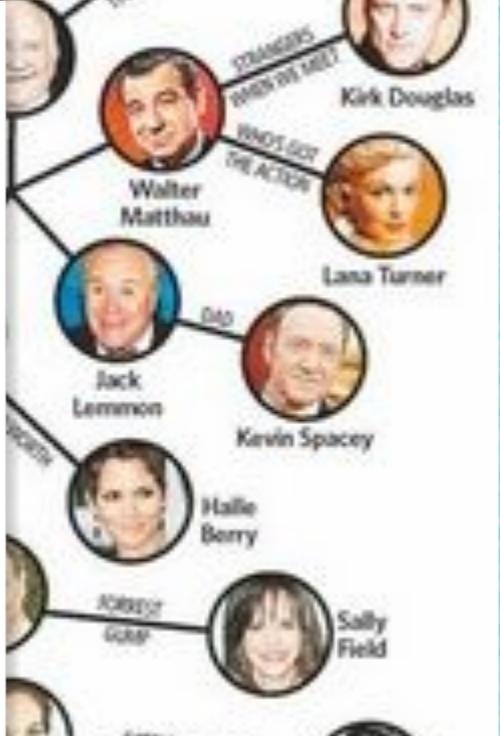
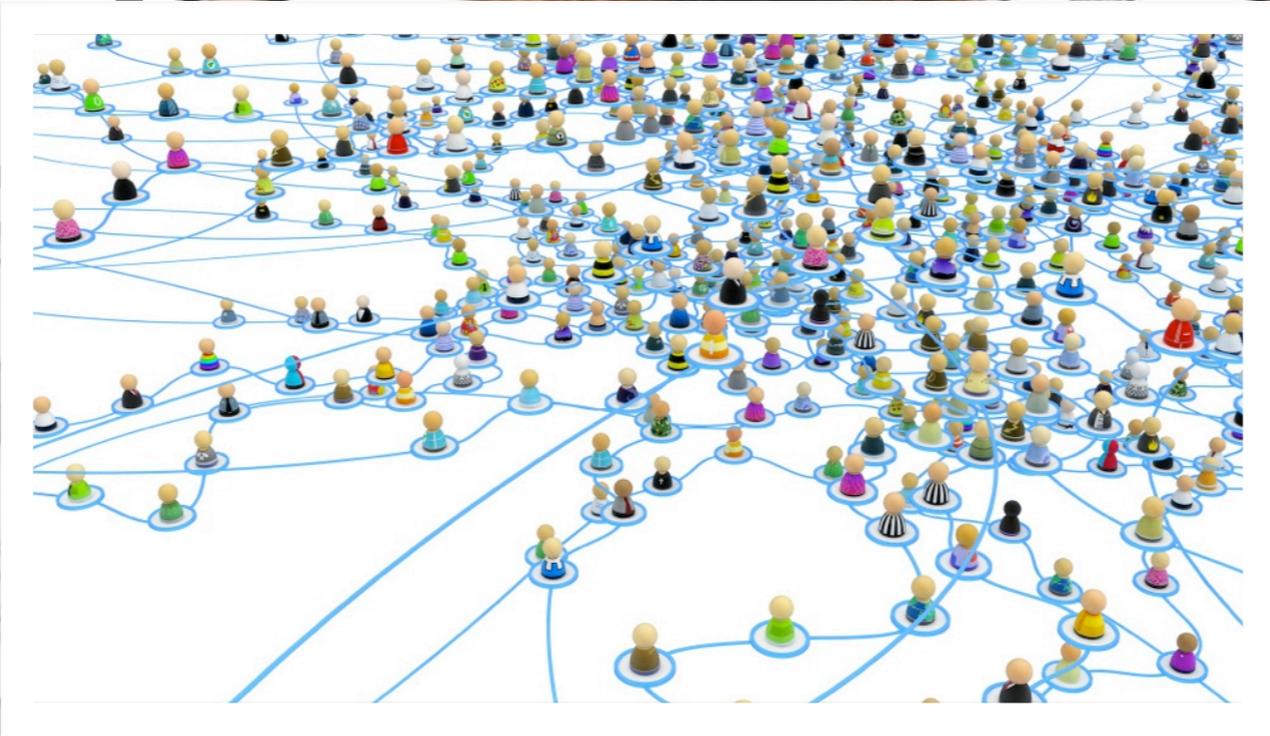
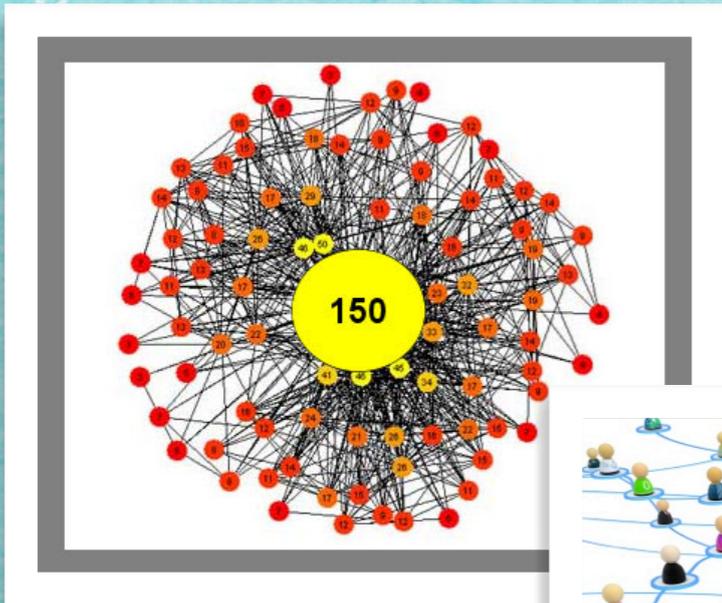
- *Produktivster Mathematiker aller Zeiten (~1500 Artikel)*
- *“Zweitbedeutendster Mathematiker nach Euler”*

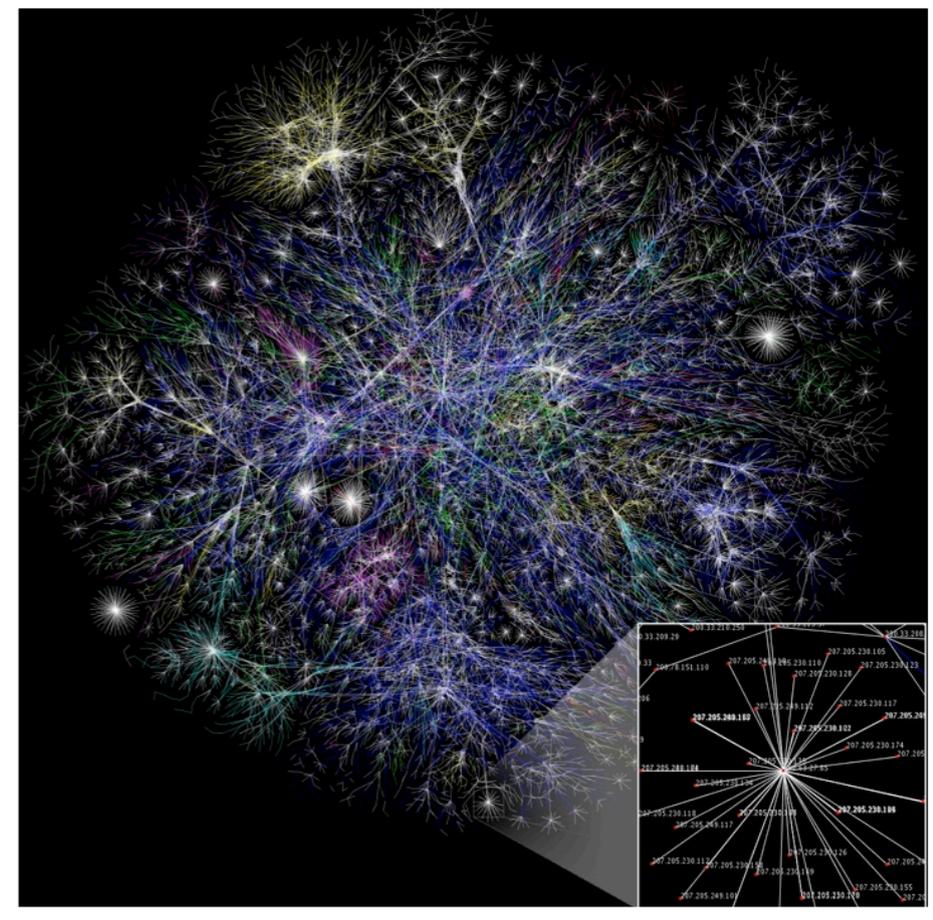
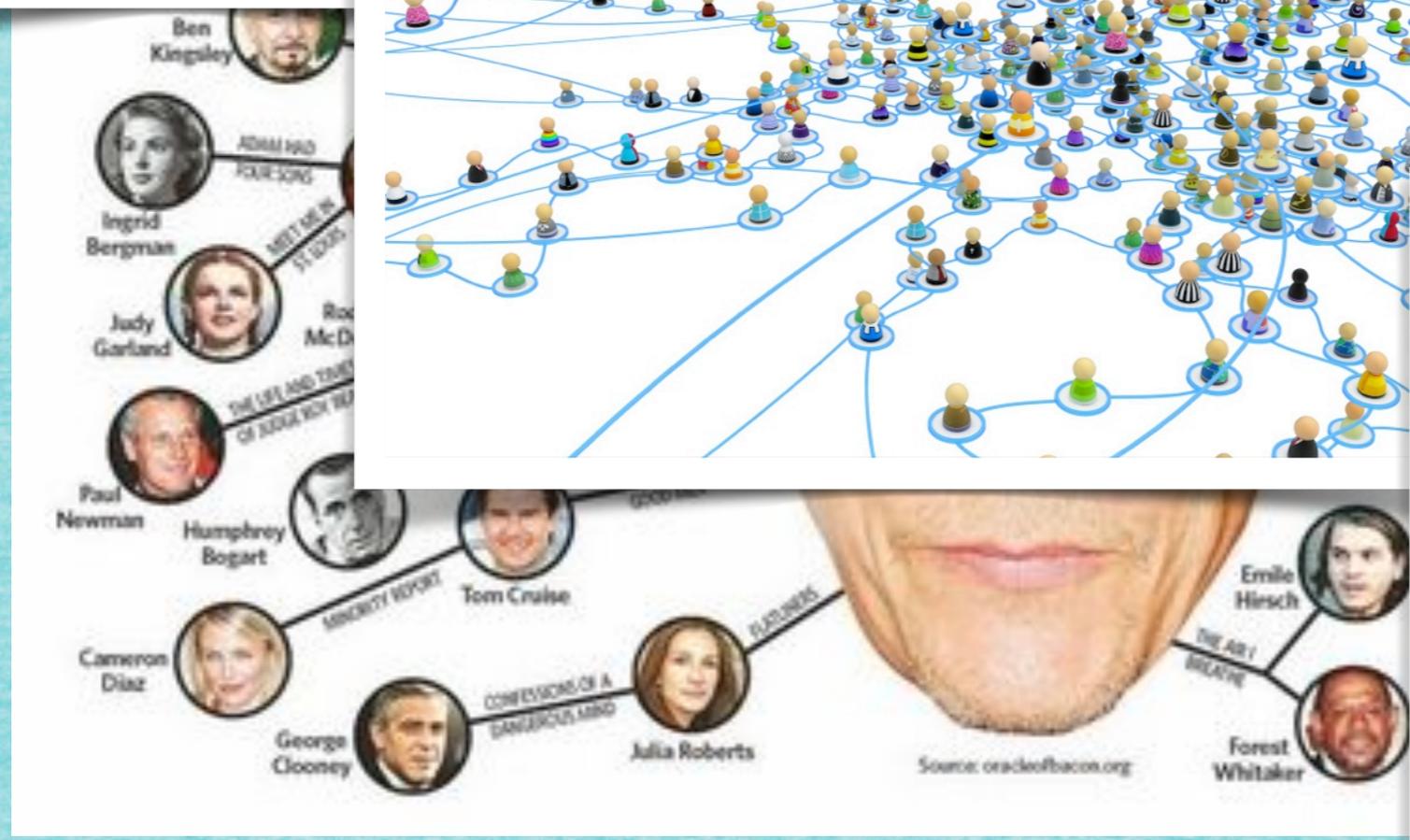
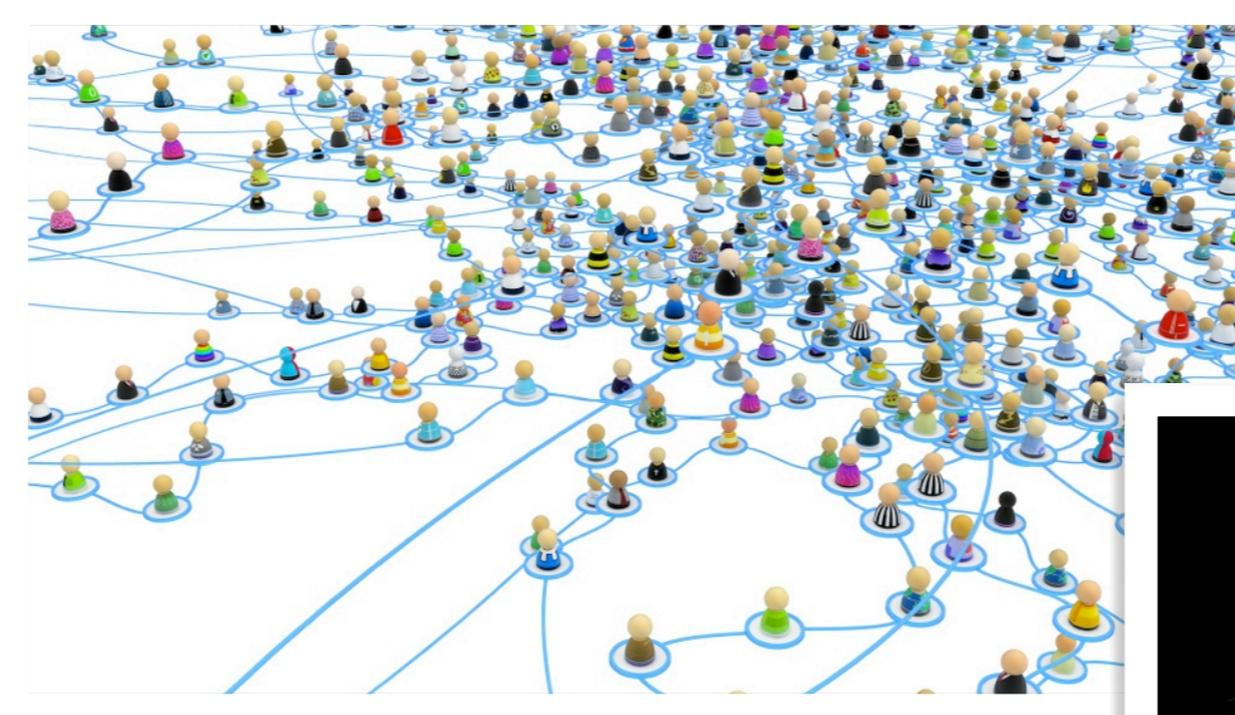
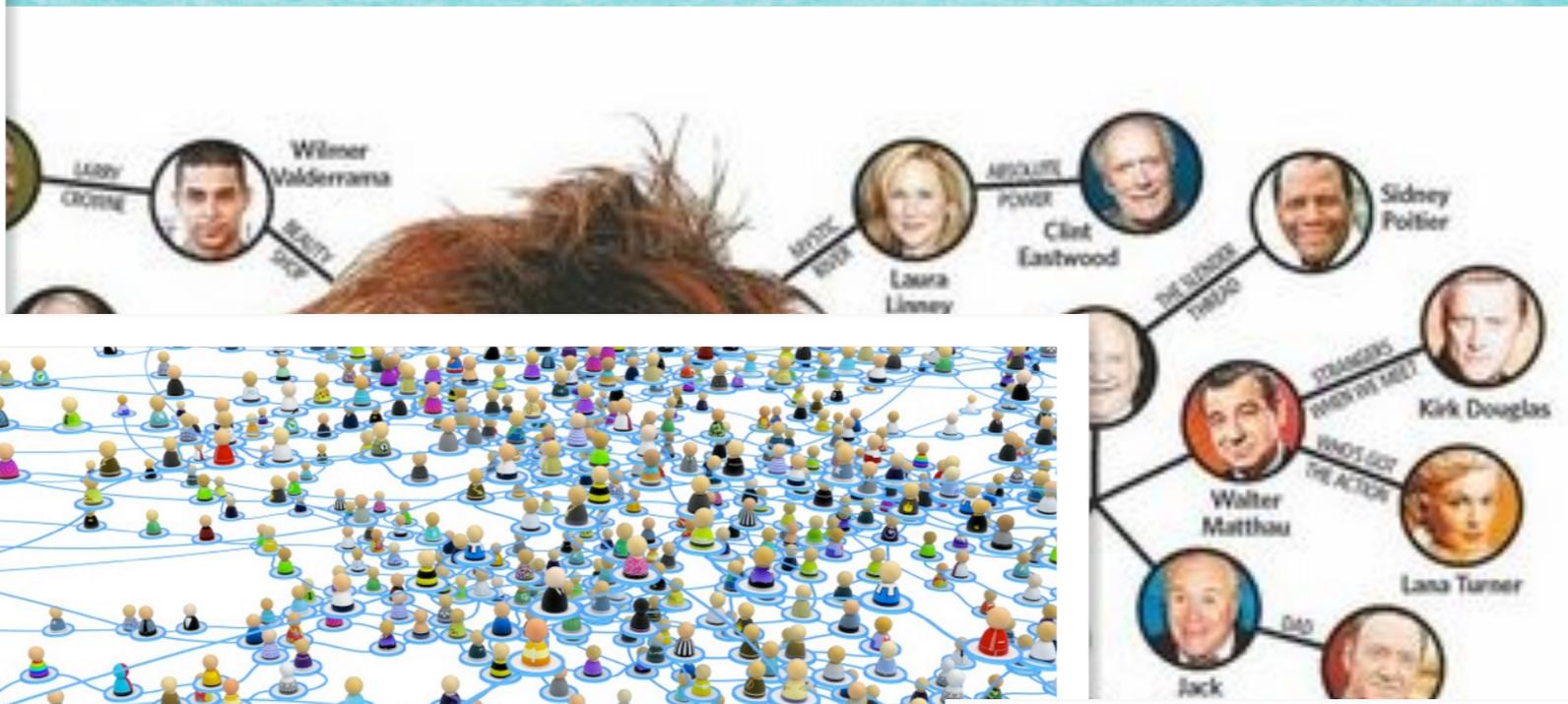
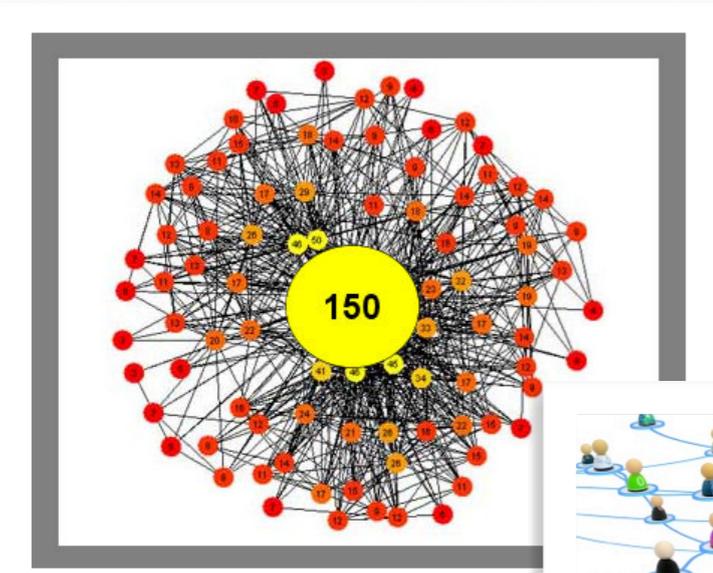
### Erdős-Zahl

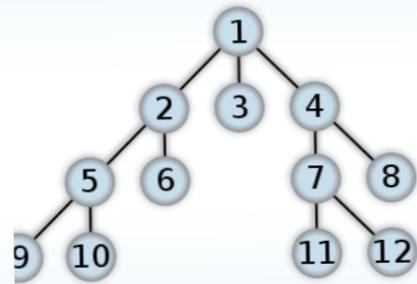












# *Kapitel 3.2: Graphendefinitionen*

*Algorithmen und Datenstrukturen  
WS 2022/23*

**Prof. Dr. Sándor Fekete**



## 3.2 Problemdefinitionen:

### PROBLEM 3.1 (s-t-Weg)

Gegeben: Graph  $G=(V,E)$ , Startknoten  $s$ , Zielknoten  $t$

Gesucht: Weg von  $s$  nach  $t$ , falls einer existiert

## 3.2 Problemdefinitionen:

### PROBLEM 3.1 (s-t-Weg)

Gegeben: Graph  $G=(V,E)$ , Startknoten  $s$ , Zielknoten  $t$

Gesucht: Weg von  $s$  nach  $t$ , falls einer existiert

### SATZ 3.3

Wenn ein Weg zwischen zwei Knoten  $s$  und  $t$  in einem Graphen existiert, dann existiert auch ein Pfad.

## 3.2 Problemdefinitionen:

### PROBLEM 3.1 (s-t-Weg)

Gegeben: Graph  $G=(V,E)$ , Startknoten  $s$ , Zielknoten  $t$

Gesucht: Weg von  $s$  nach  $t$ , falls einer existiert

### SATZ 3.3

Wenn ein Weg zwischen zwei Knoten  $s$  und  $t$  in einem Graphen existiert, dann existiert auch ein Pfad.

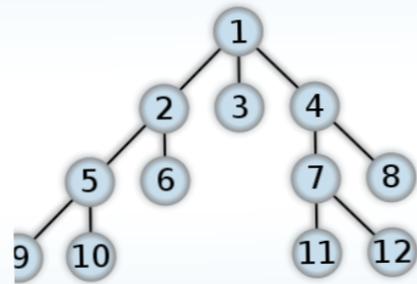
Beweis:

Sei  $W = s, e_1, v_1, \dots, v_m, e_{m+1}, t$  ein Weg von  $s$  nach  $t$ .

Idee:  Eliminiere Kreise auf dem Weg!

