Technische Universität Braunschweig

Algorithmen und Datenstrukturen – Übung #8

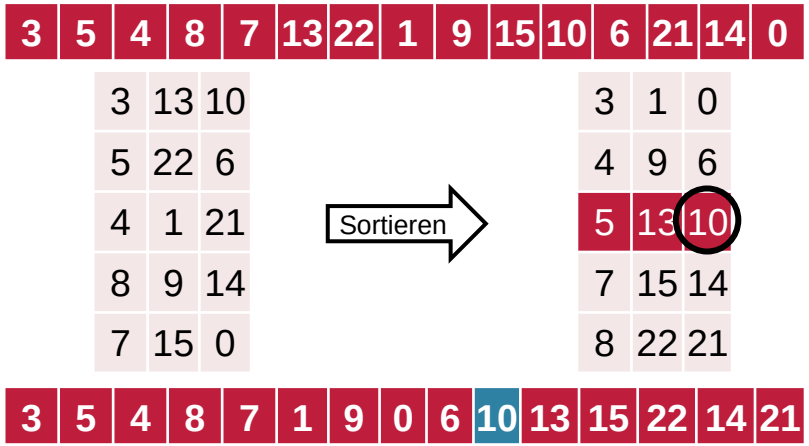
Quicksort, Mediane, kd-Bäume

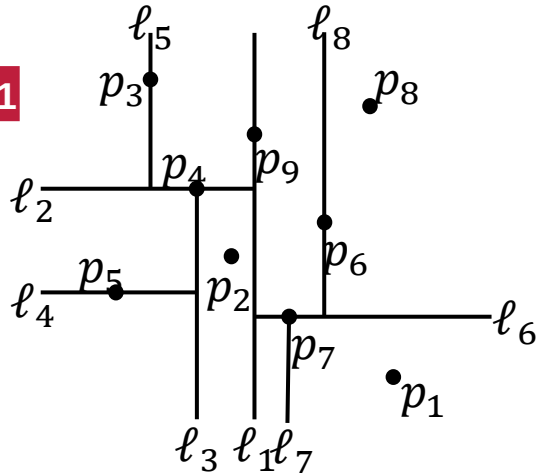
Matthias Konitzny, Arne Schmidt

03.02.22

Heute

- Quicksort
- Mediane
  - Algorithmus
  - Laufzeit
- kd-Trees

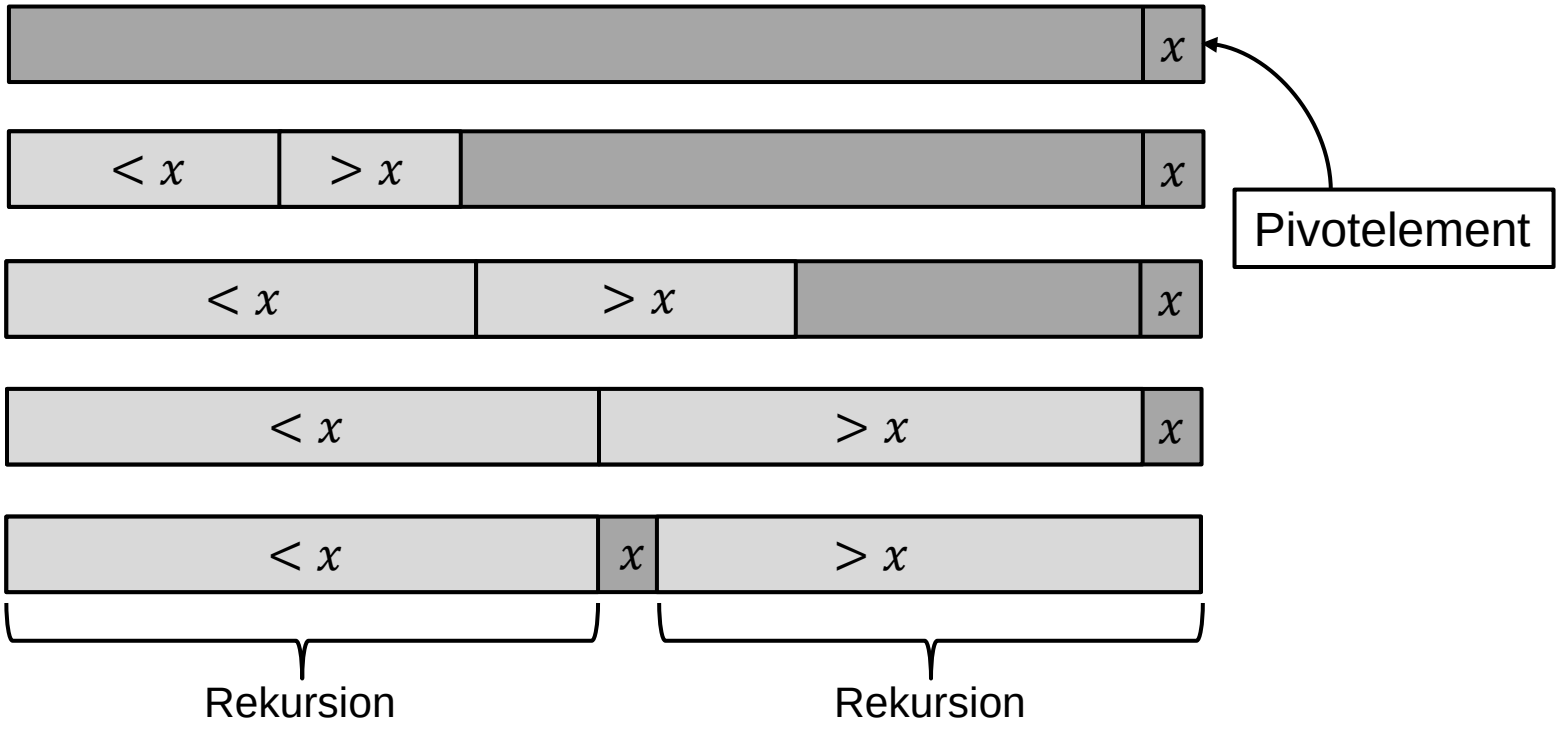




Bisherige Sortierverfahren

Algorithmus	Laufzeit	Idee
Mergesort	$O(n \log n)$	Sortiere Teilarrays und merge sie. Beginne mit kleinstem Teilarray (z.B. der Größe 1)
Quicksort	$O(n^2)$	Pivotisiere und sortiere rekursiv auf beiden Teilarrays weiter.
