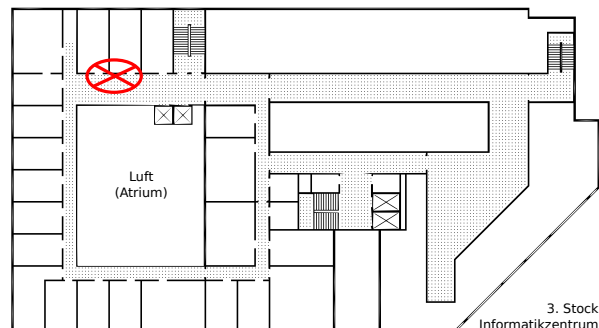


Hausaufgabenblatt 3

Abgabe der Lösungen bis zum 19.12.2022 um 14:00 Uhr im Hausaufgabenschrank bei Raum IZ 337 (siehe Skizze rechts). Es werden nur mit einem dokumentenechten Stift (kein Rot!) geschriebene Lösungen gewertet.

Bitte die Blätter zusammenheften und vorne mit Namen, Matrikelnummer und Gruppennummer versehen!



Hausaufgabe 1 (Durchmesser von Graphen): (3+4+4 Punkte)

Distanzen spielen in der Graphentheorie eine sehr große Rolle. In dieser Aufgabe wollen wir einen Algorithmus entwerfen, der den *Durchmesser* eines Graphen bestimmt, d.h. die maximale kürzeste Distanz zwischen zwei Knoten. Dazu definieren wir folgendes.

- Die *Distanz* $\text{dist}(v, w)$ zwischen zwei Knoten $v, w \in V$ in einem Graphen G ist die Anzahl an Kanten auf einem kürzesten Weg zwischen v und w in G . Gibt es keinen Weg zwischen v und w , so ist $\text{dist}(v, w) = \infty$.
- Die *Exzentrizität* $\text{ex}(v)$ eines Knotens $v \in V$ bezeichnet die Länge eines kürzesten Pfades zu dem am weitesten entfernten Knoten, d.h. $\text{ex}(v) := \max_{w \in V} (\text{dist}(v, w))$.
- Der *Durchmesser* $\text{diam}(G)$ eines Graphen G entspricht dem Maximum über die Exzentrizitäten, d.h. $\text{diam}(G) := \max_{v \in V} (\text{ex}(v))$.

a) Betrachte den in Abbildung 1 abgebildeten Graphen H . Gib folgende Punkte an:

(i) $\text{ex}(v_1)$ und $\text{ex}(v_7)$.

(ii) $\text{diam}(H)$

(iii) Menge $V' \subseteq V$ an Knoten, sodass $\text{ex}(w) = \text{diam}(H)$ für alle $w \in V'$ gilt.

b) Aus der Vorlesung ist Algorithmus 3.17 bekannt (siehe Vorlesung vom 07.12.22), der jedem Knoten $w \in V$ die kürzeste Distanz zu einem Knoten $v \in V$ bestimmt.

Entwirf einen Algorithmus EXZENTRIZITÄT in Pseudocode (maximal 10 Zeilen¹) mit Laufzeit $O(n + m)$, der für einen gegebenen Graphen G und Knoten $v \in V$ den Wert $\text{ex}(v)$ bestimmt. Begründe kurz, warum die Laufzeit eingehalten wird.

c) Entwirf einen Algorithmus DURCHMESSER in Pseudocode (maximal 10 Zeilen¹) mit Laufzeit $O(n^2 + nm)$, der für einen gegebenen Graphen G den Wert $\text{diam}(G)$ bestimmt. Begründe kurz, warum die Laufzeit eingehalten wird.

(Hinweis: Ein Korrektheitsbeweis für die Algorithmen ist nicht erforderlich.)

¹end while, end if, etc. werden dabei nicht mitgezählt.

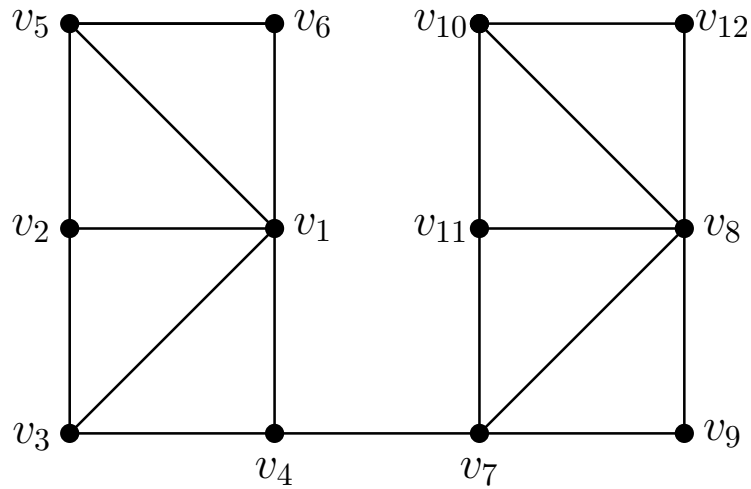


Abbildung 1: Darstellung des Graphen H .

Hausaufgabe 2 (Asymptotisches Wachstum):

(3+3+3 Punkte)

- a) Bestimme geeignete Konstanten, um zu zeigen, dass $f(n) := 5n^3 + n^2 - 9n + 7 \in \Theta(n^3)$.
- b) Betrachte die Funktionen $f, g, h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$.
Zeige oder widerlege:

$$f(n) \in \Theta(g(n)) \text{ und } g(n) \in O(h(n)) \implies f(n) \in \Theta(h(n))$$

- c) In welcher Beziehung stehen die folgenden Klassen zueinander? Schreibe \subsetneq in das Feld, wenn Klasse A in Klasse B enthalten ist (aber $A \neq B$), \supsetneq , wenn Klasse B in Klasse A enthalten ist (aber $A \neq B$), $=$, wenn die Klassen A und B übereinstimmen und \times , wenn dies alles nicht zutrifft. Eine Begründung ist nicht notwendig.

A	Relation	B
$O(n^2)$		$\Theta(n \log n)$
$\Theta(n^2 - n)$		$\Theta(n^2)$
$\Omega\left(\frac{n}{\log n}\right)$		$\Omega(n)$