Technische Umsetzung:

Betrachte unter allen Wegen einen  $W^*$  mit möglichst wenigen Kanten. Angenommen,  $W^*$  hat einen doppelt besuchten Knoten, sagen wir  $v_i$ :



# *Kapitel 3.3: Zusammenhangskomponenten*

*Algorithmen und Datenstrukturen  
WS 2022/23*

**Prof. Dr. Sándor Fekete**

# Algorithmus 3.7

INPUT: Graph  $G = (V, E)$ , Knoten  $s$

OUTPUT: Knotenmenge  $Y \subseteq V$ , die von  $s$  aus erreichbar ist,  
Kantenmenge  $T \subseteq E$ , die die Erreichbarkeit sicherstellt

1. Sei  $R := \{s\}$ ,  $Y := \{s\}$ ,  $T := \emptyset$
2. WHILE ( $R \neq \emptyset$ ) DO {
  - 2.1. Wähle  $v \in R$
  - 2.2. IF (es gibt kein  $w \in V \setminus Y$  mit  $e = \{v, w\} \in E$ ) THEN
    - 2.2.1.  $R := R \setminus \{v\}$
  - 2.3. ELSE {
    - 2.3.1. Wähle ein  $w \in V \setminus Y$  mit  $e = \{v, w\} \in E$
    - 2.3.2. Setze  $R := R \cup \{w\}$ ,  $Y := Y \cup \{w\}$ ,  $T := T \cup \{e\}$}
3. STOP



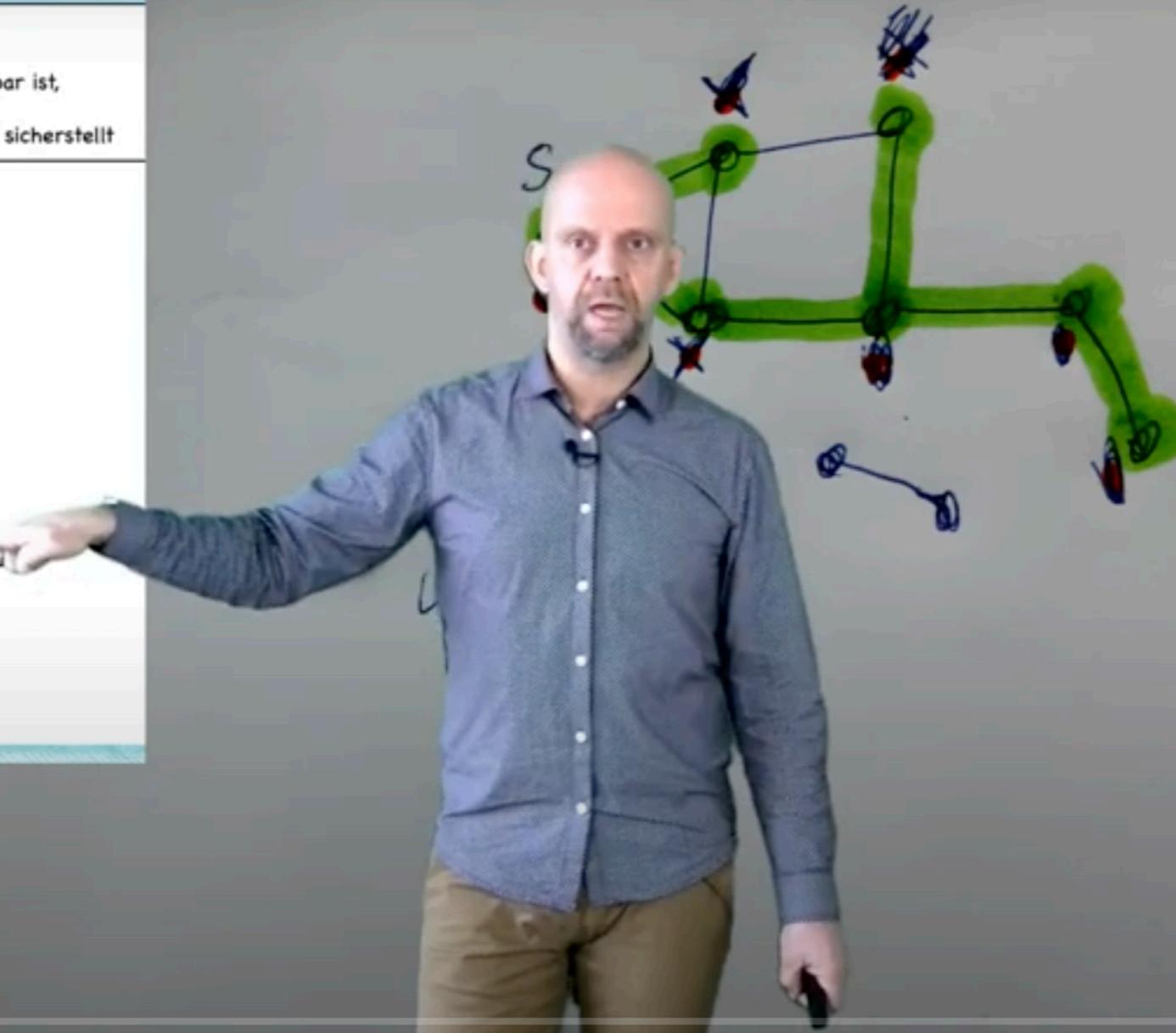
## Algorithmen und Datenstrukturen - Vorlesung #7

### Algorithmus 3.7

INPUT: Graph  $G = (V, E)$ , Knoten  $s$

OUTPUT: Knotenmenge  $Y \subseteq V$ , die von  $s$  aus erreichbar ist,  
Kantenmenge  $T \subseteq E$ , die die Erreichbarkeit sicherstellt

1. Sei  $R := \{s\}$ ,  $Y := \{s\}$ ,  $T := \emptyset$
2. WHILE ( $R \neq \emptyset$ ) DO {
  - 2.1. Wähle  $v \in R$
  - 2.2. IF (es gibt kein  $w \in V \setminus Y$  mit  $e = \{v, w\} \in E$ ) THEN
    - 2.2.1.  $R := R \setminus \{v\}$
  - 2.3. ELSE {
    - 2.3.1. Wähle ein  $w \in V \setminus Y$  mit  $e = \{v, w\} \in E$
    - 2.3.2. Setze  $R := R \cup \{w\}$ ,  $Y := Y \cup \{w\}$ ,  $T := T \cup \{e\}$}}
3. STOP



5:59 / 1:33:40



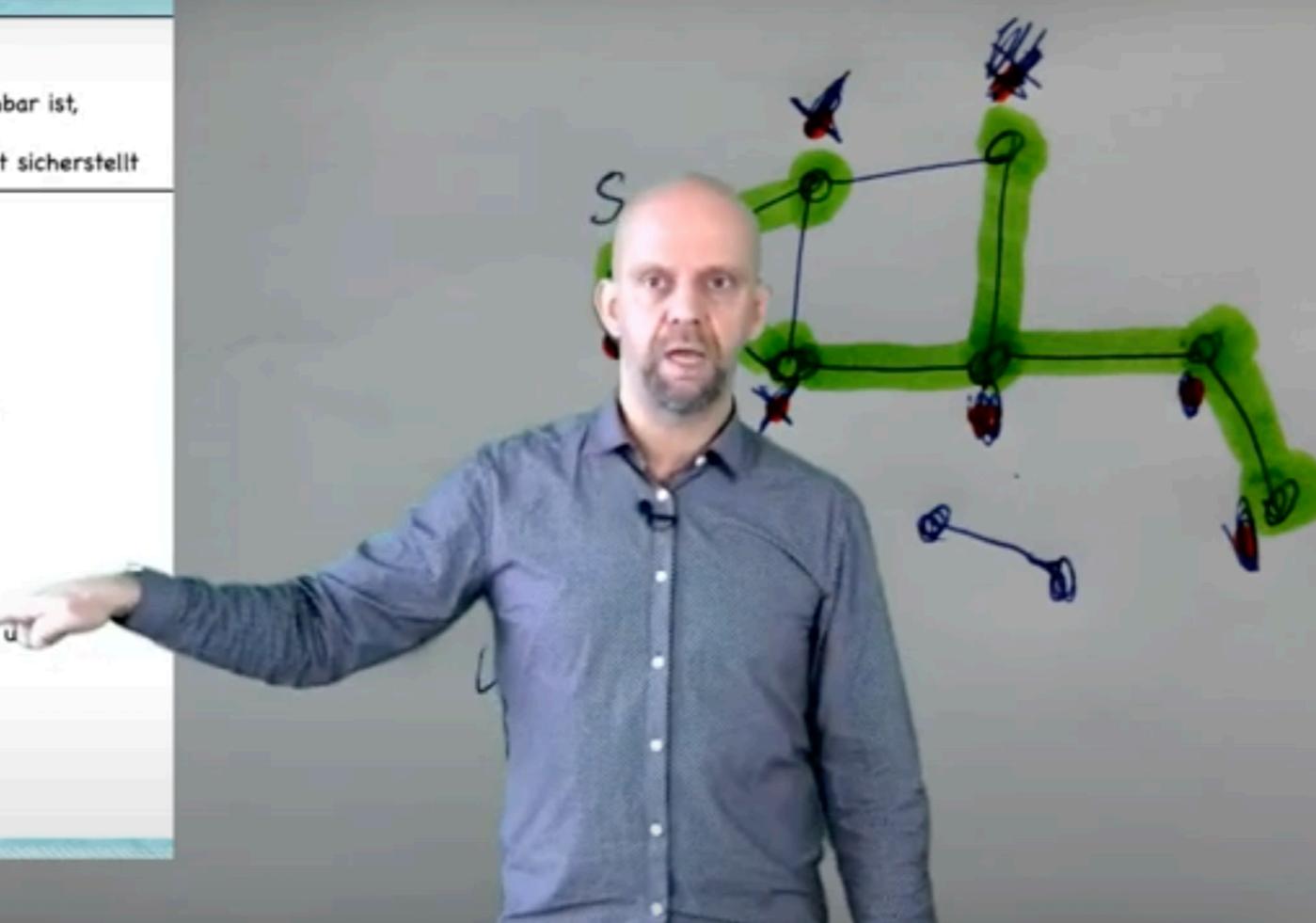
### Algorithmus 3.7

INPUT: Graph  $G = (V, E)$ , Knoten  $s$

OUTPUT: Knotenmenge  $Y \subseteq V$ , die von  $s$  aus erreichbar ist,

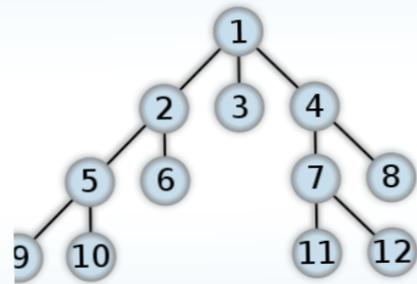
Kantenmenge  $T \subseteq E$ , die die Erreichbarkeit sicherstellt

1. Sei  $R := \{s\}$ ,  $Y := \{s\}$ ,  $T := \emptyset$
2. WHILE ( $R \neq \emptyset$ ) DO {
  - 2.1. Wähle  $v \in R$
  - 2.2. IF (es gibt kein  $w \in V \setminus Y$  mit  $e = \{v, w\} \in E$ ) THEN
    - 2.2.1.  $R := R \setminus \{v\}$
  - 2.3. ELSE {
    - 2.3.1. Wähle ein  $w \in V \setminus Y$  mit  $e = \{v, w\} \in E$
    - 2.3.2. Setze  $R := R \cup \{w\}$ ,  $Y := Y \cup \{w\}$ ,  $T := T \cup \{e\}$}}
3. STOP



### SATZ 3.8

- (1) Das Verfahren 3.7 ist endlich.
- (2) Das Verfahren 3.7 funktioniert korrekt.



# *Kapitel 3.4: Warteschlange und Stapel*

*Algorithmen und Datenstrukturen  
WS 2022/23*

**Prof. Dr. Sándor Fekete**

# Algorithmus 3.7

INPUT: Graph  $G = (V, E)$ , Knoten  $s$

OUTPUT: Knotenmenge  $Y \subseteq V$ , die von  $s$  aus erreichbar ist,  
Kantenmenge  $T \subseteq E$ , die die Erreichbarkeit sicherstellt

1. Sei  $R := \{s\}$ ,  $Y := \{s\}$ ,  $T := \emptyset$
2. WHILE ( $R \neq \emptyset$ ) DO {
  - 2.1. Wähle  $v \in R$
  - 2.2. IF (es gibt kein  $w \in V \setminus Y$  mit  $e = \{v, w\} \in E$ ) THEN
    - 2.2.1.  $R := R \setminus \{v\}$
  - 2.3. ELSE {
    - 2.3.1. Wähle ein  $w \in V \setminus Y$  mit  $e = \{v, w\} \in E$
    - 2.3.2. Setze  $R := R \cup \{w\}$ ,  $Y := Y \cup \{w\}$ ,  $T := T \cup \{e\}$}
3. STOP

# Algorithmus 3.7

INPUT: Graph  $G = (V, E)$ , Knoten  $s$

OUTPUT: Knotenmenge  $Y \subseteq V$ , die von  $s$  aus erreichbar ist,  
Kantenmenge  $T \subseteq E$ , die die Erreichbarkeit sicherstellt

1. Sei  $R := \{s\}$ ,  $Y := \{s\}$ ,  $T := \emptyset$
2. WHILE ( $R \neq \emptyset$ ) DO {
  - 2.1. Wähle  $v \in R$
  - 2.2. IF (es gibt kein  $w \in V \setminus Y$  mit  $e = \{v, w\} \in E$ ) THEN
    - 2.2.1.  $R := R \setminus \{v\}$
  - 2.3. ELSE {
    - 2.3.1. Wähle ein  $w \in V \setminus Y$  mit  $e = \{v, w\} \in E$
    - 2.3.2. Setze  $R := R \cup \{w\}$ ,  $Y := Y \cup \{w\}$ ,  $T := T \cup \{e\}$}}
3. STOP

# A & D

I get the job done.  
What the hell do you  
want?

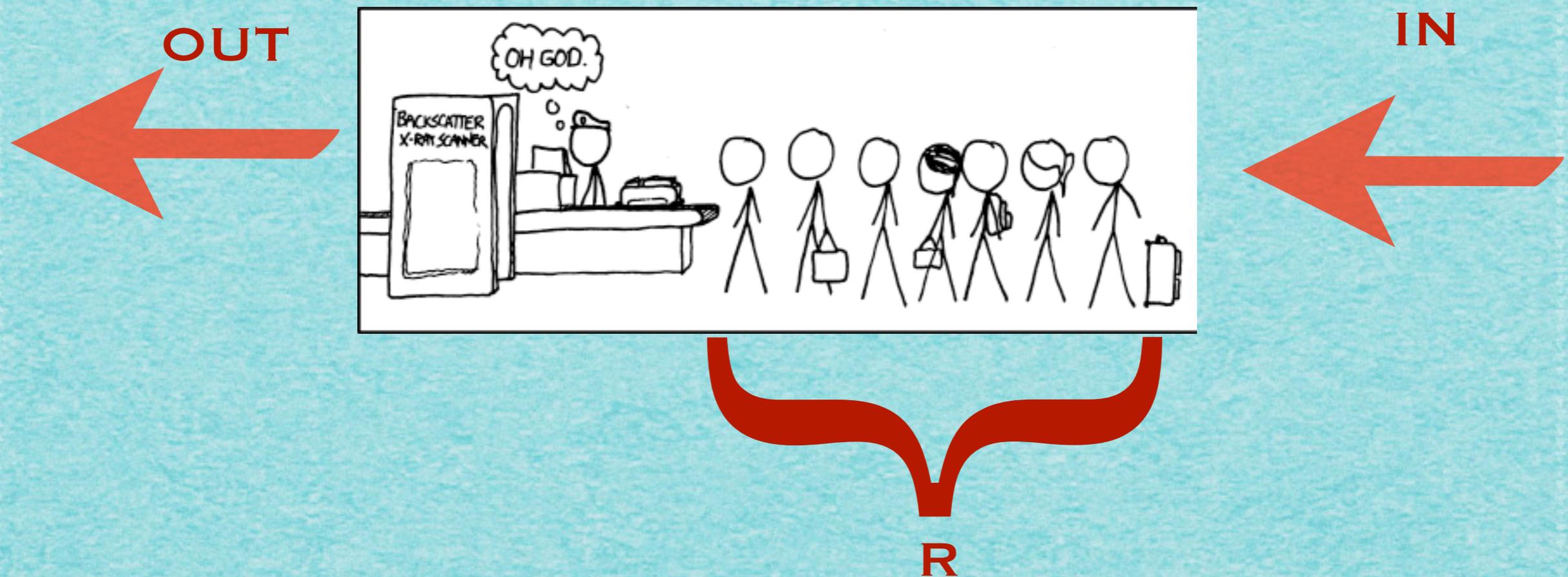
CAN YOU MAKE IT  
WITHOUT KILLING  
YOURSELF?



**Algorithmus**

**DATENSTRUKTUR**

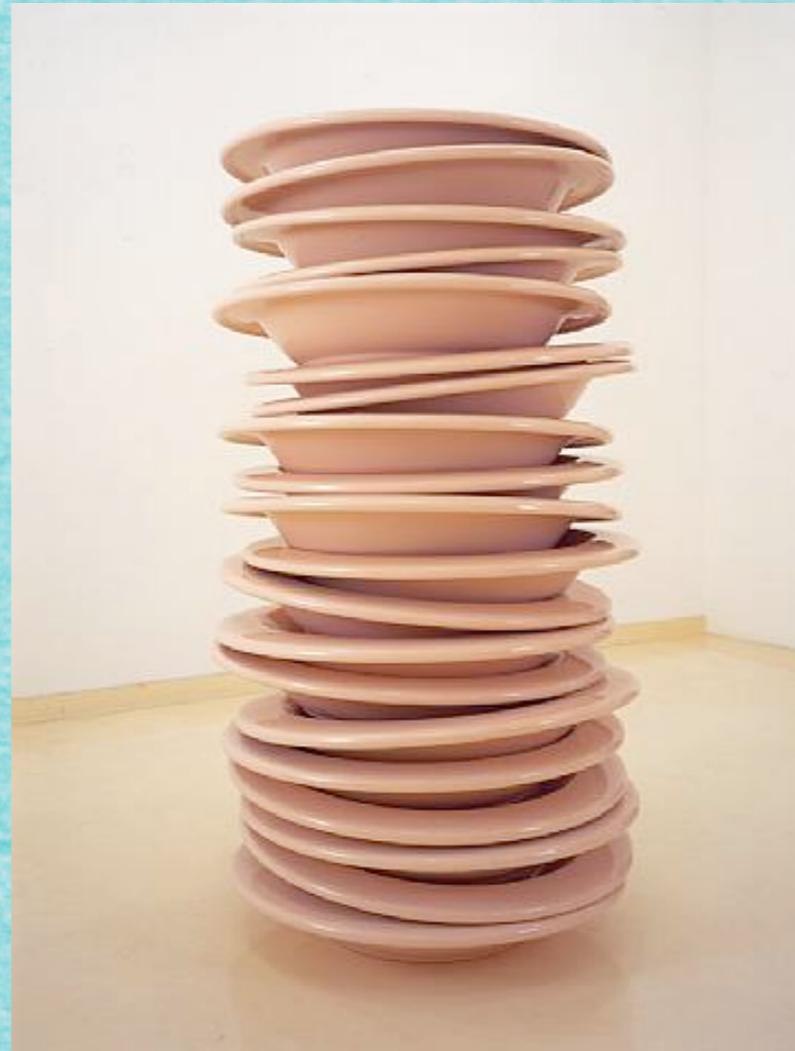
# DATENSTRUKTUR I



**WARTESCHLANGE: FIRST IN - FIRST OUT**

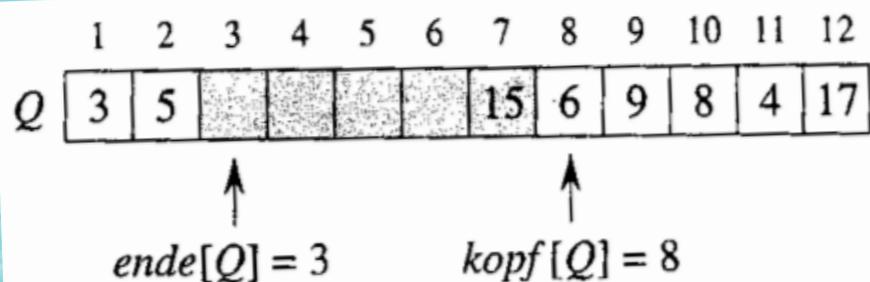
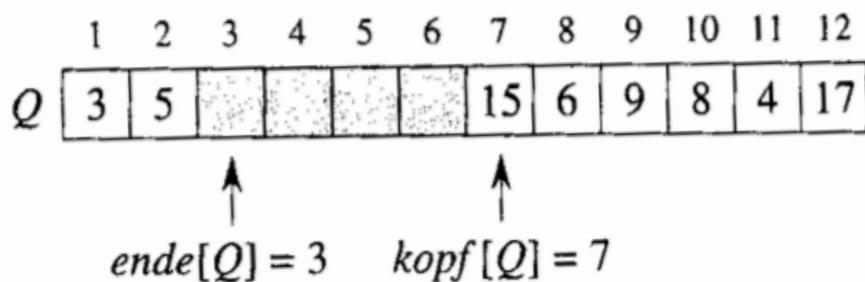
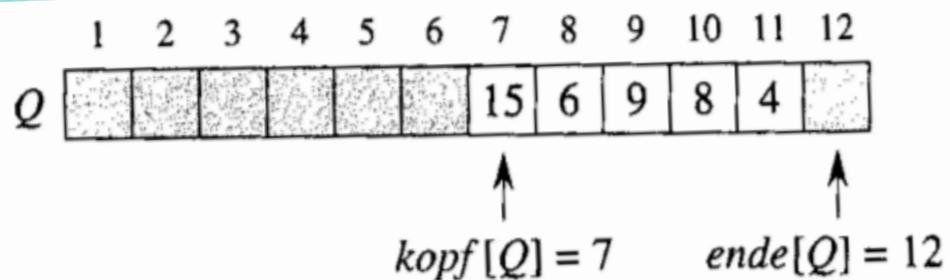
# DATENSTRUKTUR II

R



**STAPEL: LAST IN - FIRST OUT**

# WARTESCHLANGE AUF ARRAY UMGESETZT



ENQUEUE( $Q, x$ )

```

1  $Q[ende[Q]] \leftarrow x$ 
2 if  $ende[Q] = länge[Q]$ 
3   then  $ende[Q] \leftarrow 1$ 
4   else  $ende[Q] \leftarrow ende[Q] + 1$ 

```

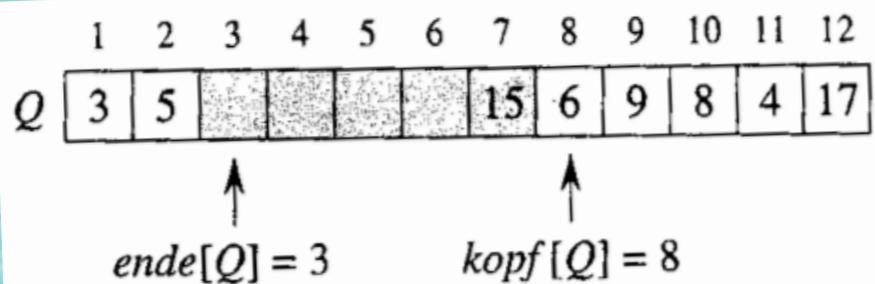
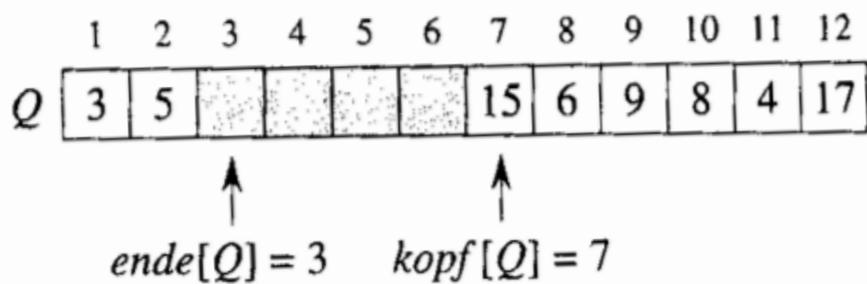
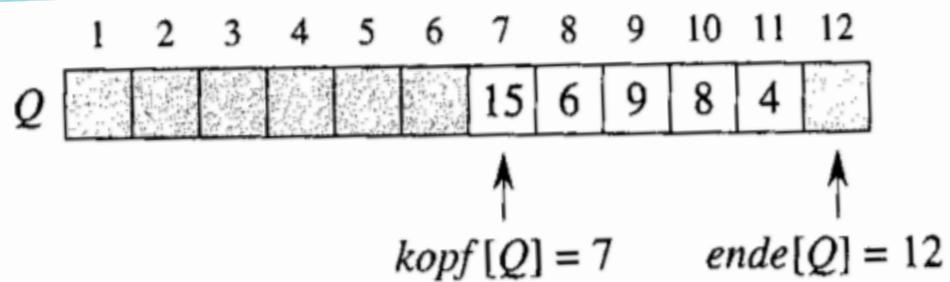
DEQUEUE( $Q$ )

```

1  $x \leftarrow Q[kopf[Q]]$ 
2 if  $kopf[Q] = länge[Q]$ 
3   then  $kopf[Q] \leftarrow 1$ 
4   else  $kopf[Q] \leftarrow kopf[Q] + 1$ 
5 return  $x$ 

```

# WARTESCHLANGE AUF ARRAY UMGESETZT

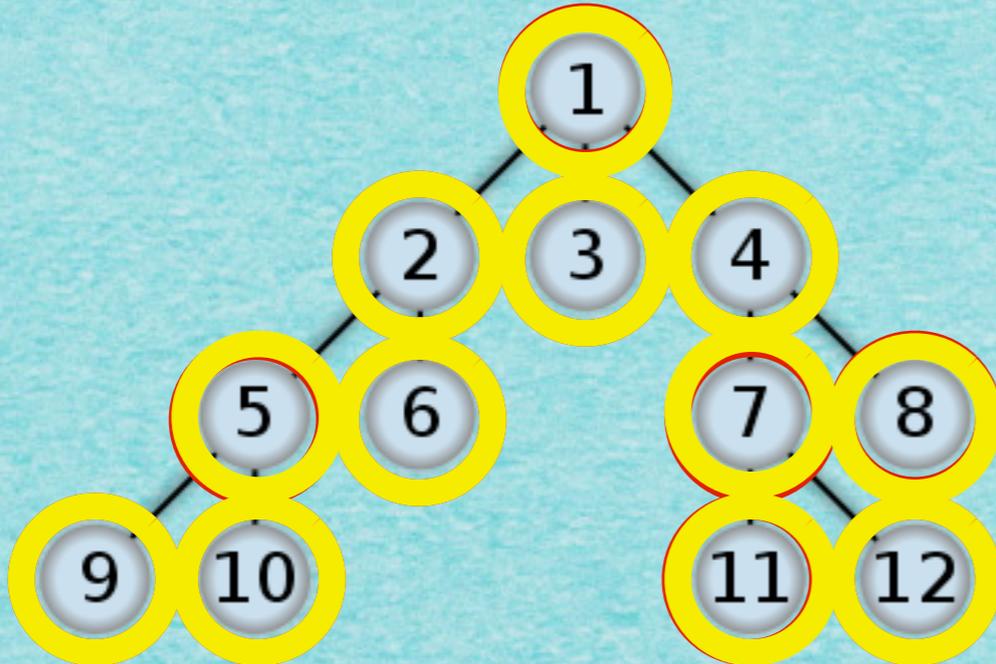


```

4   else  $kopf[Q] \leftarrow kopf[Q] + 1$ 
5   return  $x$ 

```

# Graphenscan mit WARTESCHLANGE

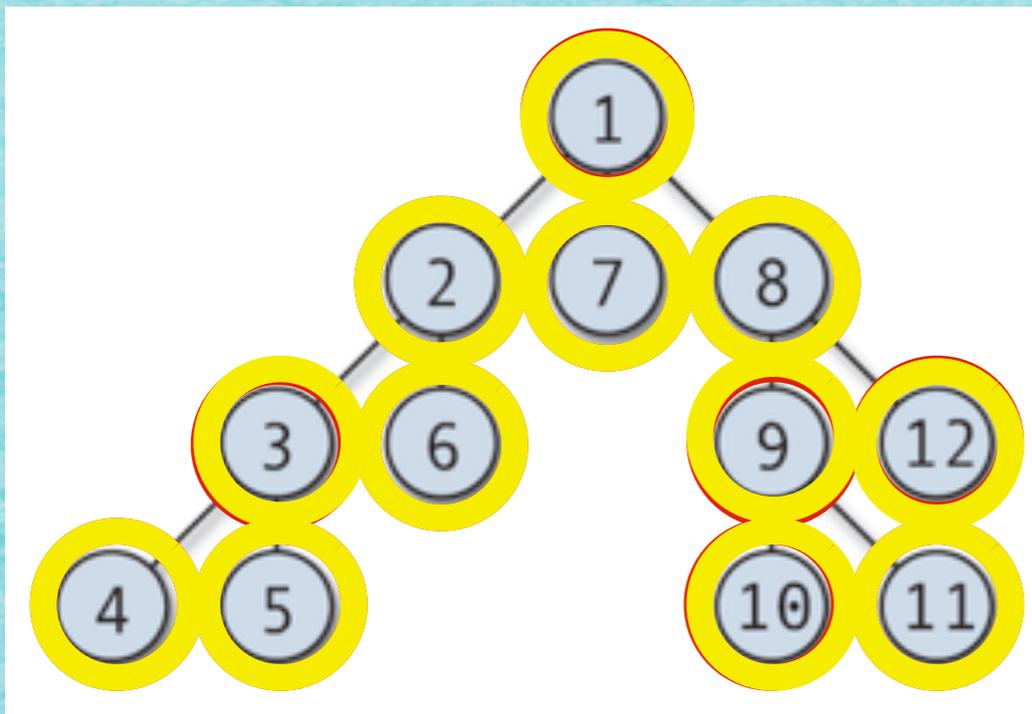


R: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12

STOP!