Radixsort	$O(nd)$	Sortiere Zahlen iterativ nach den d Ziffern.
Bubblesort (P-Blatt 4)	$O(n^2)$	Iteriere n-mal über das Array und vertausche falsch-stehende benachbarte Objekte.
Selectionsort	$O(n^2)$	Setze das i-t kleinste Element in der i-ten Iteration an die i-te Stelle
Insertionsort	$O(n^2)$	Setze das i-te Element des Arrays in $A[1] \dots A[i]$ an die richtige Stelle.

Quicksort – Prinzip



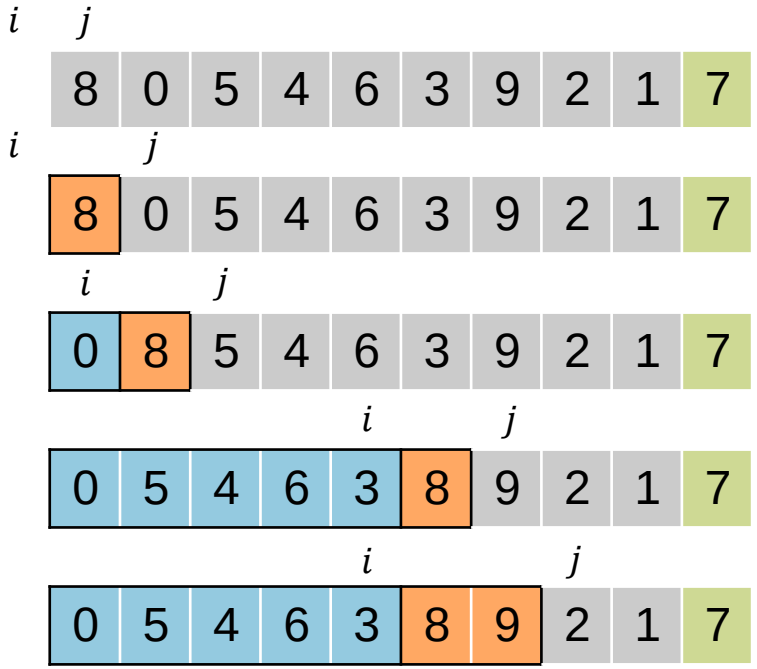
Quicksort – Partition

Pivotelement x

Letztes Element im Array

Zwei Zeiger

- i: Letzte Position mit Zahlen $< x$
- j: Erste Position mit nicht verglichenen Elementen