**BREITENSUCHE - "BREADTH-FIRST SEARCH" (BFS)**

# Graphenscan mit STAPEL



R: 1, 2, 3, 4

STOP!

TIEFENSUCHE - "DEPTH-FIRST SEARCH" (DFS)

# Auf die Schnelle mit der Welle

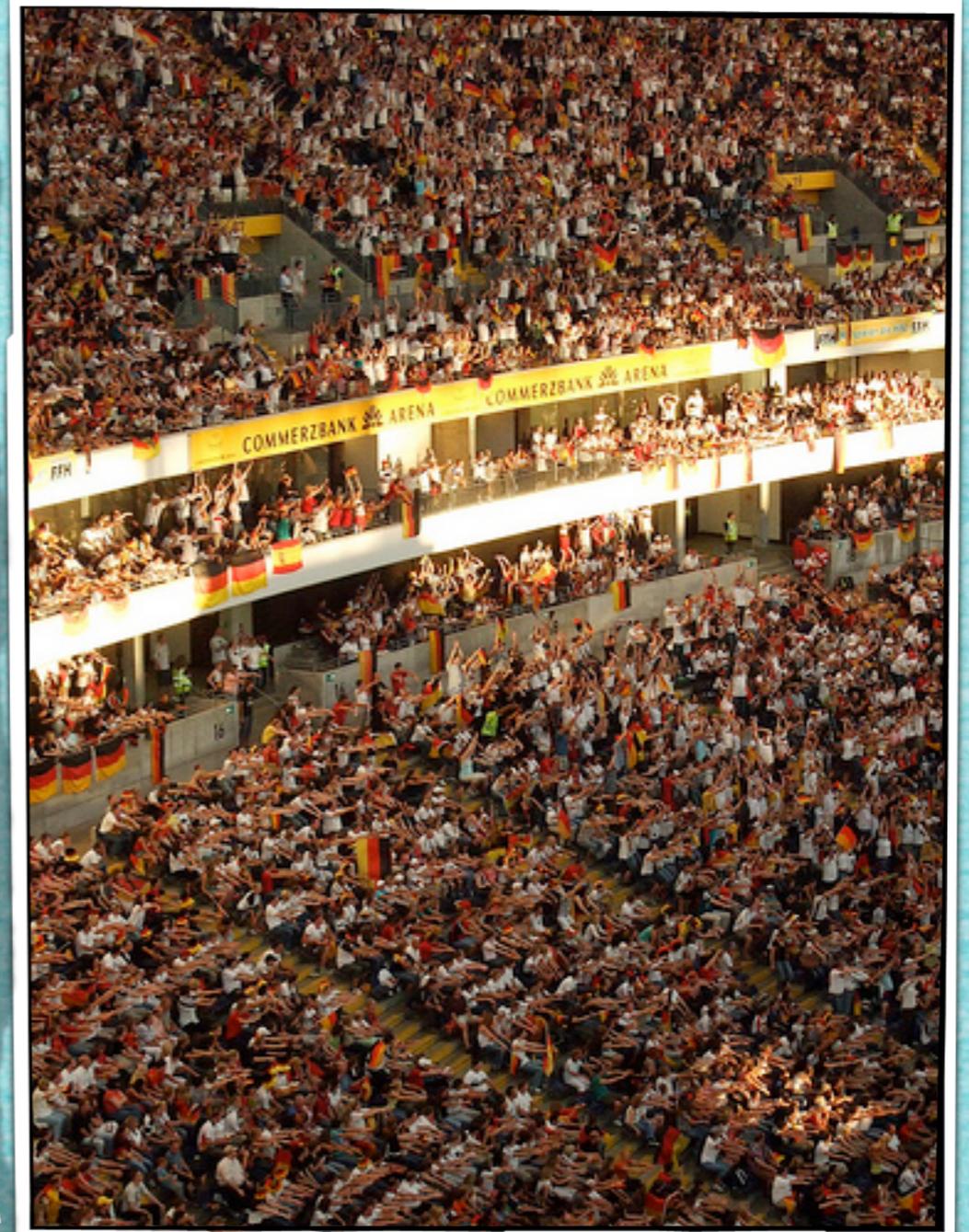
A. LOS bei „NULL“

B. Bis „ANGEKOMMEN!“:

- Solange du noch nicht aufgestanden warst:
  - ▶ Wenn ein oder mehrere direkte Nachbarn aufstehen:
    1. Einen dieser Nachbarn merken
    2. In der nächsten Runde:
      - 2.1. aufstehen
      - 2.2. Zahl merken
    3. In der übernächsten Runde hinsetzen

C. Nach „ANGEKOMMEN!“:

- Auf gemerkten Nachbarn zeigen



# Auf die Schnelle

## Auf die Schnelle mit der Welle

A. LOS bei „NIX!“

B. Bis „ANGEKOMMEN“

- Solange du noch nicht aufgestanden warst
- Wenn ein oder mehrere direkte Nachbarn aufstehen
  1. Einen dieser Nachbarn merken
  2. In der nächsten Runde
    - 2.1. aufstehen
    - 2.2. Zahl merken
  3. In der übernächsten Runde hinstellen

C. Nach „ANGEKOMMEN“

- Auf gemerkten Nachbarn zeigen



## Auf die Schnelle mit der Welle

A. LOS bei „JA!“

B. Bis „ANGEKOMMEN“

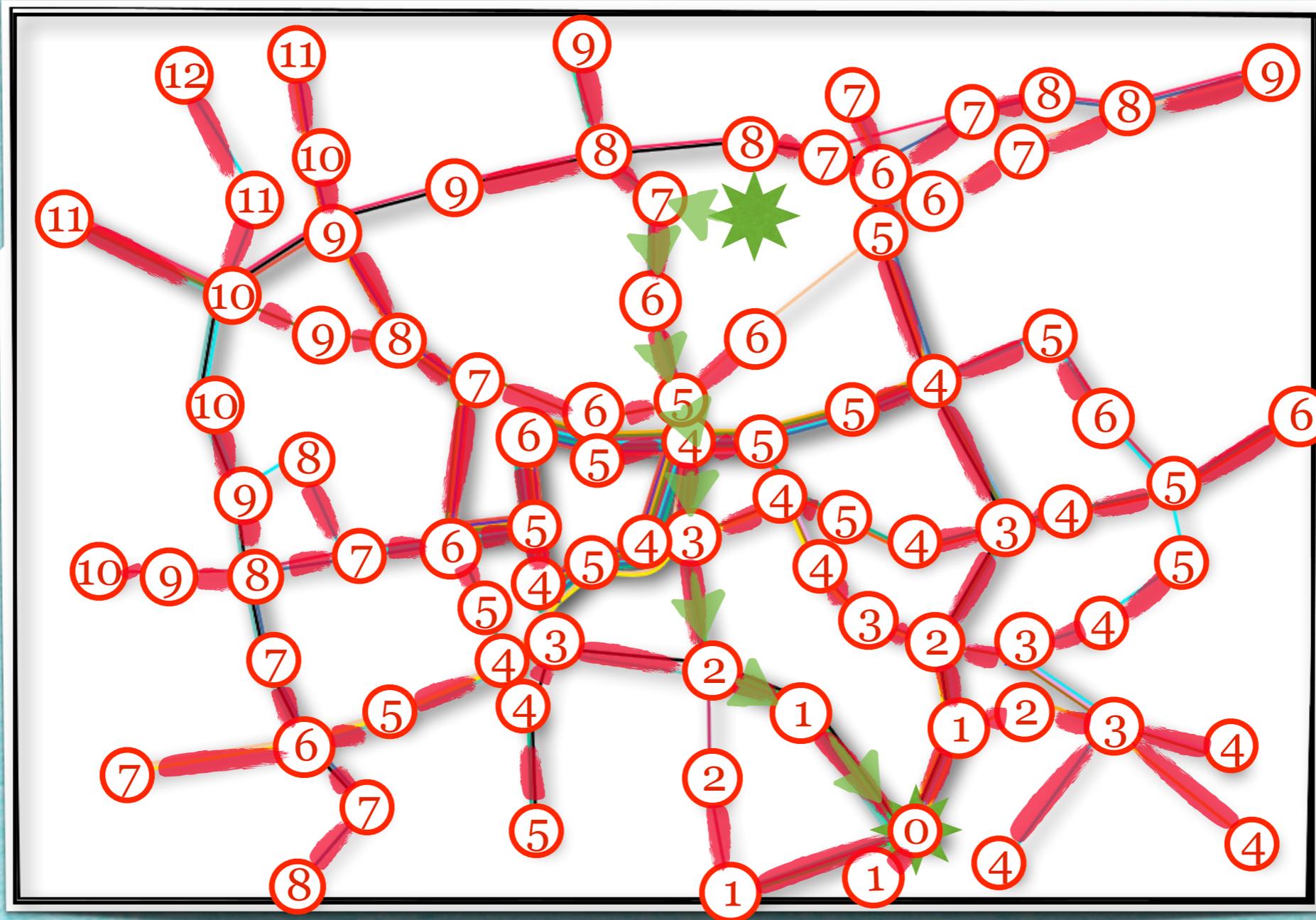
- Solange du noch nicht aufgestanden warst
- Wenn ein oder mehrere direkte Nachbarn aufstehen
  1. Einen dieser Nachbarn merken
  2. In der nächsten Runde
    - 2.1. aufstehen
    - 2.2. Zahl merken
  3. In der übernächsten Runde hinstellen

C. Nach „ANGEKOMMEN“

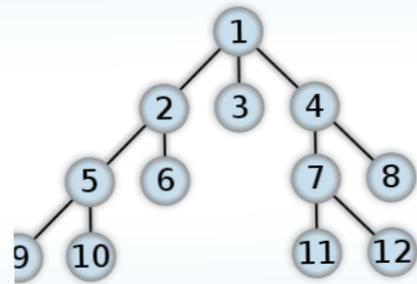
- Auf gemerkten Nachbarn zeigen



# Wellenreiten in Graphen



Breitensuche



# *Kapitel 3.6: Datenstrukturen für Graphen*

*Algorithmen und Datenstrukturen  
WS 2022/23*

**Prof. Dr. Sándor Fekete**

# Algorithmus 3.7

INPUT: Graph  $G = (V, E)$ , Knoten  $s$

OUTPUT: Knotenmenge  $Y \subseteq V$ , die von  $s$  aus erreichbar ist,  
Kantenmenge  $T \subseteq E$ , die die Erreichbarkeit sicherstellt

1. Sei  $R := \{s\}$ ,  $Y := \{s\}$ ,  $T := \emptyset$
2. WHILE ( $R \neq \emptyset$ ) DO {
  - 2.1. Wähle  $v \in R$
  - 2.2. IF (es gibt kein  $w \in V \setminus Y$  mit  $e = \{v, w\} \in E$ ) THEN
    - 2.2.1.  $R := R \setminus \{v\}$
  - 2.3. ELSE {
    - 2.3.1. Wähle ein  $w \in V \setminus Y$  mit  $e = \{v, w\} \in E$
    - 2.3.2. Setze  $R := R \cup \{w\}$ ,  $Y := Y \cup \{w\}$ ,  $T := T \cup \{e\}$}}
3. STOP

# Algorithmus 3.7

INPUT: Graph  $G = (V, E)$ , Knoten  $s$

OUTPUT: Knotenmenge  $Y \subseteq V$ , die von  $s$  aus erreichbar ist,  
Kantenmenge  $T \subseteq E$ , die die Erreichbarkeit sicherstellt

1. Sei  $R := \{s\}$ ,  $Y := \{s\}$ ,  $T := \emptyset$
2. WHILE ( $R \neq \emptyset$ ) DO {
  - 2.1. Wähle  $v \in R$
  - 2.2. IF (es gibt kein  $w \in V \setminus Y$  mit  $e = \{v, w\} \in E$ ) THEN
    - 2.2.1.  $R := R \setminus \{v\}$
  - 2.3. ELSE {
    - 2.3.1. Wähle ein  $w \in V \setminus Y$  mit  $e = \{v, w\} \in E$
    - 2.3.2. Setze  $R := R \cup \{w\}$ ,  $Y := Y \cup \{w\}$ ,  $T := T \cup \{e\}$}}
3. STOP

# A & D

I get the job done.  
What the hell do you  
want?

CAN YOU MAKE IT  
WITHOUT KILLING  
YOURSELF?

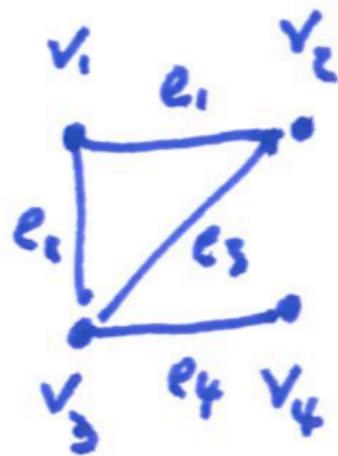


**Algorithmus**

**DATENSTRUKTUR**

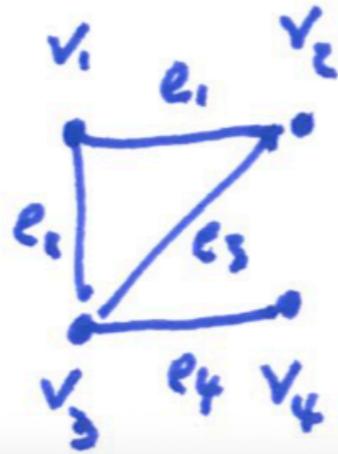


(1) Inzidenzmatrix



$$\begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix} \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

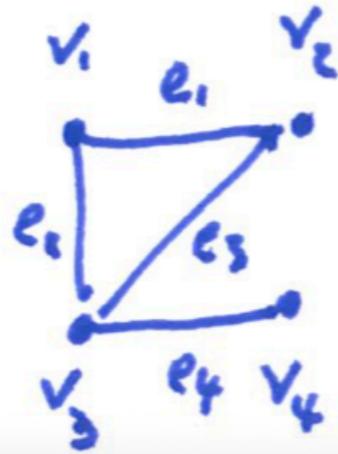
(1) Inzidenzmatrix



$$\begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix} \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Größe:  $n \times m$  für einen Graphen mit  $n$  Knoten,  $m$  Kanten.

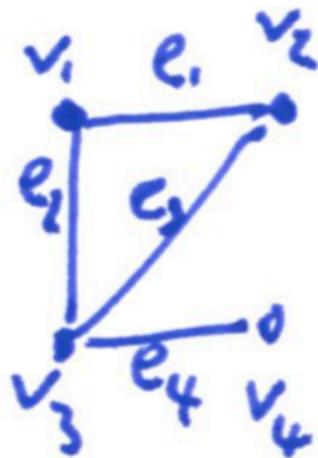
(1) Incidenzmatrix



$$\begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix} \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

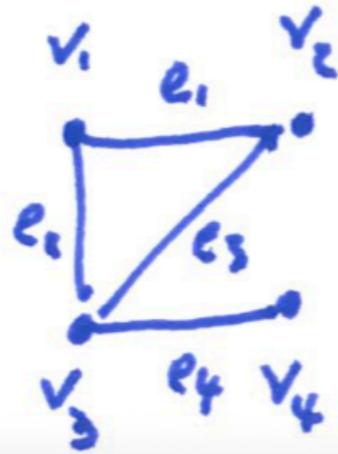
Größe:  $n \times m$  für einen Graphen mit  $n$  Knoten,  $m$  Kanten.

(2) Adjazenzmatrix



$$\begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix} \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

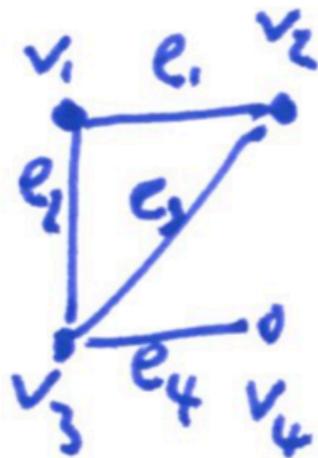
(1) Incidenzmatrix



$$\begin{matrix} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ v_1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ v_2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ v_3 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ v_4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

Größe:  $n \times m$  für einen Graphen mit  $n$  Knoten,  $m$  Kanten.

(2) Adjazenzmatrix



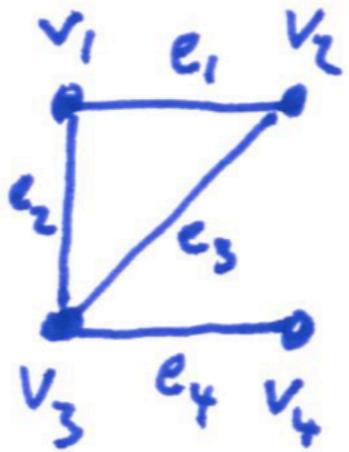
$$\begin{matrix} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ v_1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ v_2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ v_3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ v_4 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{matrix}$$

Größe:  $n^2$  für einen Graphen mit  $n$  Knoten.



(3)

Kantenliste

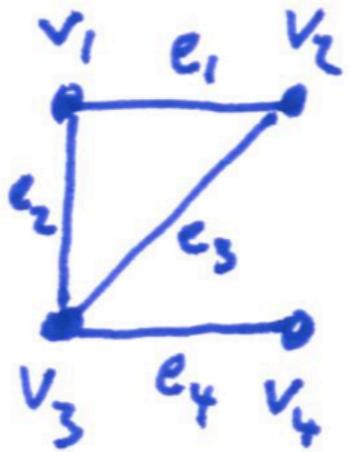


$\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}$

Berötigt wird eine Kantennummerierung!

(3)

Kantenliste



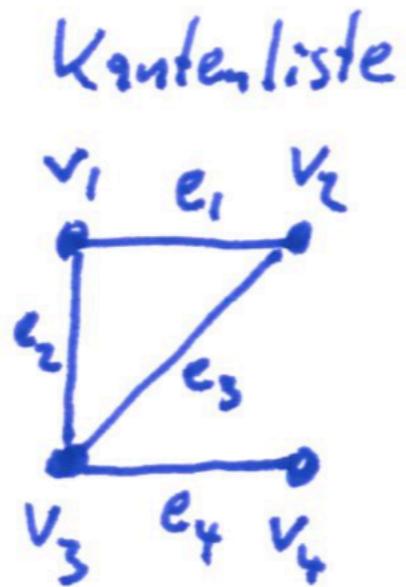
$\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}$

Berötigt wird eine Kantennummerierung!

$$b = \lfloor \log_2 n \rfloor + 1$$

$$d = \lfloor \log_{10} n \rfloor + 1$$

(3)



$\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}$

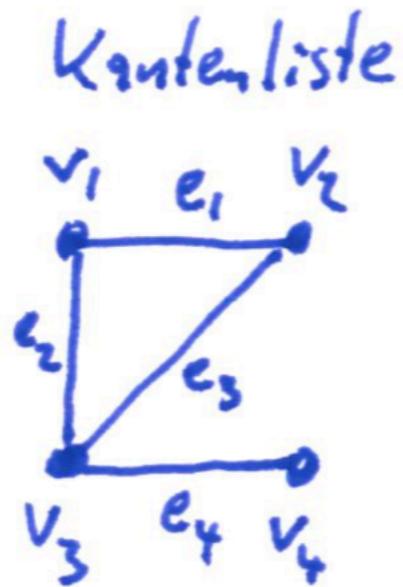
Berötigt wird eine Kantennummerierung!

$$b = \lfloor \log_2 n \rfloor + 1$$

$$d = \lfloor \log_{10} n \rfloor + 1$$

$$(2m-1) + 2m (\lfloor \log_2 n \rfloor + 1)$$

(3)



$\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}$

Berötigt wird eine Kantennummerierung!