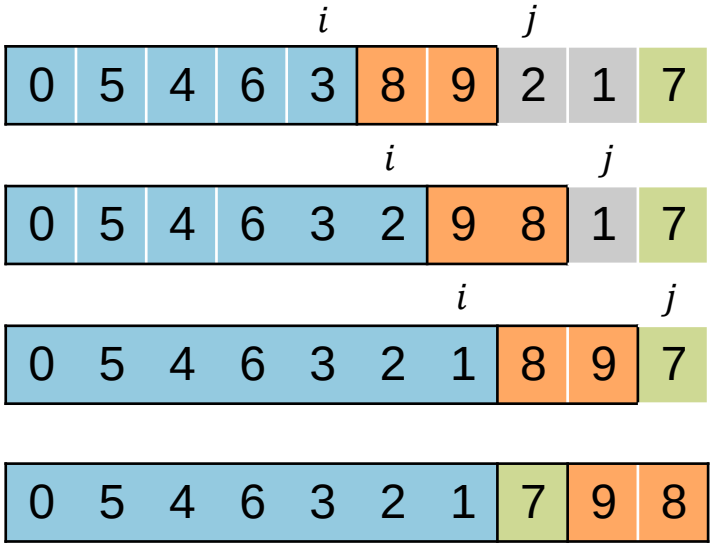
Quicksort – Partition

Pivotelement x

Letztes Element im Array

Zwei Zeiger

- i: Letzte Position mit Zahlen $< x$
- j: Erste Position mit nicht verglichenen Elementen



Quicksort – Laufzeit

	Best-Case	Average-Case	Worst-Case
Quicksort	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n^2)$

Rekursionsgleichung Worst-Case:

$$T(n) = T(n-1) + \Theta(n) \Rightarrow T(n) \in \Theta\left(\sum_{i=1}^{n} \mathrm{i}\right) = \Theta(n^2)$$

Rekursionsgleichung Best-Case:

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n) \Rightarrow T(n) \in \Theta(n \log n)$$

Mediane

Mediane – Definition

Rang-k Element m in X:

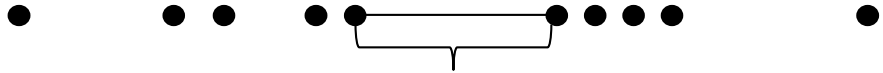
$$|\{x \in X : x \leq m\}| \geq k$$

$$|\{x \in X : x \geq m\}| \geq n - k + 1$$

Für einen Median m in X gilt:

$$|\{x \in X : x < m\}| \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

$$|\{x \in X : x > m\}| \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$



Jeder Punkt in diesem Bereich ist ein Median!

Bei $X = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ sind sowohl 4 als auch 5 ein Median.

Mediane – Definition

Rang-k Element m in X:

$$|\{x \in X : x \leq m\}| \geq k$$

$$|\{x \in X : x \geq m\}| \geq n - k + 1$$

Für einen Median m in X gilt:

$$|\{x \in X : x < m\}| \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

$$|\{x \in X : x > m\}| \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

Bei $X = \{1,3,5,7,9\}$ ist die 5 der Median und 5 der Durchschnitt.

Bei $X = \{1,3,5,7,1000\}$ ist die 5 der Median und $203{,}2$ der Durchschnitt.

Der Median m minimiert

$$\sum_{x \in X} |x - m|$$

Der Durchschnitt D minimiert

$$\sum_{x \in X} (x - D)^2$$

Mediane – Algorithmus (I)

Naive Idee

Sortieren und das Element an der k-ten Stelle ausgeben

Laufzeit: $\Theta(n \log n)$

Geht das besser?

Nutze das Prinzip von Quicksort

Pivotisiere und arbeite rekursiv auf **einem** Teil weiter

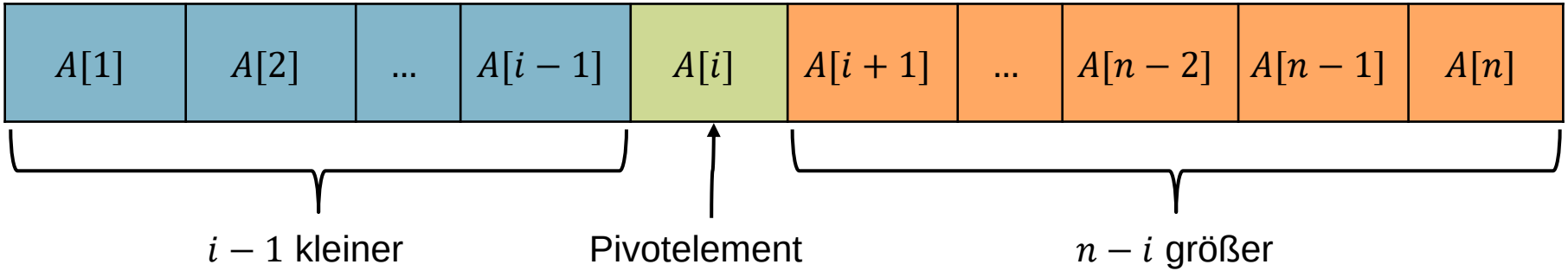
Dazu stellen sich die Fragen:

1. Auf welchem Teilarray geht es weiter?
2. Ist das schneller als $\Theta(n \log n)$?

Mediane – Algorithmus (II)

1. Auf welchem Teilarray geht es weiter?

Nach Pivotisierung:



3 Fälle:

1. Falls $k < i$, suche im linken Teilarray nach dem k-ten Element.
2. Falls $k = i$, dann haben wir das k-te Element gefunden!
3. Falls $k > i$, suche im rechten Teilarray nach dem $(k - i)$-ten Element.

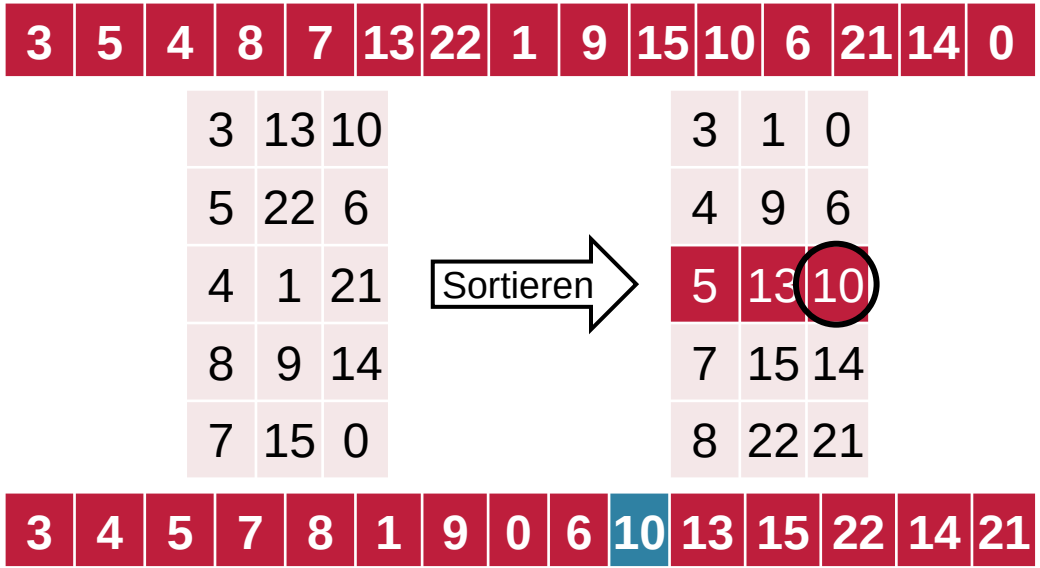
Mediane – Algorithmus (III)

2. Ist das schneller als $\Theta(n \log n)$?

Wie bei Quicksort kann größeres Teilarray $n - 1$ Elemente enthalten. Dadurch Laufzeit $\Omega(n^2)$

Idee: Wähle besseres Pivotelement

1. Teile Zahlen in 5er Gruppen
2. Bestimme Median in jeder Gruppe
3. Bestimme Median der Mediane m
4. Benutze m als Pivotelement



Mediane – Analyse

Wie viele Zahlen gibt es, die größer/kleiner als m sind?