$$b = \lfloor \log_2 n \rfloor + 1$$

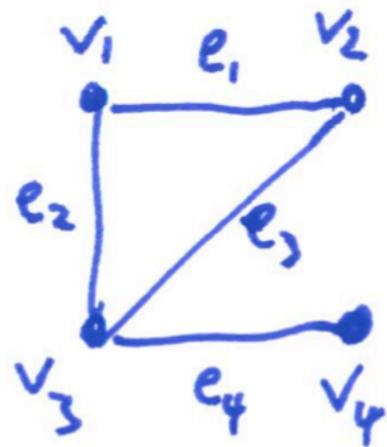
$$d = \lfloor \log_{10} n \rfloor + 1$$

$$(2m-1) + 2m (\lfloor \log_2 n \rfloor + 1)$$

In  $m \log n$  steckt das Wesen der Kantenliste



(4) Adjazenzliste



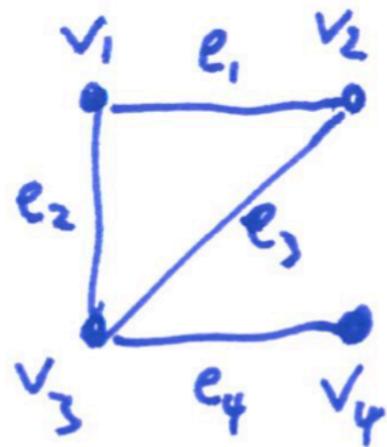
$V_1: V_2, V_3;$

$V_2: V_1, V_3;$

$V_3: V_1, V_2, V_4;$

$V_4: V_3;$

(4) Adjazenzliste



$V_1: V_2, V_3;$

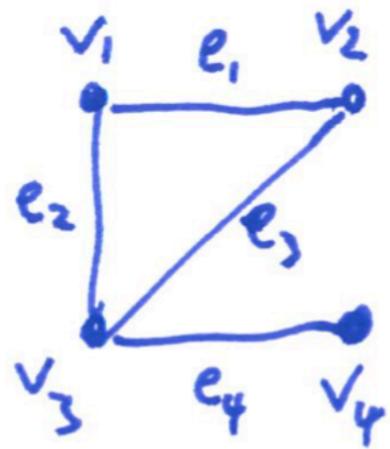
$V_2: V_1, V_3;$

$V_3: V_1, V_2, V_4;$

$V_4: V_3;$

↓            ↓            ↓            ↓  
 $V_2, V_3;$     $V_1, V_3;$     $V_1, V_2, V_4;$     $V_3$

(4) Adjazenzliste



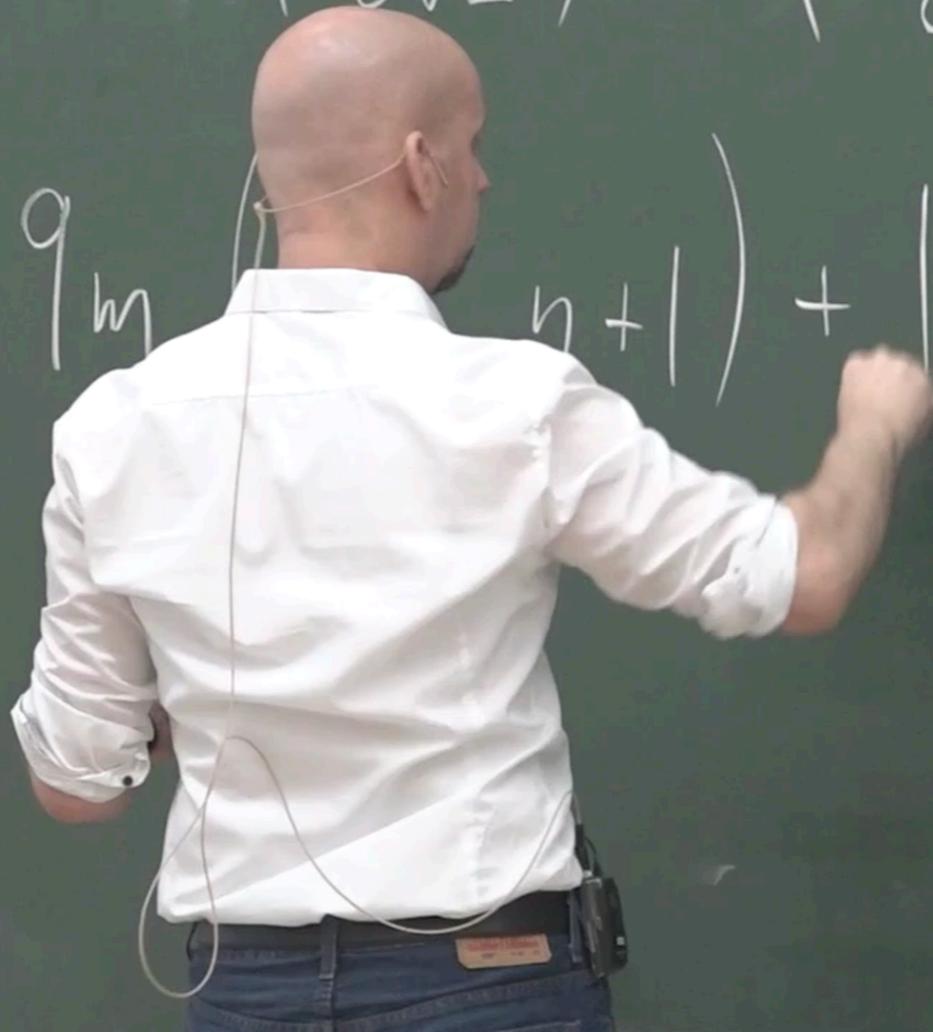
- $v_1: v_2, v_3;$
- $v_2: v_1, v_3;$
- $v_3: v_1, v_2, v_4;$
- $v_4: v_3;$

- ↓
  - ↓
  - ↓
  - ↓
- $v_2, v_3; v_1, v_3; v_1, v_2, v_4; v_3$

$$\log_2 \left\lfloor \left( 2n + 4m + n(\lfloor \log_2 n \rfloor + 1) + 2m(\lfloor \log_2 n \rfloor + 1) \right) \right\rfloor + 1$$

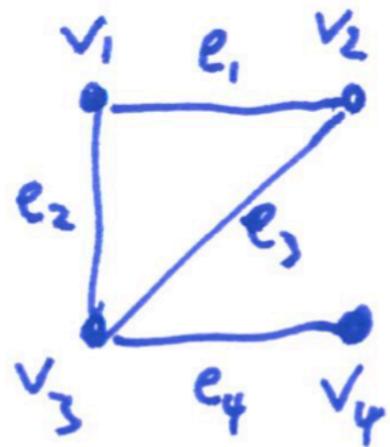
$$\lceil \log_{10} \left( 2n + 4m + n \left( \lfloor \log_{10} n \rfloor + 1 \right) + 2m \left( \lfloor \log_{10} n \rfloor + 1 \right) \right) \rceil + 1$$

$$\leq \log_2 \left( 9m \left( n + 1 \right) + 1 \right)$$



$\lfloor \log_{10} n \rfloor + 1$

(4) Adjazenzliste

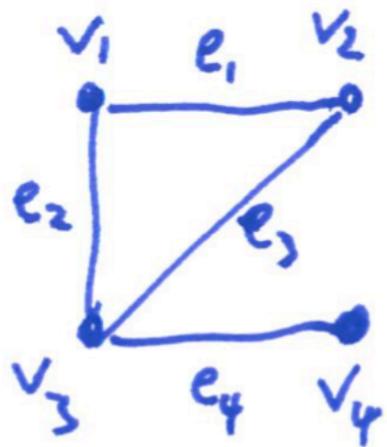


- $v_1: v_2, v_3;$
- $v_2: v_1, v_3;$
- $v_3: v_1, v_2, v_4;$
- $v_4: v_3;$

- ↓
  - ↓
  - ↓
  - ↓
- $v_2, v_3; v_1, v_3; v_1, v_2, v_4; v_3$

$$\log_2 \left\lfloor \left( 2n + 4m + n(\lfloor \log_2 n \rfloor + 1) + 2m(\lfloor \log_2 n \rfloor + 1) \right) \right\rfloor + 1$$

(4) Adjazenzliste

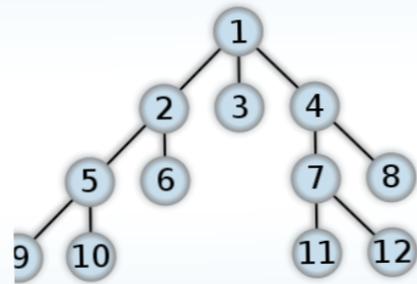


$v_1: v_2, v_3;$   
 $v_2: v_1, v_3;$   
 $v_3: v_1, v_2, v_4;$   
 $v_4: v_3;$

$\downarrow$        $\downarrow$        $\downarrow$        $\downarrow$   
 $v_2, v_3;$     $v_1, v_3;$     $v_1, v_2, v_4;$     $v_3$

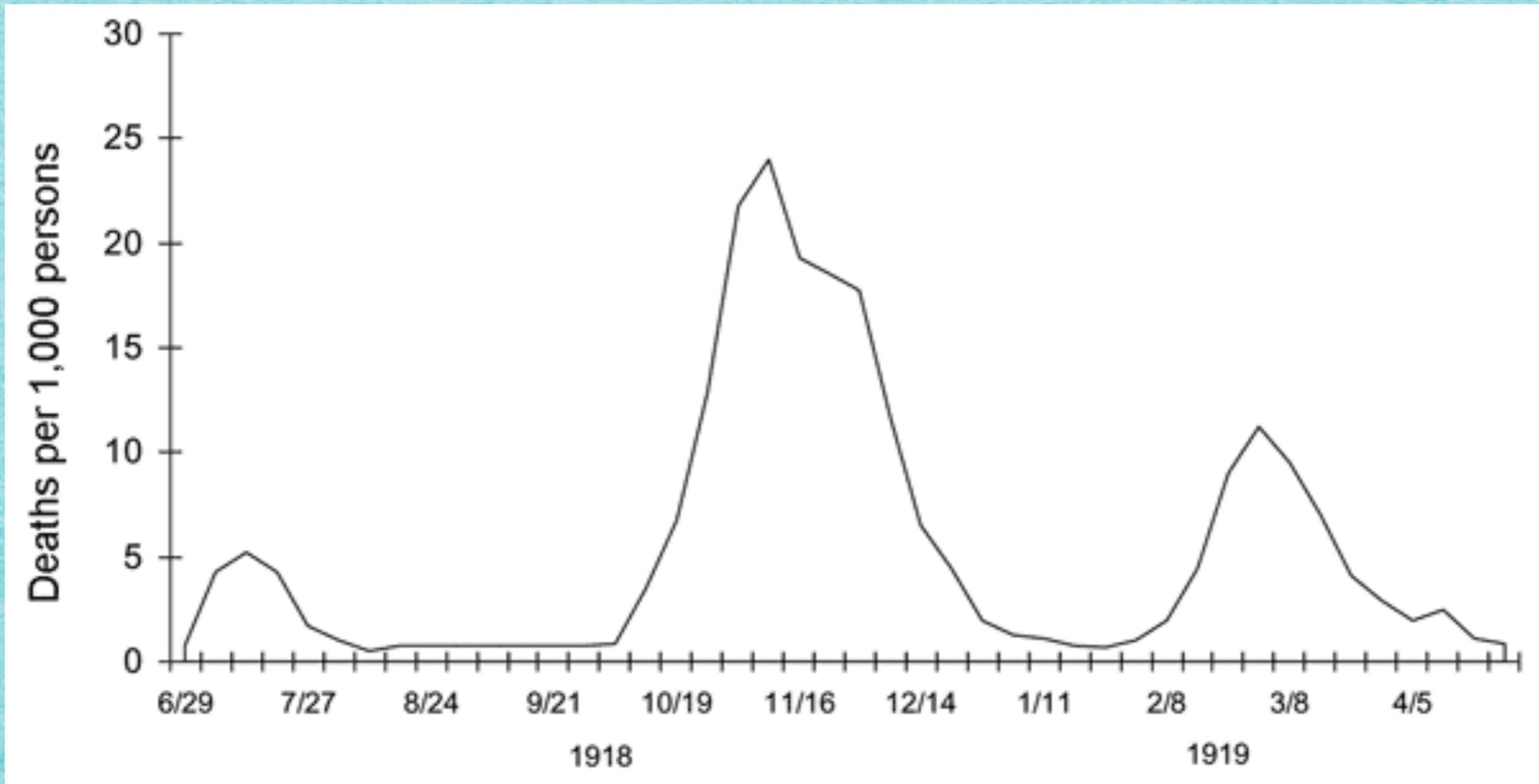
$$\log_2 \left\lceil \left( 2n + 4m + n \lceil \log_2 n \rceil + 1 \right) + 2m \lceil \log_2 n \rceil + 1 \right\rceil + 1$$

$$\Theta(n \log m + m \log n) = \Theta(m \log n)$$



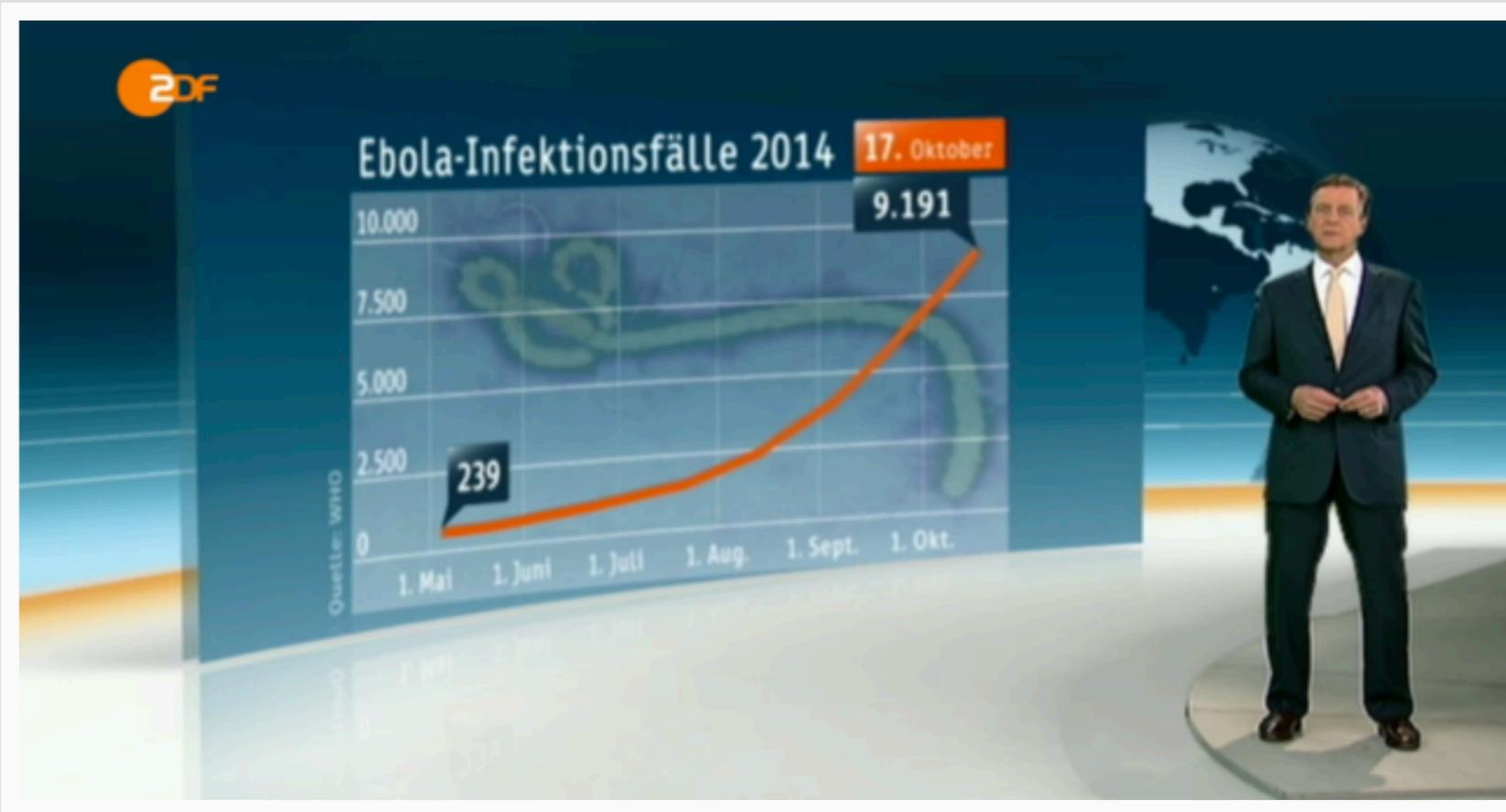
*Kapitel 3.7:*  
*Wachstum von Funktionen*  
*Algorithmen und Datenstrukturen*  
*WS 2022/23*

**Prof. Dr. Sándor Fekete**



## Vorlesung 9

- **Datum:** Mittwoch, 27.11.2019
- **Inhalt:** Wachstum von Funktionen; O-Notation
- **Notizen:** [HIER](#) (PDF, 1.0MB)
- **Weitere Links:**
  - [Wikipedia-Seite: Spieltheorie](#)
  - [Wikipedia-Seite: Gefangenendilemma](#)
  - [Die tanzenden Roboter](#)
  - [Die Theorie dahinter](#)



(Für Tonspur auf Bild klicken - und über den Unterschied von  $t^2$  und  $2^t$  nachdenken: Der Aufwand vervierfacht sich nicht nur, sondern quadriert sich!)

[Wikipedia zum Ersten Weltkrieg](#)

[Wikipedia zur Spanischen Grippe](#)

[Wikipedia zur Pest](#)

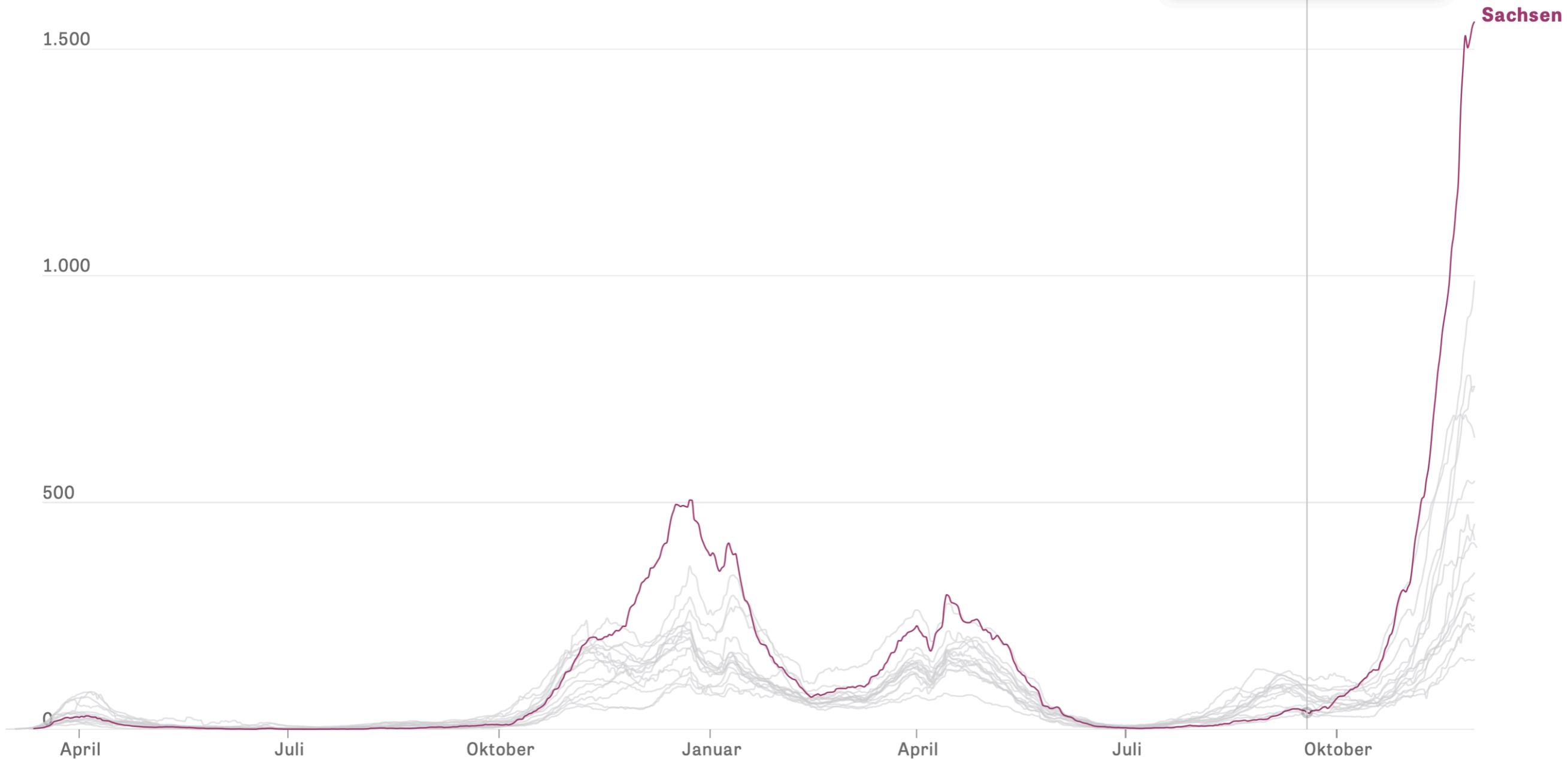
[Wikipedia zur asymptotischen Notation](#)

Sachsen

FÄLLE TODESFÄLLE

18. September  
37,1 bestätigte Fälle je  
100.000

↑ Bestätigte Neuinfektionen in den letzten 7 Tagen je 100.000 Einwohner



Sachsen

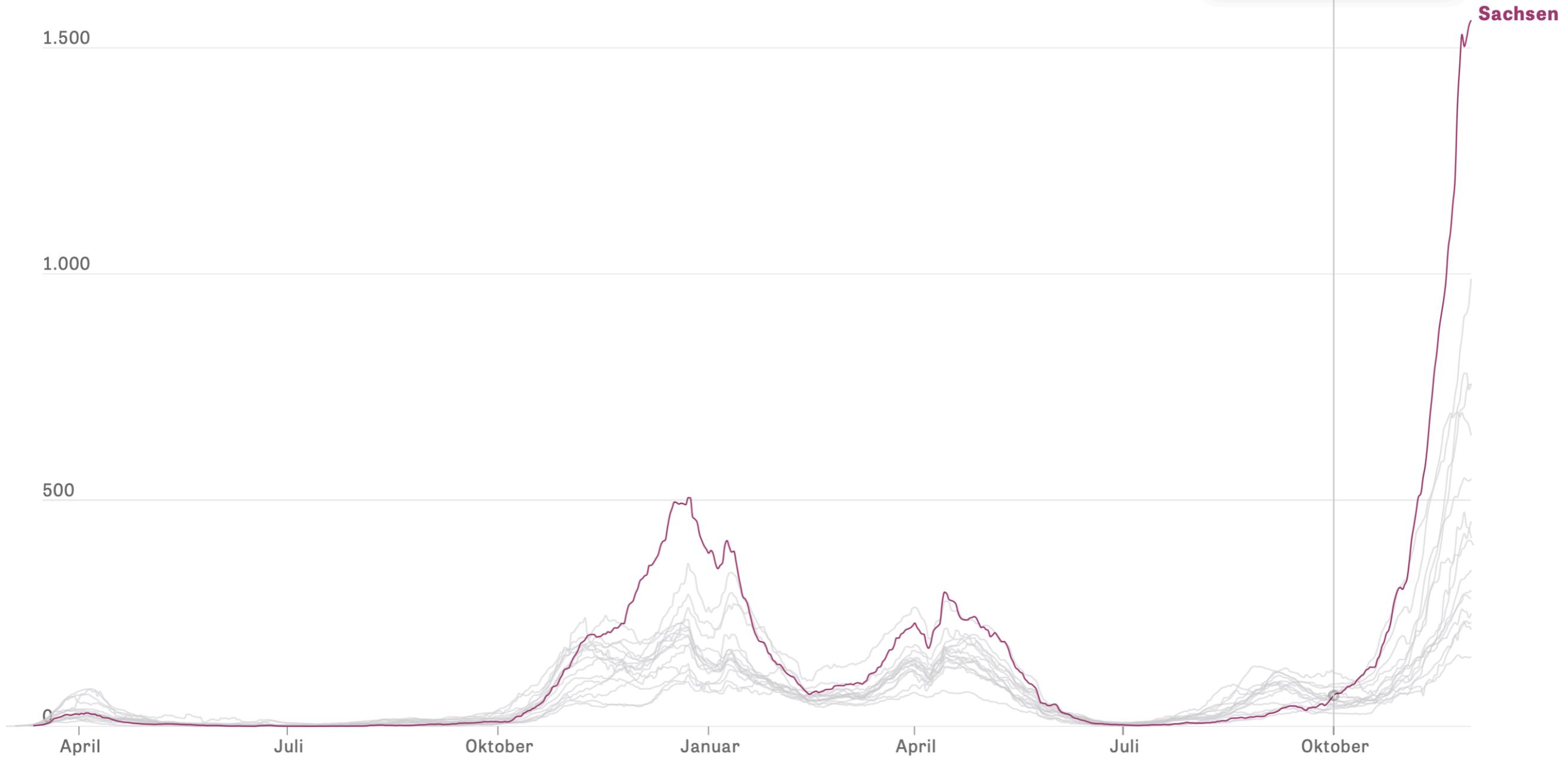


FÄLLE

TODESFÄLLE

1. Oktober  
**68,2 bestätigte Fälle**  
je 100.000

↑ Bestätigte Neuinfektionen in den letzten 7 Tagen je 100.000 Einwohner

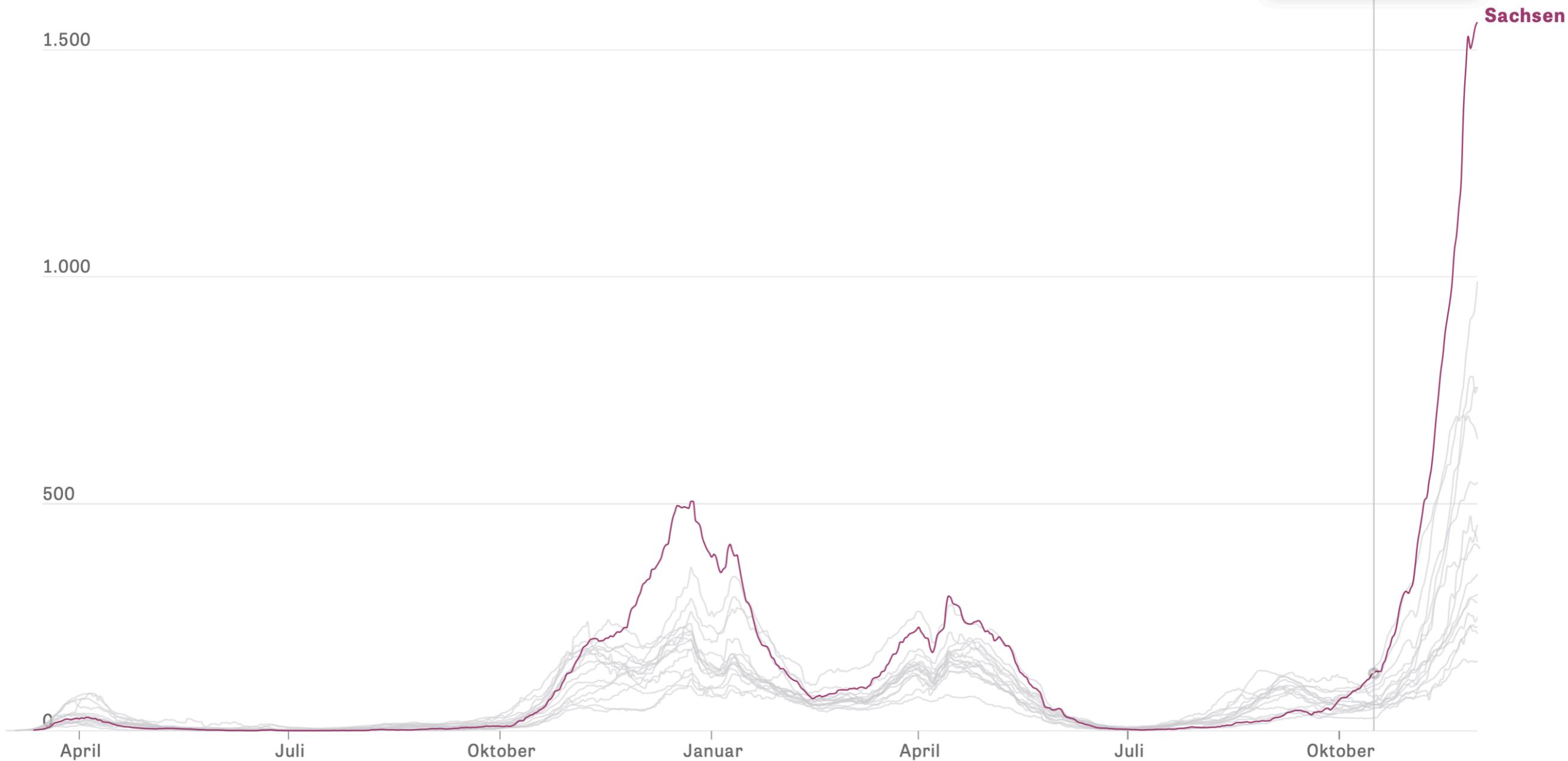


Sachsen

FÄLLE TODESFÄLLE

16. Oktober  
**126,8 bestätigte Fälle je 100.000**

↑ Bestätigte Neuinfektionen in den letzten 7 Tagen je 100.000 Einwohner

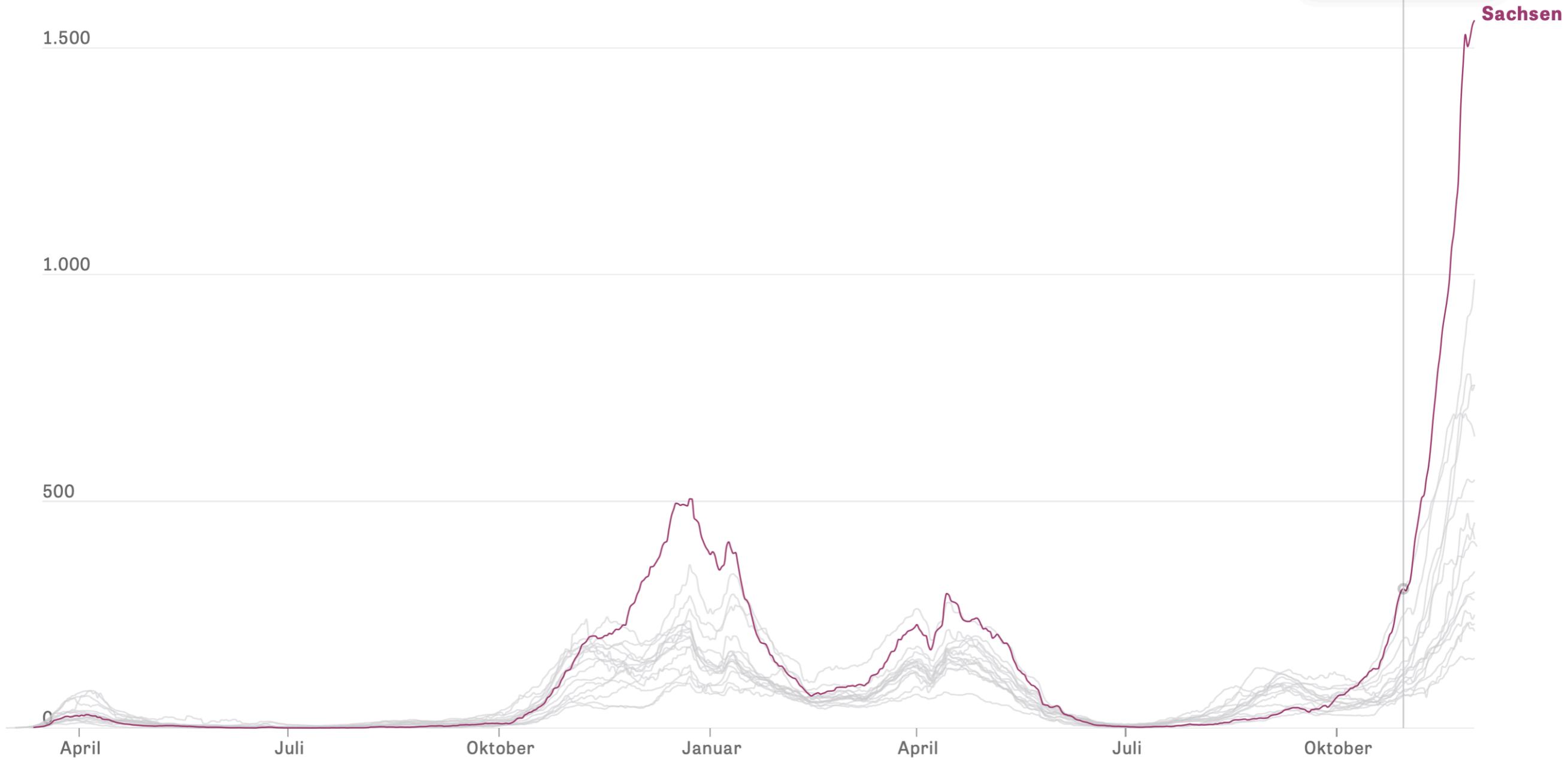


Sachsen

FÄLLE TODESFÄLLE

30. Oktober  
307,3 bestätigte  
Fälle je 100.000

↑ Bestätigte Neuinfektionen in den letzten 7 Tagen je 100.000 Einwohner



Sachsen

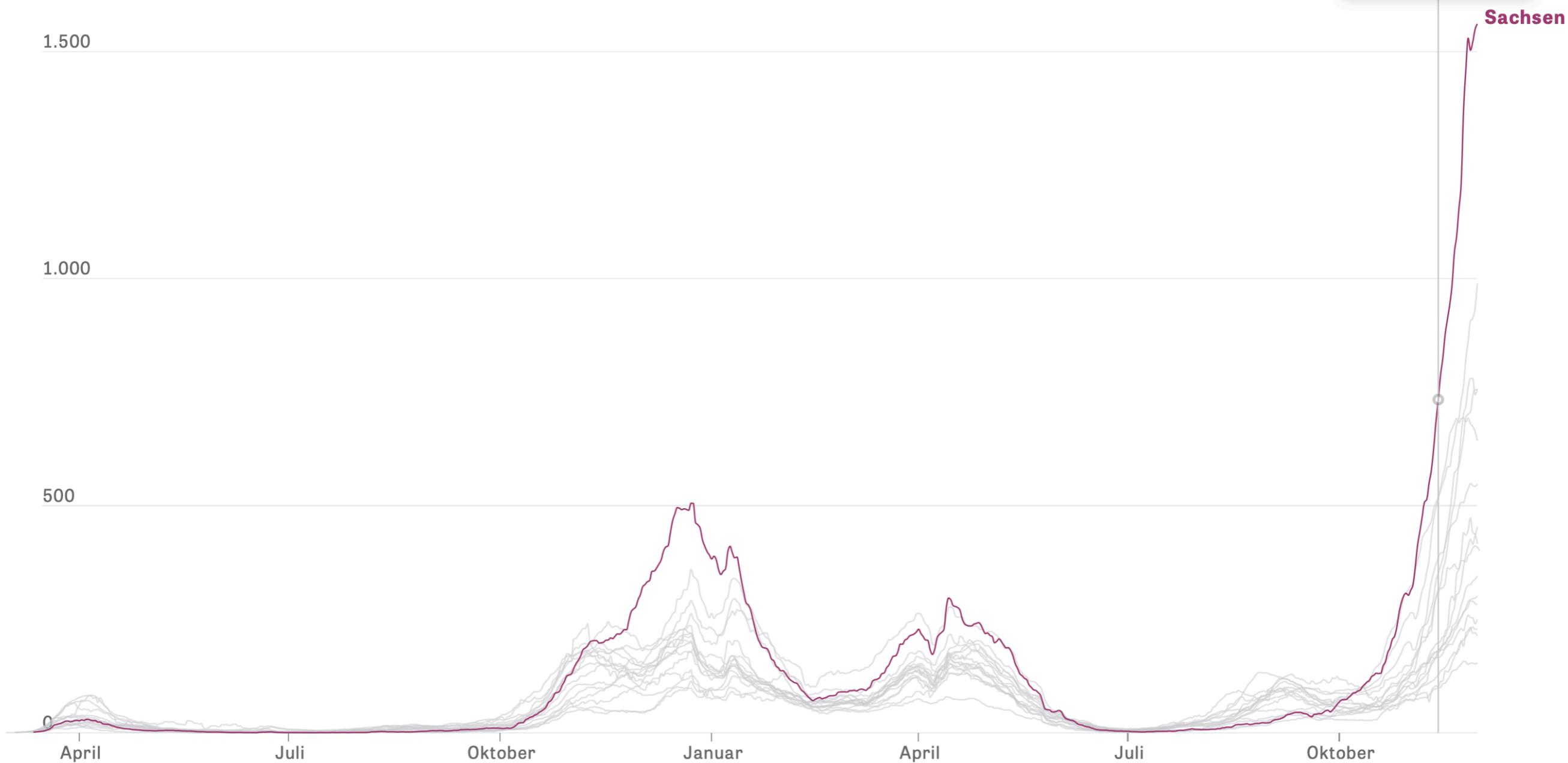


FÄLLE

TODESFÄLLE

13. November  
**733,8 bestätigte Fälle je 100.000**

↑ Bestätigte Neuinfektionen in den letzten 7 Tagen je 100.000 Einwohner

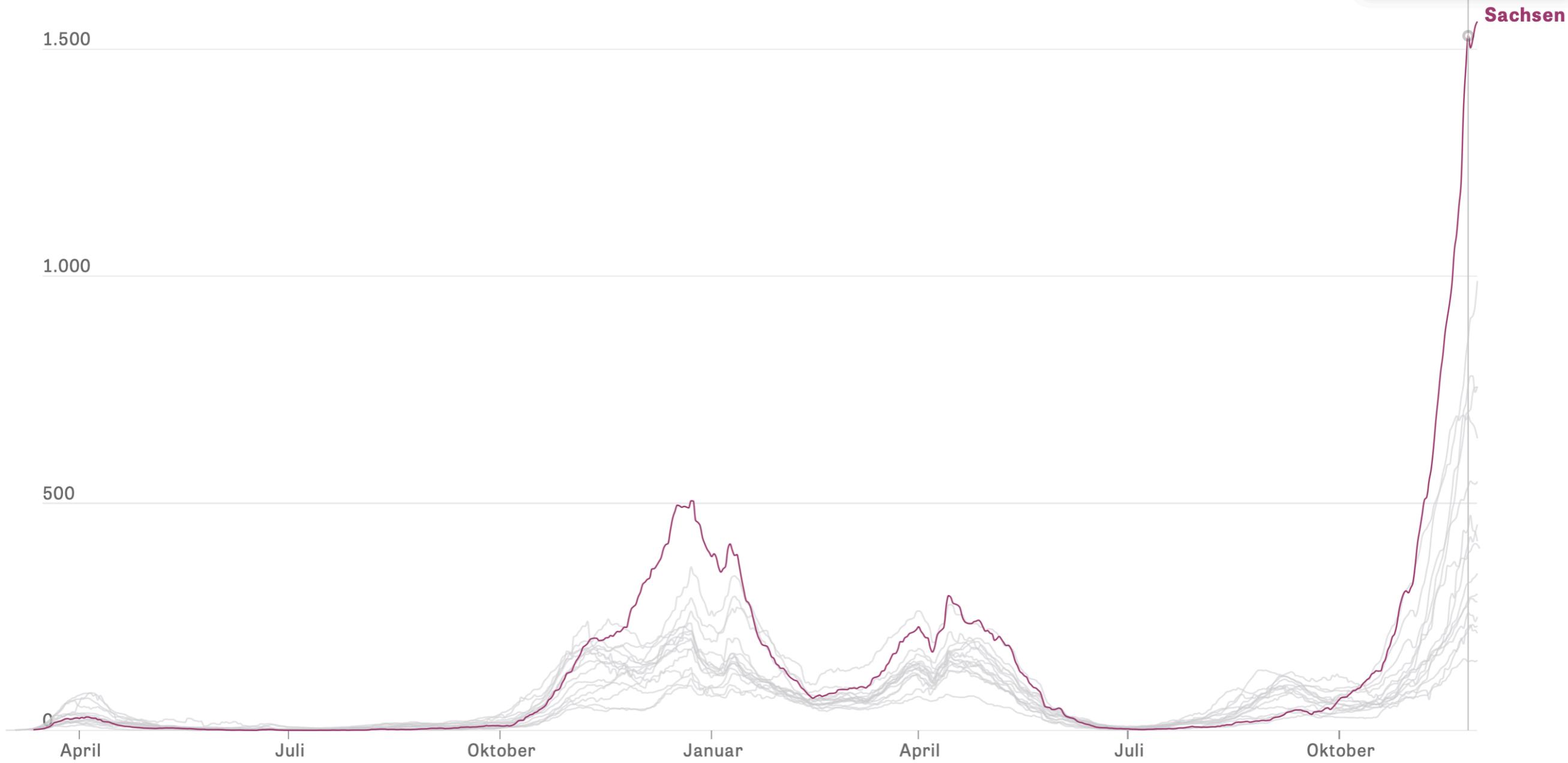


Sachsen

FÄLLE TODESFÄLLE

26. November  
**1.529,6 bestätigte Fälle je 100.000**

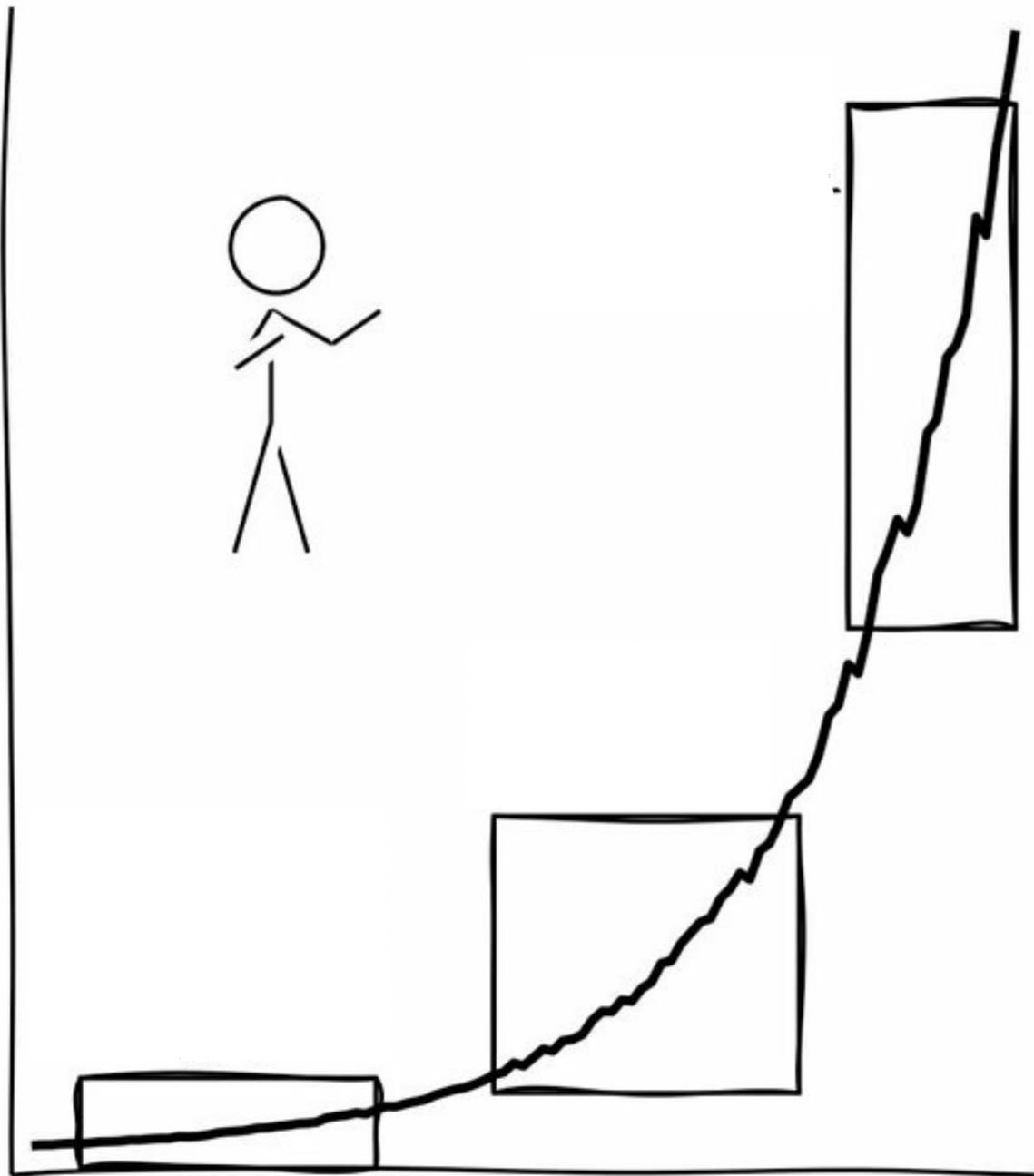
↑ Bestätigte Neuinfektionen in den letzten 7 Tagen je 100.000 Einwohner