Sortiere die t 5er Gruppen **gedanklich** nach deren Median

$\leq m$	$\leq m$	$\leq m$	$\leq m$	m	$\geq m$	$\geq m$	$\geq m$	$\geq m$	$\geq m$

Mediane – Analyse

Wie viele Zahlen gibt es, die größer/kleiner als m sind?

Sortiere die t 5er Gruppen **gedanklich** nach deren Median

$\leq m$	$\leq m$	$\leq m$	$\leq m$	$\leq m$					
$\leq m$	$\leq m$	$\leq m$	$\leq m$	$\leq m$					
$\leq m$	$\leq m$	$\leq m$	$\leq m$	m	$\geq m$	$\geq m$	$\geq m$	$\geq m$	$\geq m$

Der rote Bereich enthält nur Elemente, die höchstens m sind. Wie viele sind das?

Mediane – Analyse

$\leq m$	$\leq m$	$\leq m$	$\leq m$	$\leq m$					
$\leq m$	$\leq m$	$\leq m$	$\leq m$	$\leq m$					
$\leq m$	$\leq m$	$\leq m$	$\leq m$	m	$\geq m$	$\geq m$	$\geq m$	$\geq m$	$\geq m$

Der rote Bereich enthält nur Elemente, die höchstens m sind. Wie viele sind das?

Nehmen wir an wir haben t Gruppen, so ist der Median m in der $\left\lceil \frac{t}{2} \right\rceil$-ten Gruppe.

Bei 5er Gruppen, sind pro Gruppe mindestens 3 Elemente $\leq m$.

Entsprechend gibt es mindestens $3 \cdot \left\lceil \frac{t}{2} \right\rceil$ viele Elemente $\leq m$.

Damit gibt es maximal $n - 3 \cdot \left\lceil \frac{t}{2} \right\rceil \leq n - \frac{3}{2}t \leq n - \frac{3}{2} \cdot \frac{n}{5} = \frac{7}{10}n$ Elemente größer als m.

Analog: Maximal $\frac{7}{10}n$ Elemente kleiner als m.

Mediane - Laufzeit

Wir haben also als Laufzeit:

$$T(n) = \underbrace{T\left(\frac{1}{5}n\right)}_{\text{Bestimmung Median der Medianen}} + \underbrace{T\left(\frac{7}{10}n\right)}_{\text{Rekursion in linke/rechte Teilhälfte}} + \underbrace{\Theta(n)}_{\text{Aufteilen in Gruppen/ Pivotisieren/ …}}$$