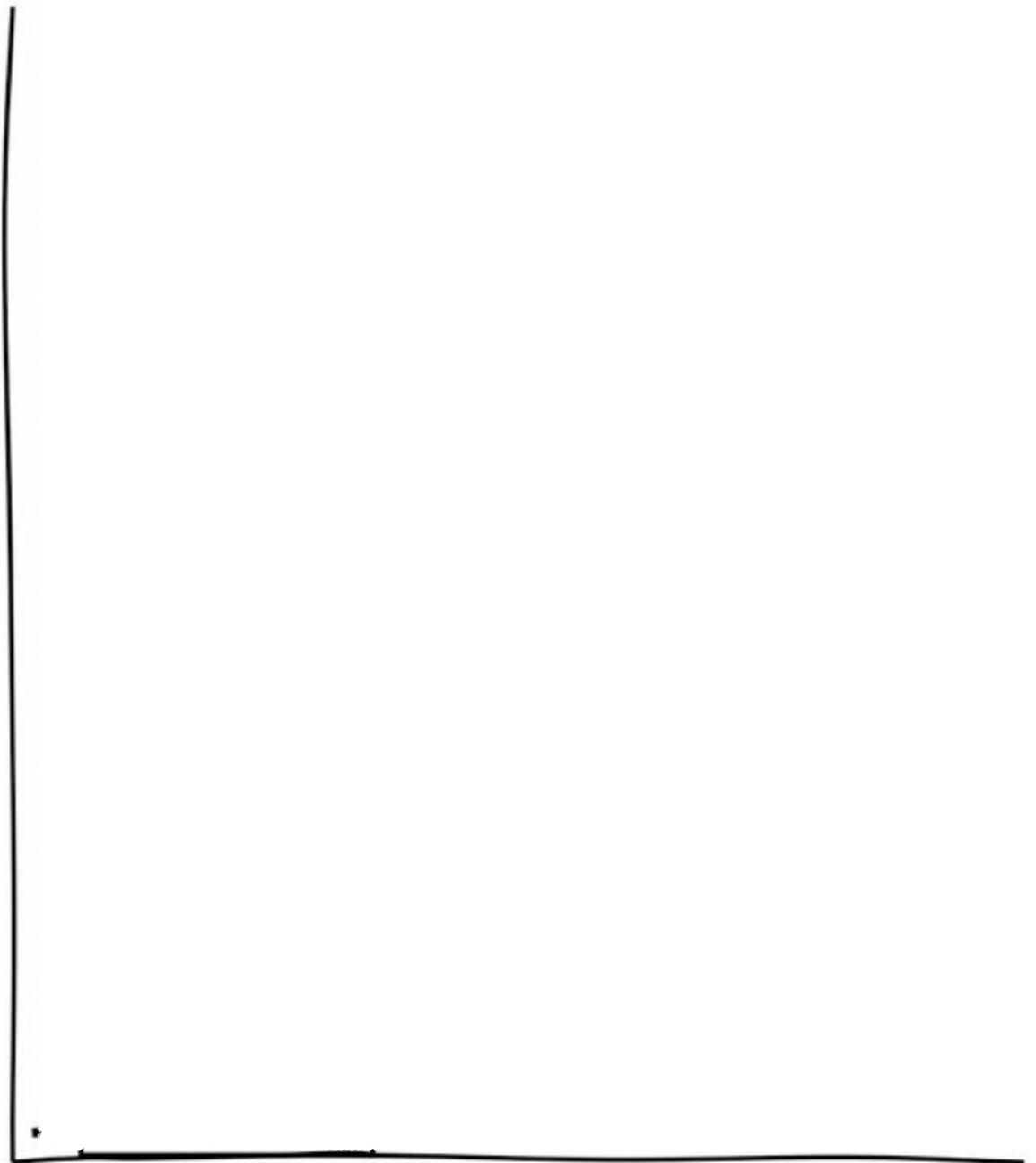
PUBLIC HEALTH

SCIENTISTS

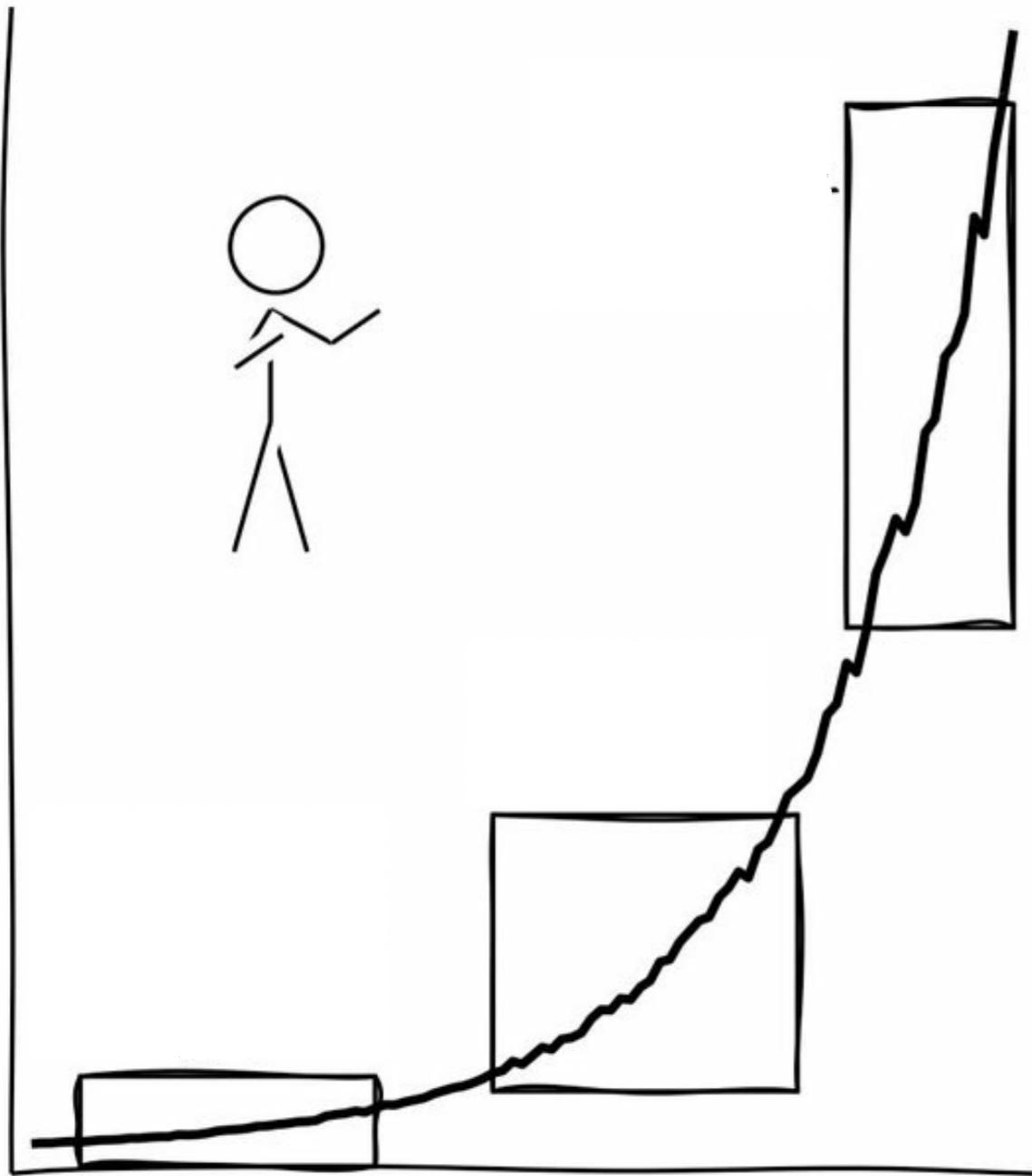
# PUBLIC HEALTH



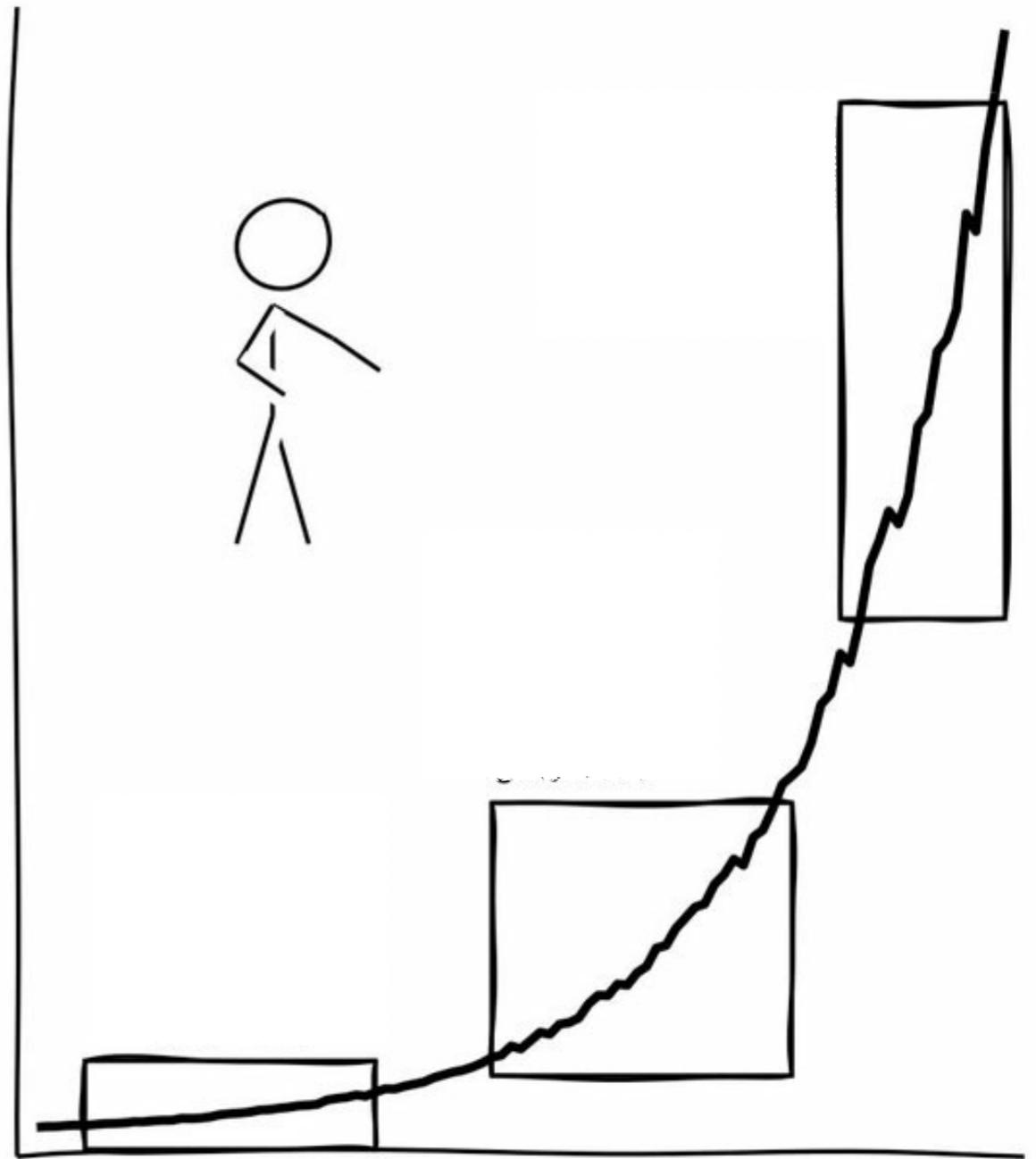
# SCIENTISTS



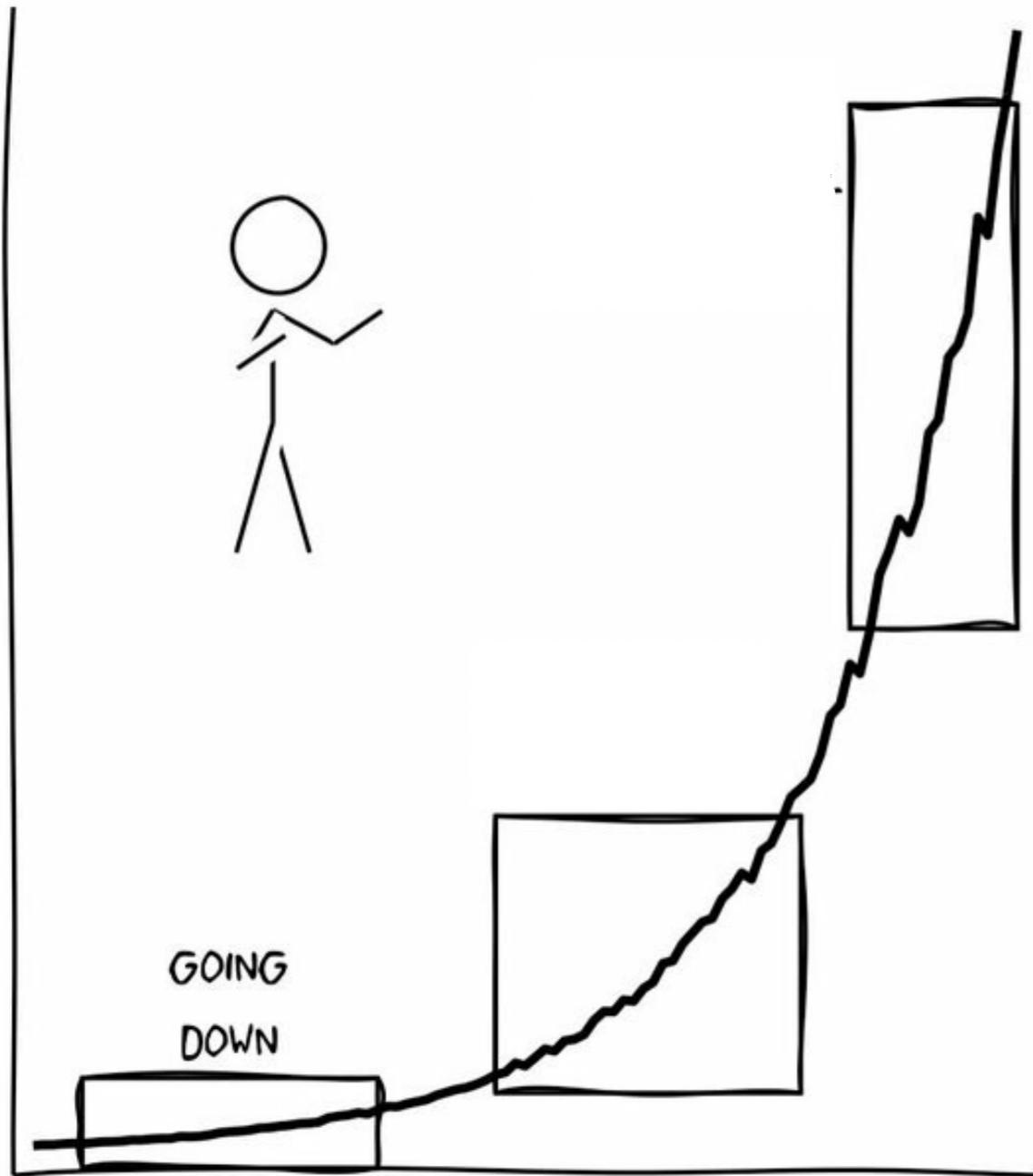
# PUBLIC HEALTH



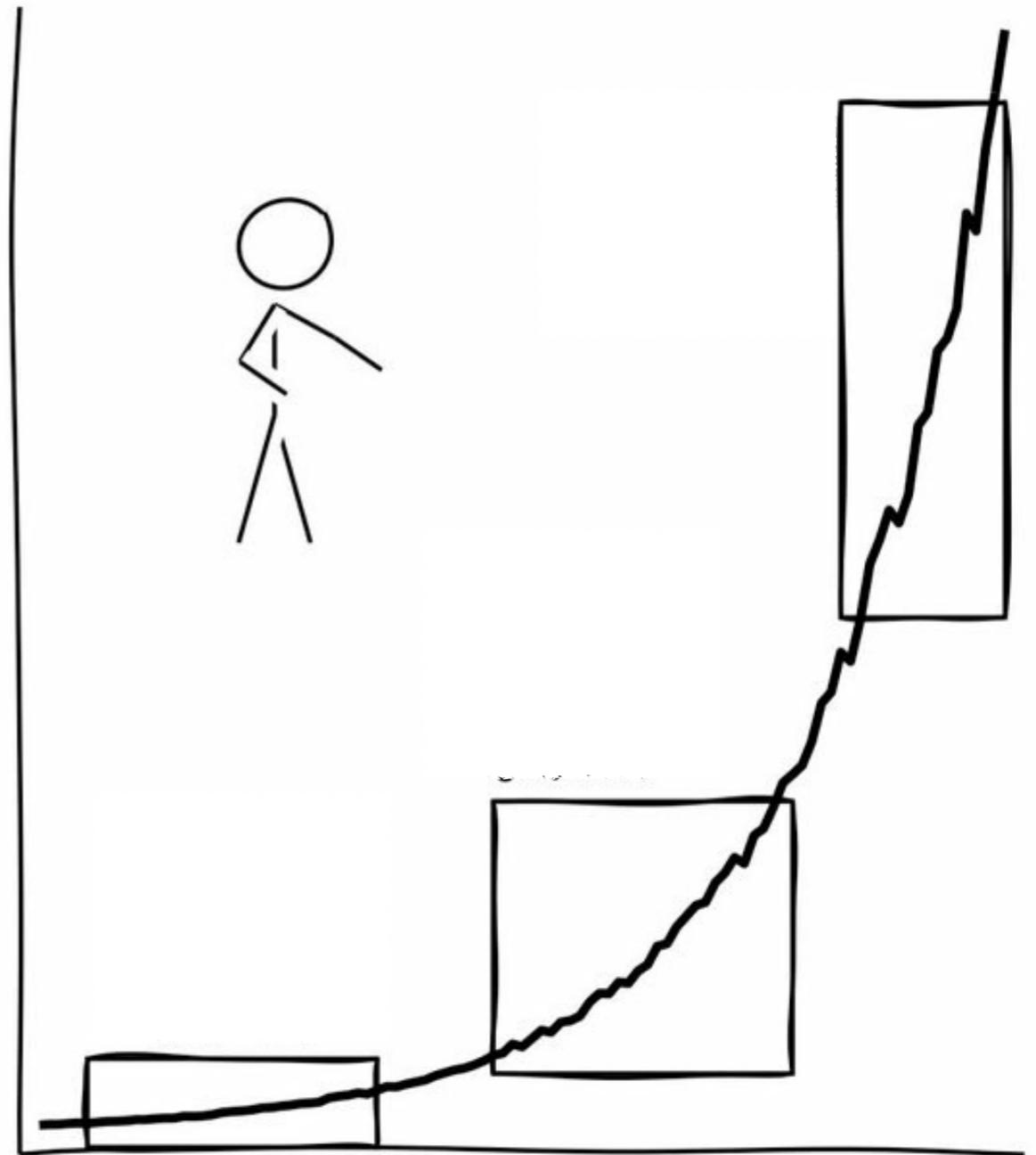
# SCIENTISTS



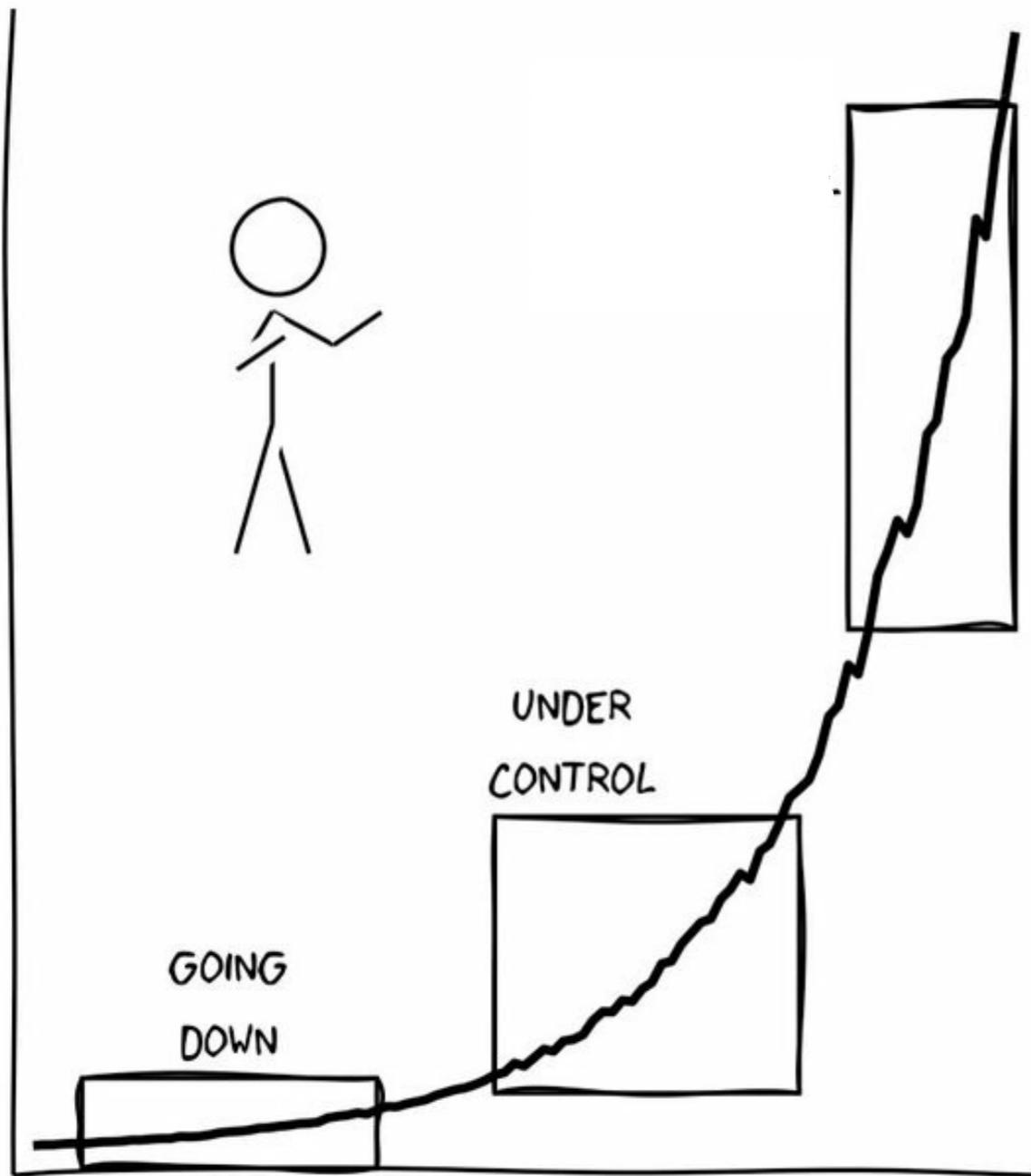
# PUBLIC HEALTH



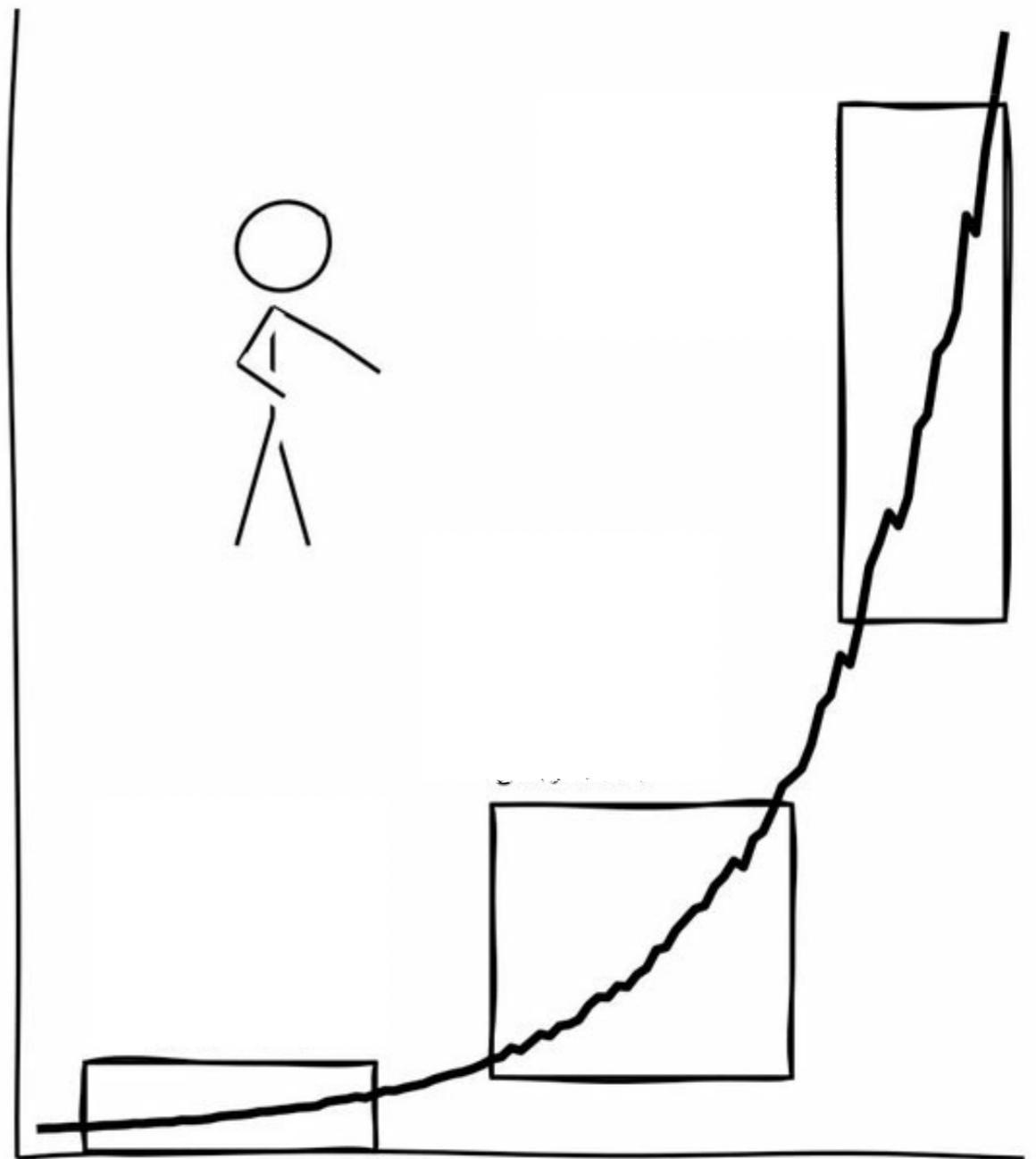
# SCIENTISTS



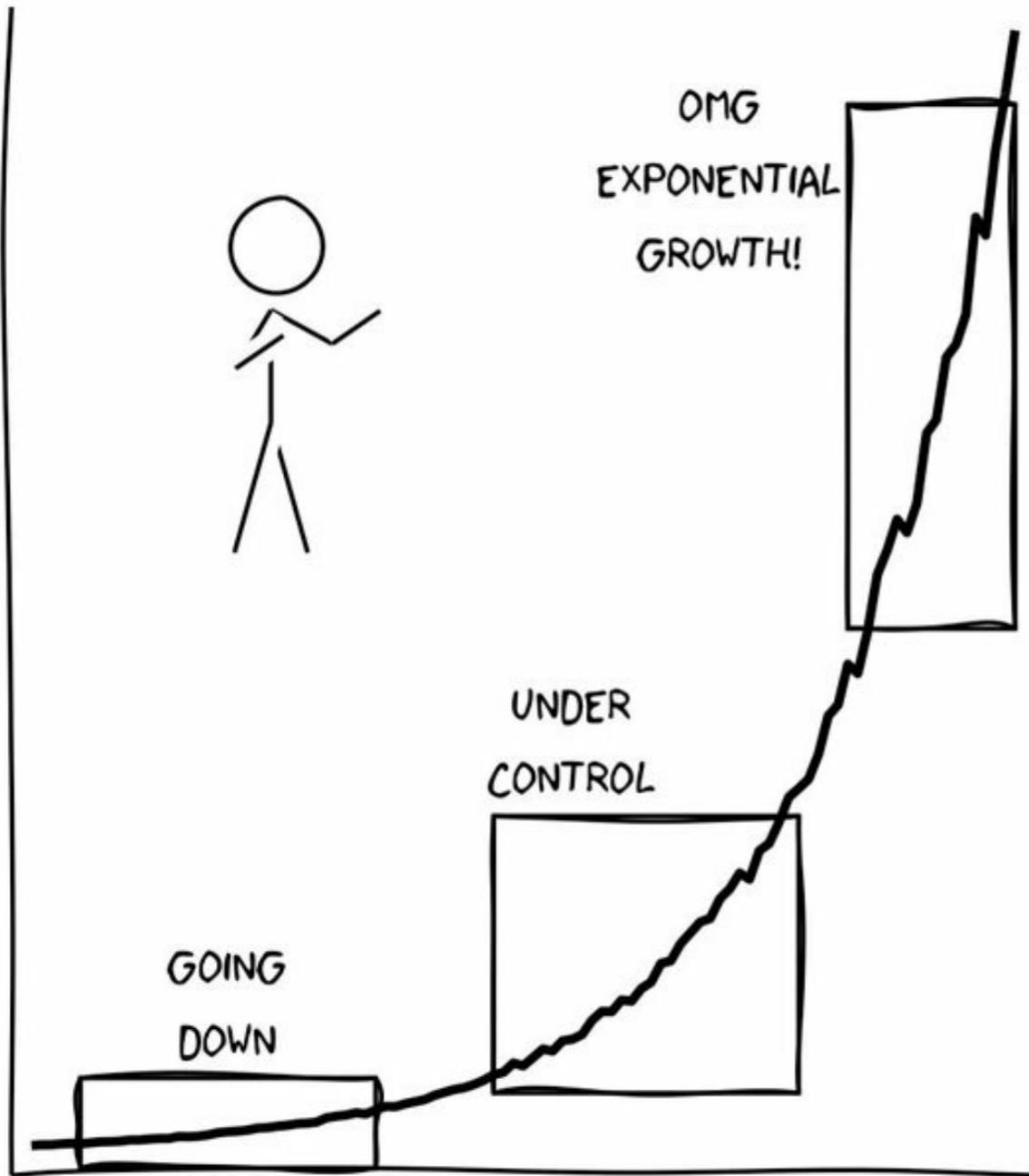
# PUBLIC HEALTH



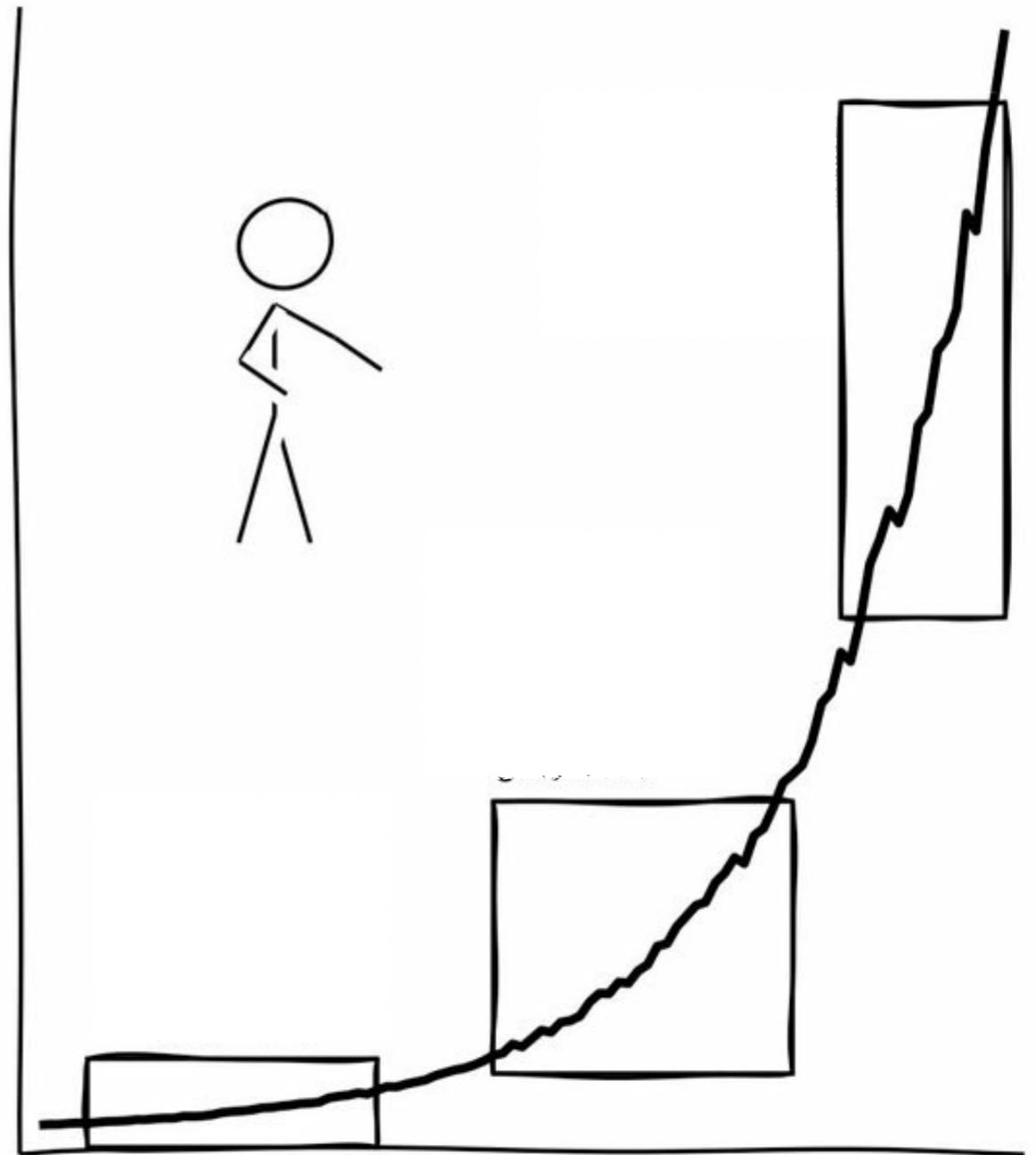
# SCIENTISTS



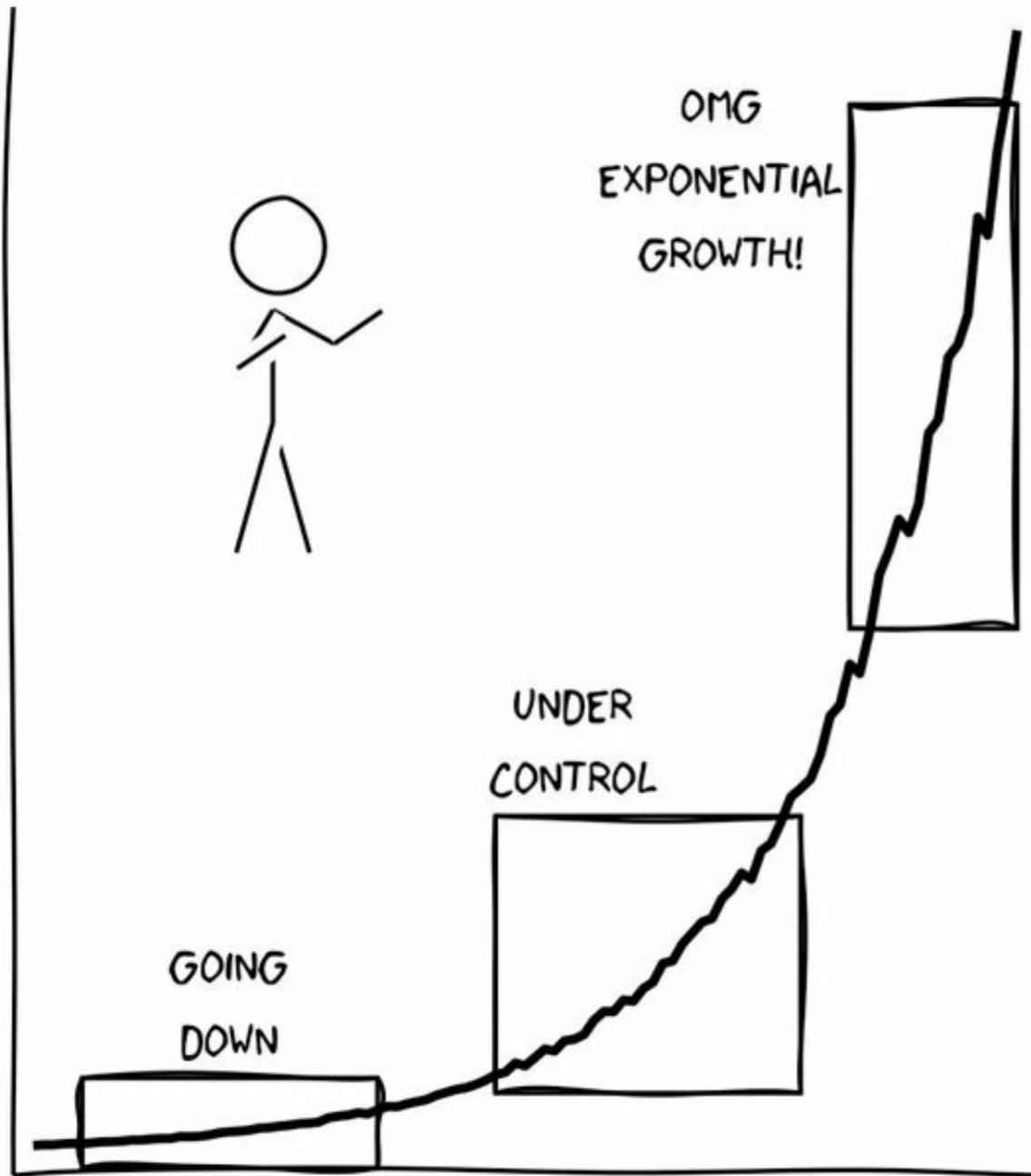
# PUBLIC HEALTH



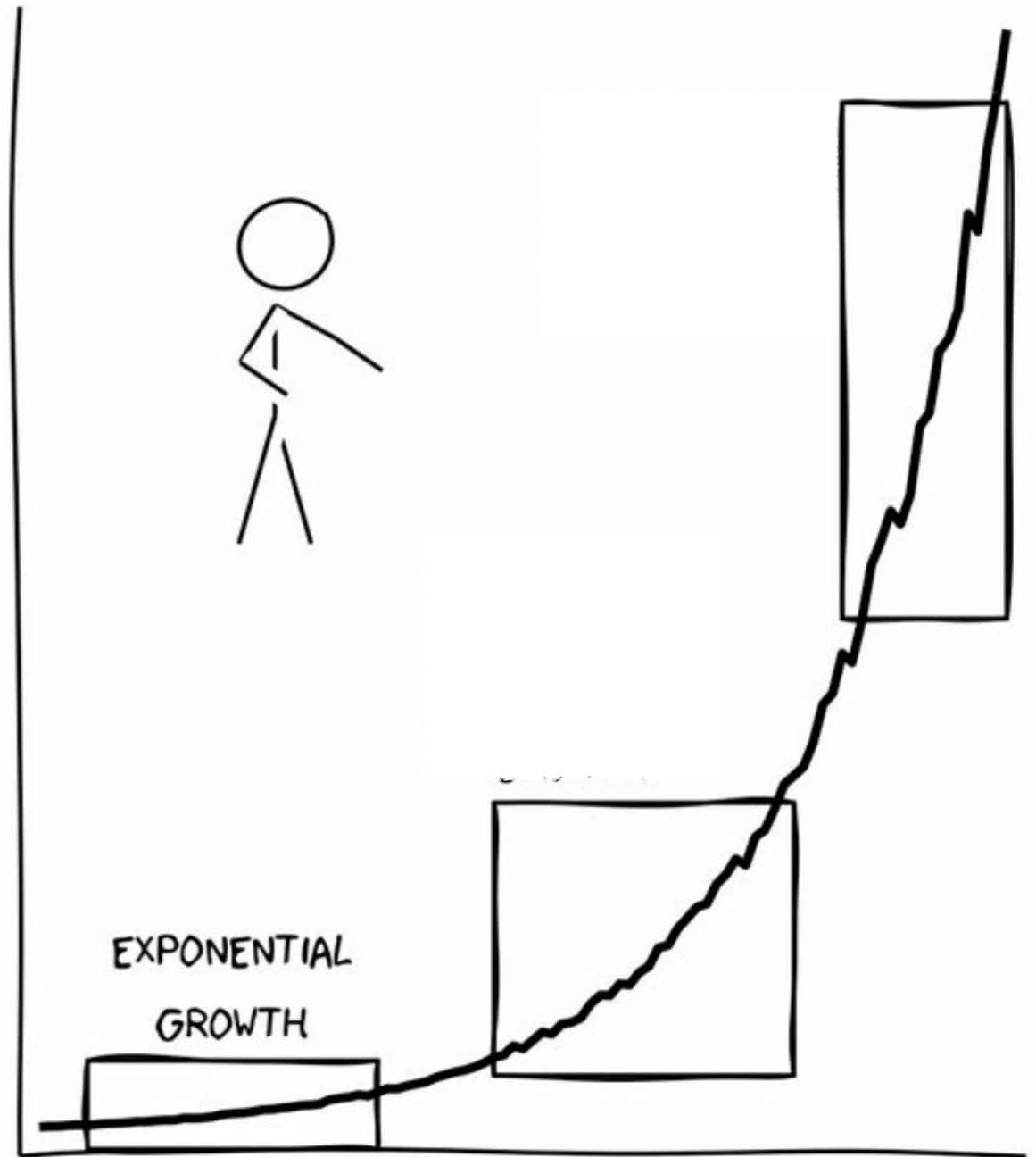
# SCIENTISTS



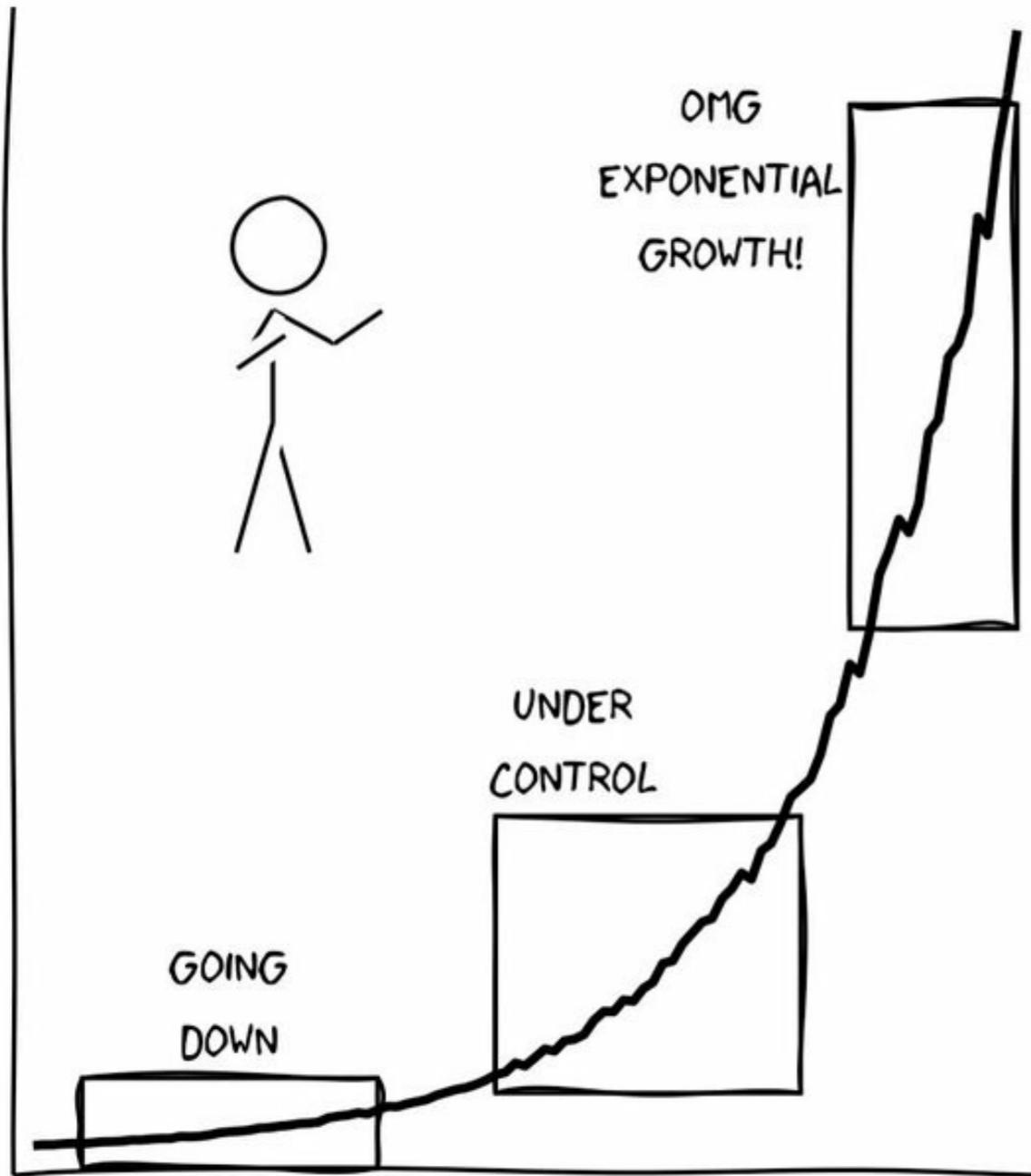
# PUBLIC HEALTH



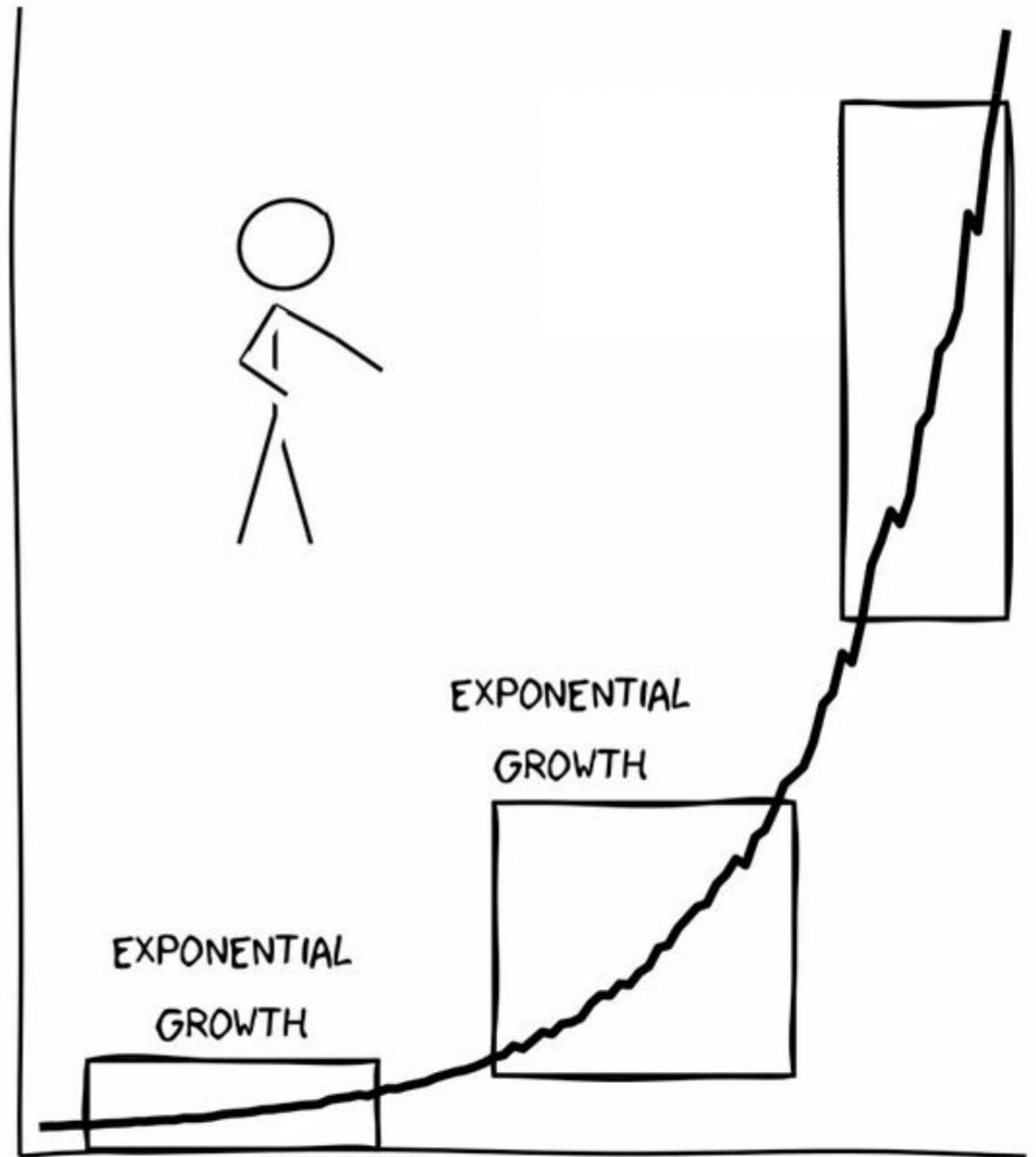
# SCIENTISTS



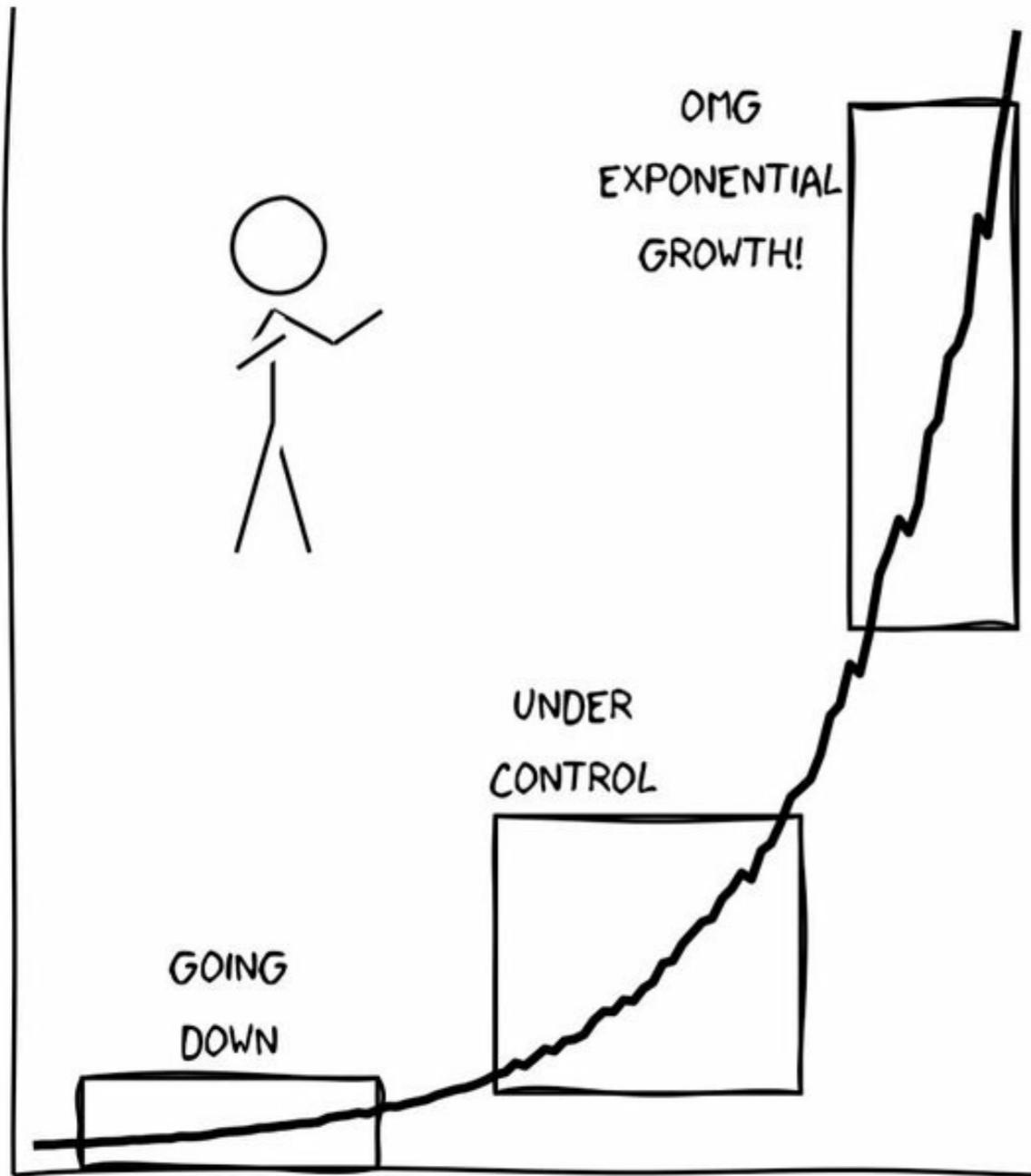
# PUBLIC HEALTH



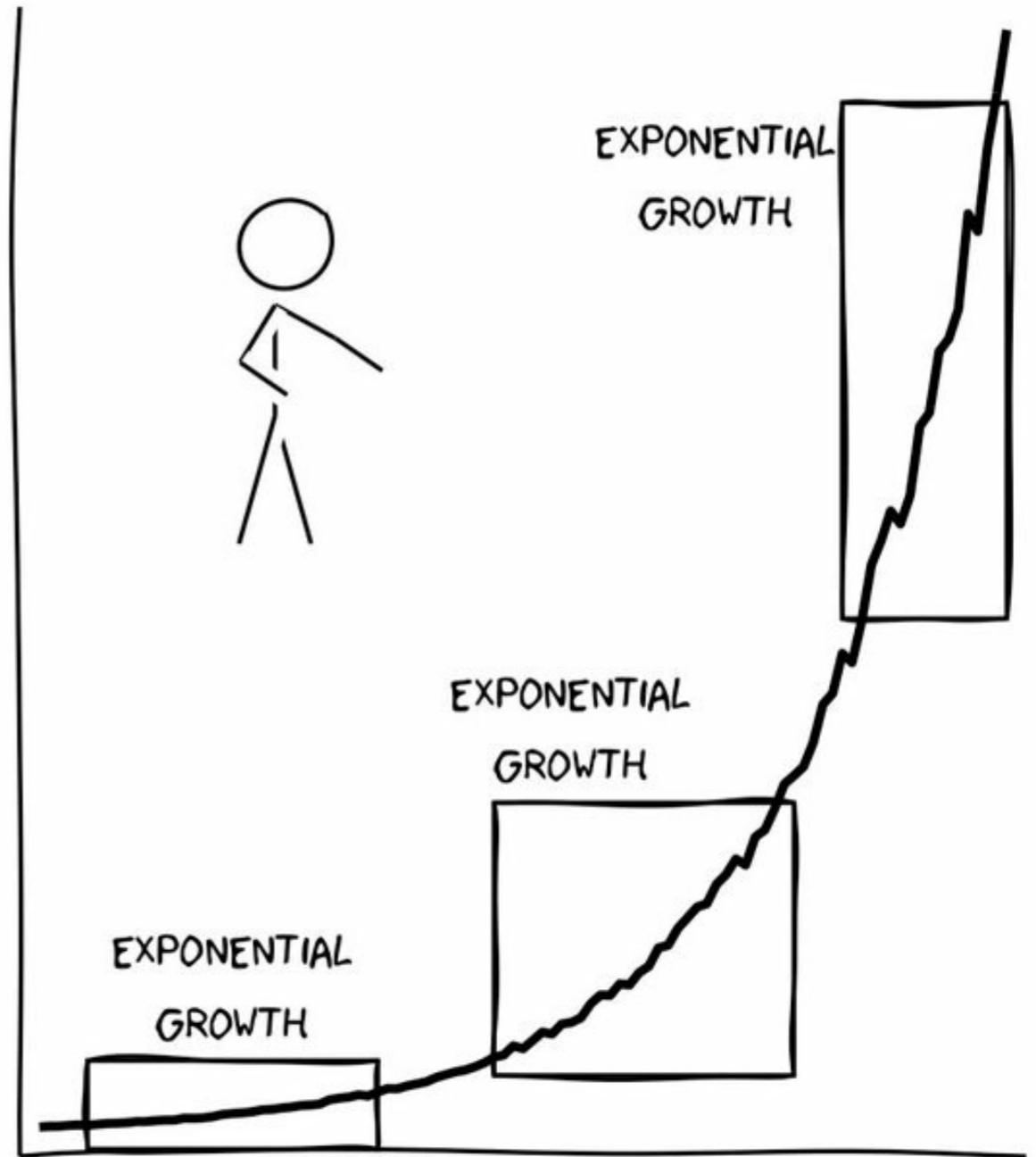
# SCIENTISTS



# PUBLIC HEALTH



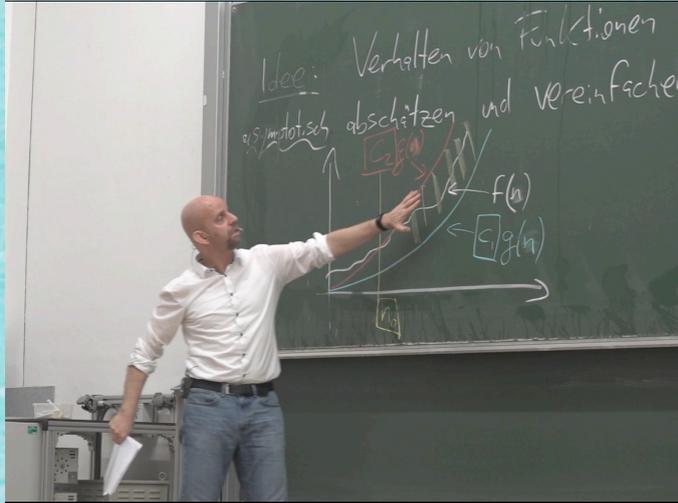
# SCIENTISTS



# Wofür ist das gut?



# Wofür ist das gut?



$$\log_2 \left[ \left( 2n + 4m + n(\log_2 n) + 1 \right) + 2m(\log_2 n + 1) \right] + 1$$

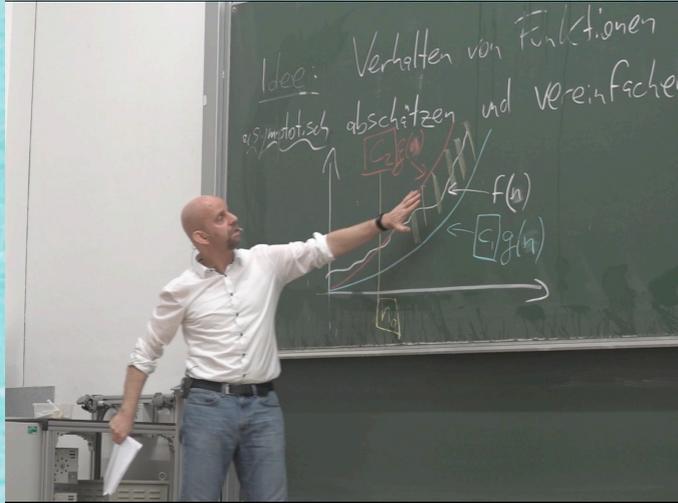
# Wofür ist das gut?



$$\log_2 \left| \left( 2n + 4m + n(\log_2 n + 1) + 2m(\log_2 n + 1) \right) \right| + 1$$

$$\Theta(m \log n)$$

# Wofür ist das gut?



$$\log_2 \left| \left( 2n + 4m + n(\log_2 n) + 1 \right) + 2^m \left( \log_2 n \right) + 1 \right| + 1$$

$$\Theta(m \log n)$$

**Ein algorithmisches Problem**

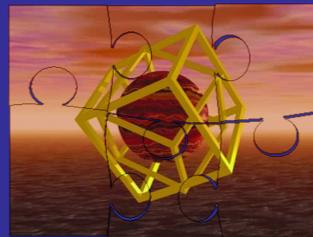
**Gegeben:** n Puzzleleile

Einfach so:  $O(n^2)$

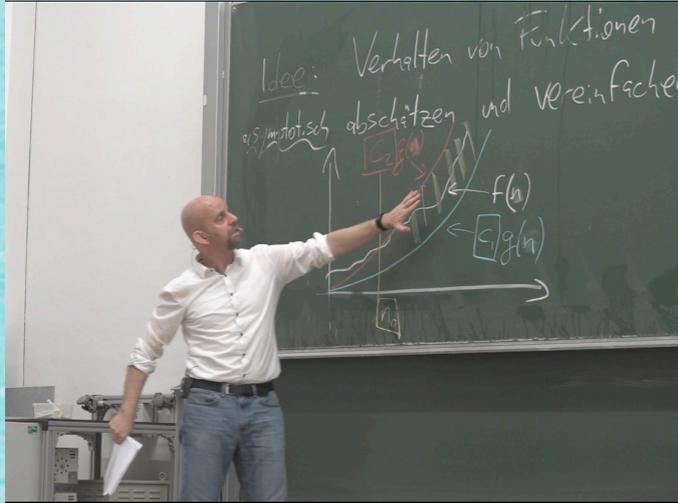
Für n=6:	21
Für n=100:	5.050
Für n=5000:	12.502.500

Raffiniert sortiert:  $O(n \log n)$