Mediane - Laufzeit

$$T(n) = T\left(\frac{1}{5}n\right) + T\left(\frac{7}{10}n\right) + \Theta(n)$$

Mastertheorem

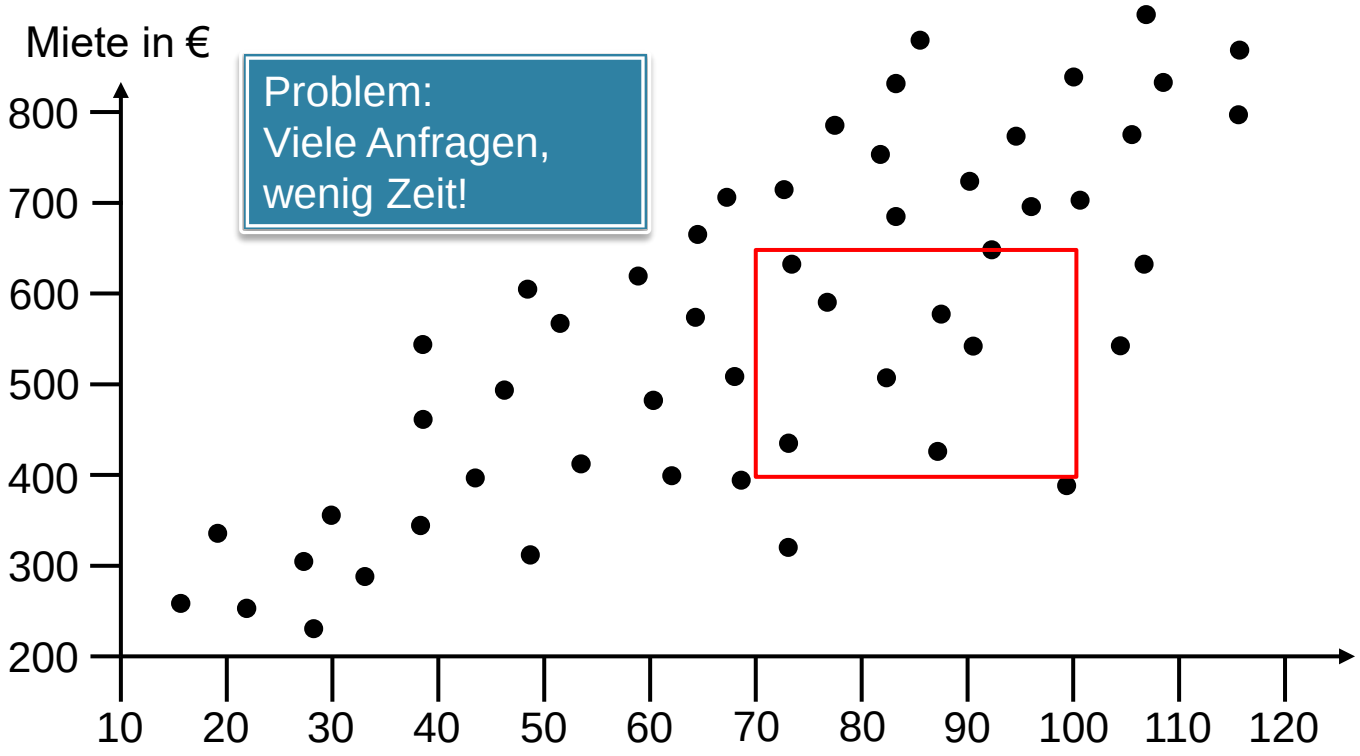
$$m = 2, \quad k = 1, \quad \alpha_1 = \frac{1}{5}, \alpha_2 = \frac{7}{10}$$

$$\sum_{i=1}^{2} \alpha_i^1 = \left(\frac{1}{5}\right)^1 + \left(\frac{7}{10}\right)^1 = \frac{2}{10} + \frac{7}{10} = \frac{9}{10} < 1 \quad \rightarrow \text{ Fall 1}$$

$$\Longrightarrow T(n) \in \Theta(n)$$

kd-Bäume

Motivation – Die Wohnungssuche



Suche Wohnung:
Maximal 650€
Mindestens 400€
Maximal 100m²
Mindestens 70m²

Gib alle Wohnungen im roten Quadrat aus!

Naive Lösung:
Teste für jeden Punkt, ob er im Quadrat liegt.