**Gesucht:** Eine systematische Methode zum Puzzeln



# Wofür ist das gut?



$$\log_2 \left| \left( 2n + 4m + n(\log_2 n + 1) + 2m(\log_2 n + 1) \right) \right| + 1$$

$$\Theta(m \log n)$$

Einfach so:

$$O(n^2)$$

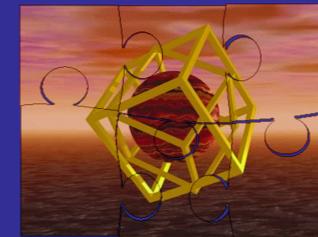
Für n=6: 21

Für n=100: 5.050

Für n=5000: 12.502.500

Ein algorithmisches Problem

**Gegeben:** n Puzzleleile



Einfach so:  $O(n^2)$

Für n=6: 21

Für n=100: 5.050

Für n=5000: 12.502.500

Raffiniert sortiert:

$$O(n \log n)$$

**Gesucht:** Eine systematische Methode zum Puzzeln

# Wofür ist das gut?



$$\log_2 \left| \left( 2n + 4m + n(\log_2 n) + 1 \right) + 2m(\log_2 n + 1) \right| + 1$$

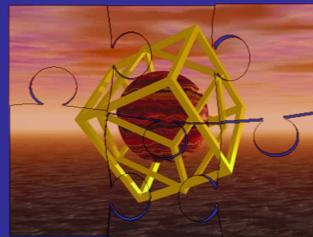
$$\Theta(m \log n)$$

Einfach so:  $O(n^2)$

Für n=6:	21
Für n=100:	5.050
Für n=5000:	12.502.500

Ein algorithmisches Problem

**Gegeben:** n Puzzleleile

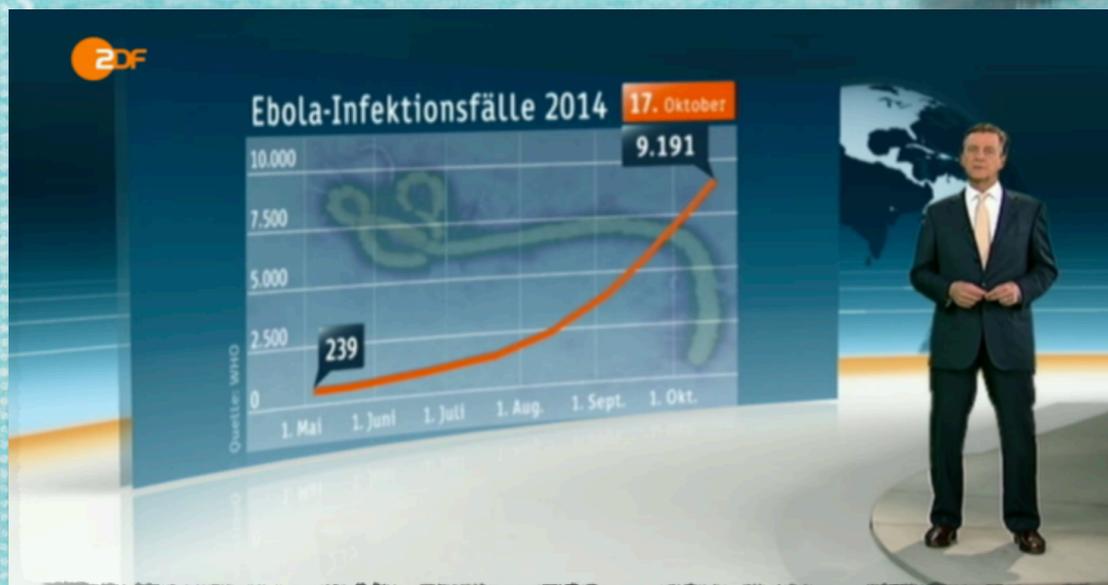


Einfach so:  $O(n^2)$

Für n=6:	21
Für n=100:	5.050
Für n=5000:	12.502.500

Raffiniert sortiert:  $O(n \log n)$

**Gesucht:** Eine systematische Methode zum Puzzeln



# Wofür ist das gut?



$$\log_2 \left| \left( 2n + 4m + n(\log_2 n) + 1 \right) + 2m(\log_2 n + 1) \right| + 1$$

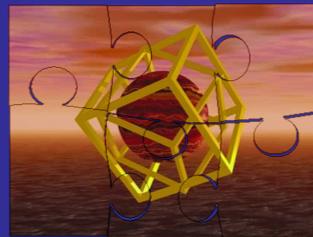
$$\Theta(m \log n)$$

Einfach so:  $O(n^2)$

Für n=6:	21
Für n=100:	5.050
Für n=5000:	12.502.500

Ein algorithmisches Problem

**Gegeben:** n Puzzleleile



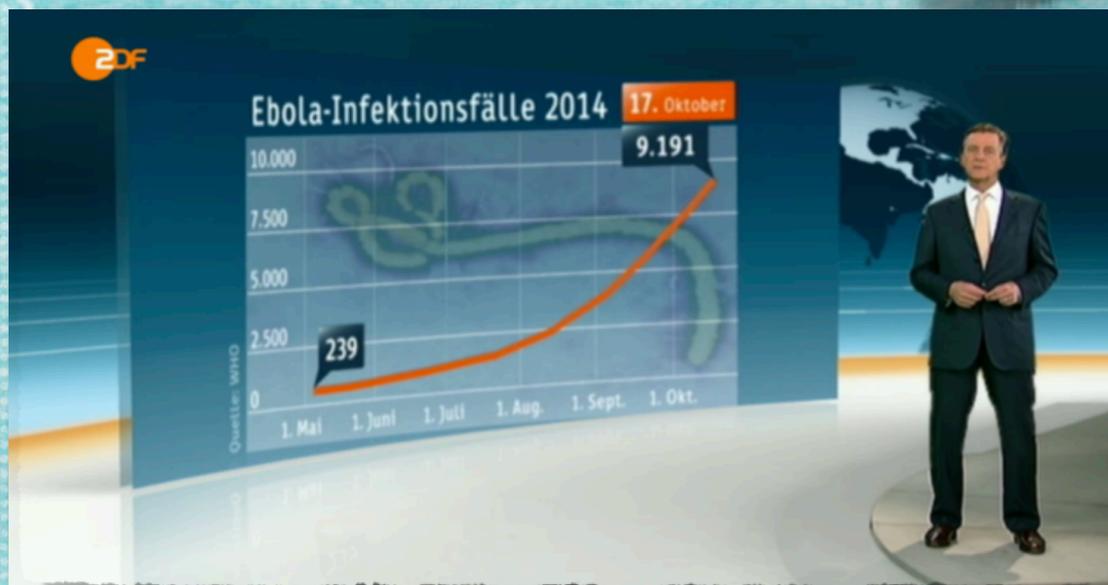
Einfach so:  $O(n^2)$

Für n=6:	21
Für n=100:	5.050
Für n=5000:	12.502.500

Raffiniert sortiert:  $O(n \log n)$

**Gesucht:** Eine systematische Methode zum Puzzeln

$$\Theta(n^2)$$



# Wofür ist das gut?



$$\log_2 \left| \left( 2n + 4m + n(\log_2 n + 1) + 2m(\log_2 n + 1) \right) \right| + 1$$

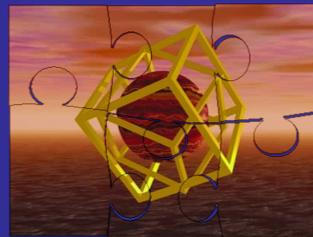
$$\Theta(m \log n)$$

Einfach so:  $O(n^2)$

Für n=6:	21
Für n=100:	5.050
Für n=5000:	12.502.500

Ein algorithmisches Problem

**Gegeben:** n Puzzleleile

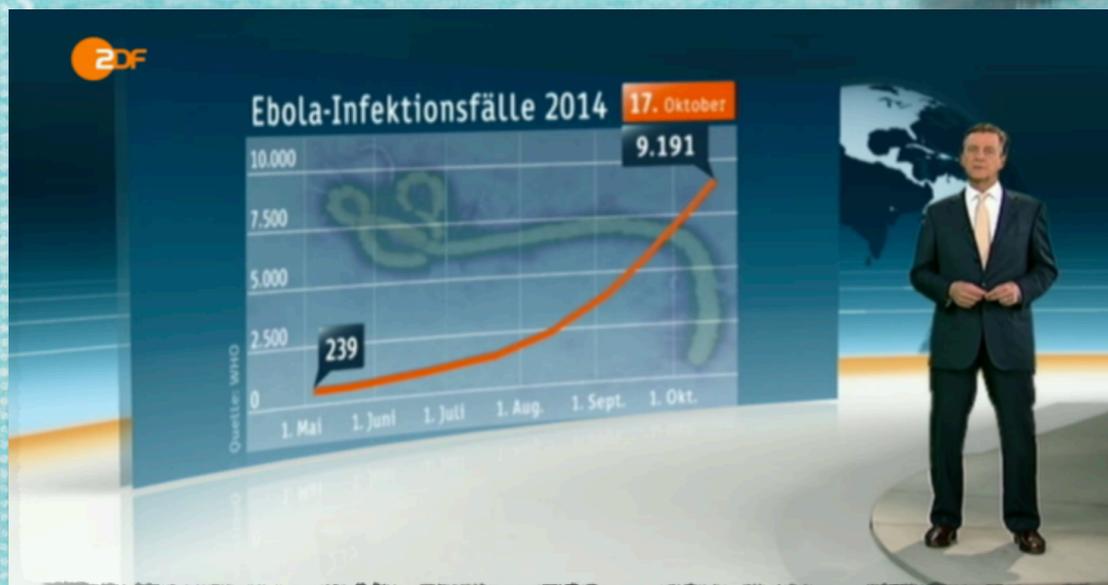


Einfach so:  $O(n^2)$

Für n=6:	21
Für n=100:	5.050
Für n=5000:	12.502.500

Raffiniert sortiert:  $O(n \log n)$

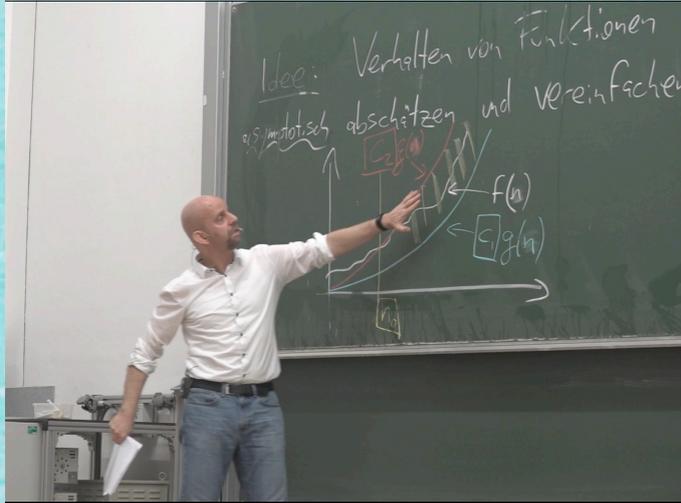
**Gesucht:** Eine systematische Methode zum Puzzeln



$$\Theta(n^2)$$

$$\Theta(2^n)$$

# Wofür ist das gut?



$$\log_2 \left[ \left( 2n + 4m + n(\log_2 n + 1) + 2m(\log_2 n + 1) \right) \right] + 1$$

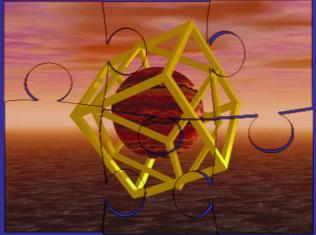
$$\Theta(m \log n)$$

Einfach so:  $O(n^2)$

Für n=6:	21
Für n=100:	5.050
Für n=5000:	12.502.500

Ein algorithmisches Problem

**Gegeben:** n Puzzleleile

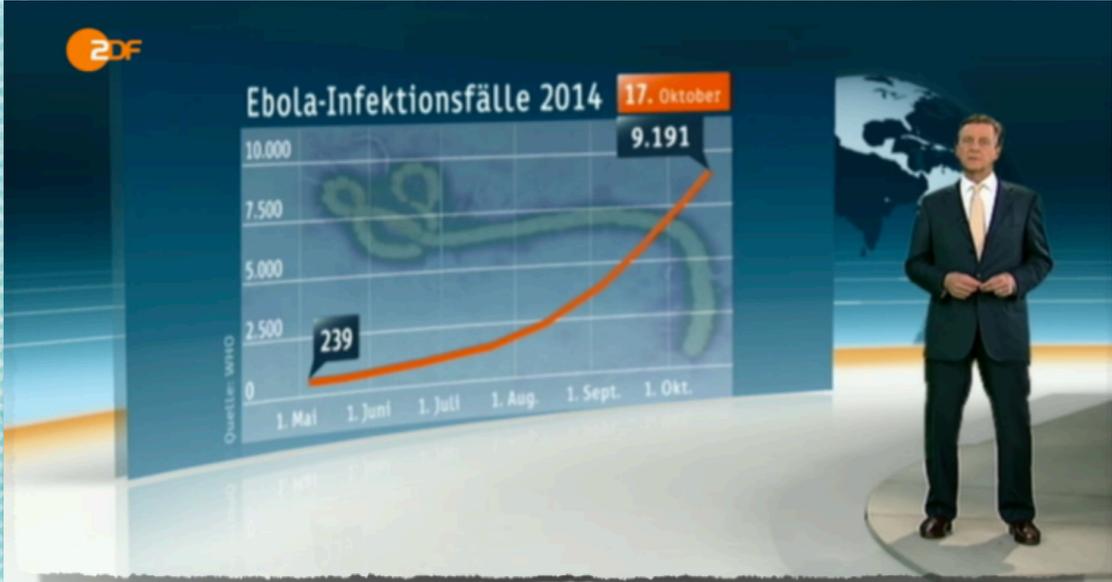


Einfach so:  $O(n^2)$

Für n=6:	21
Für n=100:	5.050
Für n=5000:	12.502.500

Raffiniert sortiert:  $O(n \log n)$

**Gesucht:** Eine systematische Methode zum Puzzeln



$$\Theta(n^2)$$

$$(2n)^2 = 4 \cdot n^2$$

$$\Theta(2^n)$$

# Wofür ist das gut?



$$\log_2 \left| \left( 2n + 4m + n(\log_2 n) + 1 \right) + 2m(\log_2 n + 1) \right| + 1$$

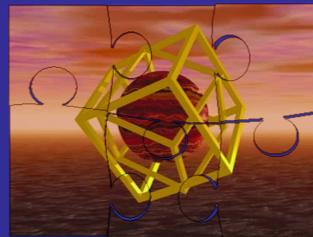
$$\Theta(m \log n)$$

Einfach so:  $O(n^2)$

Für n=6:	21
Für n=100:	5.050
Für n=5000:	12.502.500

Ein algorithmisches Problem

**Gegeben:** n Puzzleleile

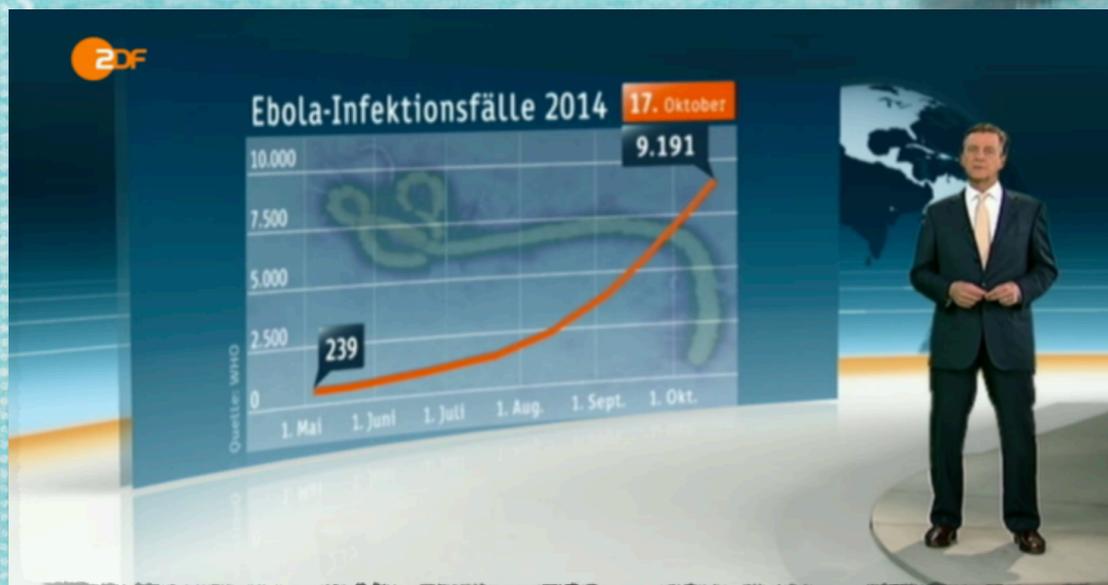


Einfach so:  $O(n^2)$

Für n=6:	21
Für n=100:	5.050
Für n=5000:	12.502.500

Raffiniert sortiert:  $O(n \log n)$

**Gesucht:** Eine systematische Methode zum Puzzeln



$$\Theta(n^2)$$

$$(2n)^2 = 4 \cdot n^2$$

$$\Theta(2^n)$$

$$2^{2n} = 2^n \cdot 2^n$$

*Weiter an der Tafel!*

*s.fekete@tu-bs.de*