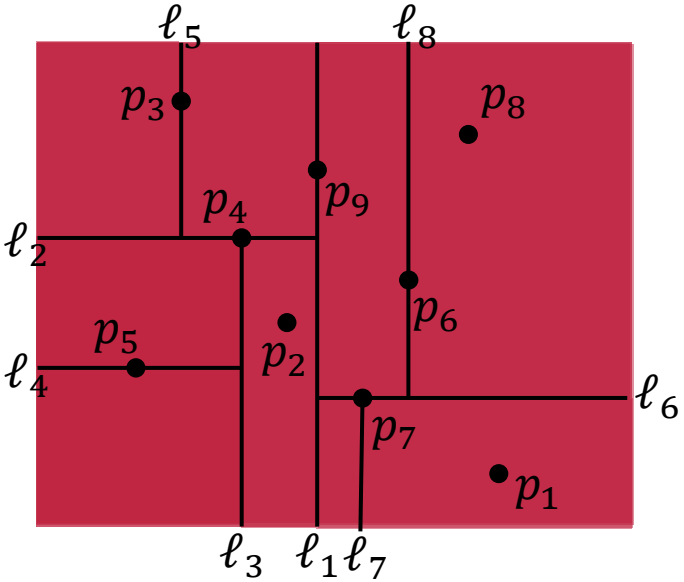
kd-Bäume – Konstruktion/Preprocessing

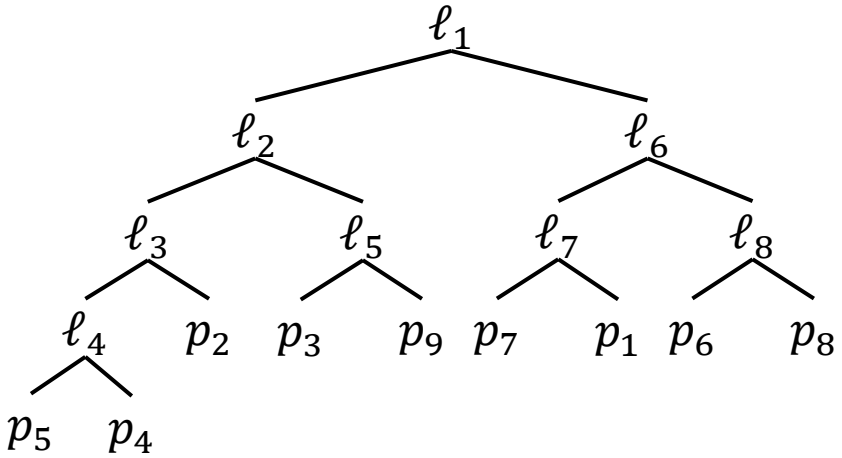
Idee: Konstruiere binären Suchbaum. Suche dabei abwechselnd nach x- und y-Koordinate.

Algorithmus BUILDKDTREE
Eingabe: Punktmenge P, Rekursionstiefe *depth*
Ausgabe: Wurzel eines k-d-Baums

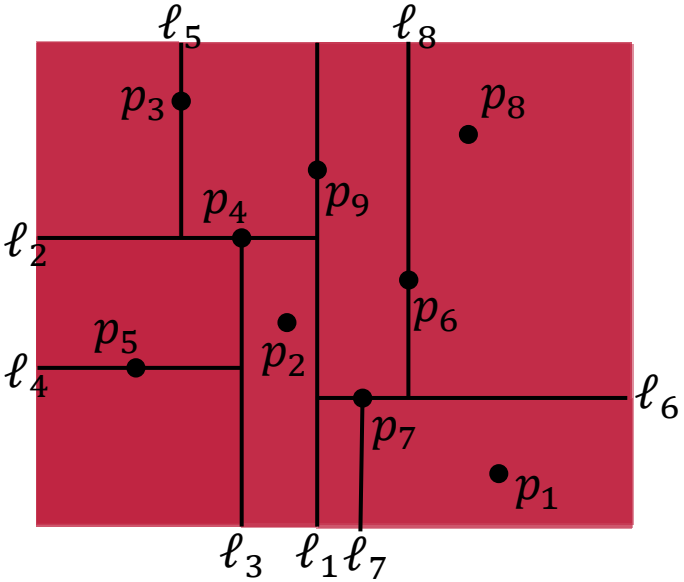
1. **if** $(|P| = 1)$
2. **return** Blatt mit diesem Punkt
3. **else if** (*depth* ist gerade)
4. Teile in zwei Teilmengen P_1 ($\leq \ell$) und P_2 ($> \ell$) an vertikaler Median-Linie ℓ
5. **else**
6. Teile in zwei Teilmengen P_1 ($\leq \ell$) und P_2 ($> \ell$) an horizontaler Median-Linie ℓ
7. Setze v_{left} := BUILDKDTREE(P_1,*depth+1)*
8. Setze v_{right} := BUILDKDTREE(P_2,*depth+1)*
9. Erzeuge Knoten v für ℓ mit v_{left} und v_{right} als Kinderknoten
10. **return** v

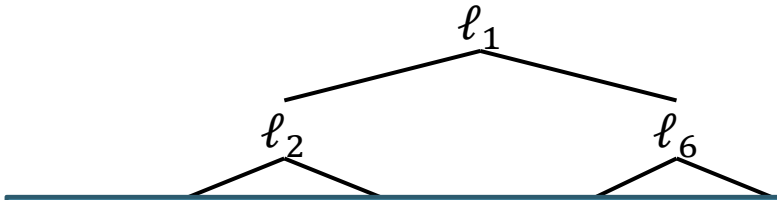
kd-Bäume - Beispiel





kd-Bäume - Beispiel





Laufzeit des Algorithmus ist $O(n \log n)$

Beweis

(1) Median-Linien können in $O(n)$ Zeit gefunden werden.

(2) Rekursionsgleichung für die Laufzeit ist also

$$T(n) = O(n) + 2T\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right)$$

Nach Mastertheorem ist das $O(n \log n)$.

kd-Bäume – Search Query

Algorithmus SEARCHKDTREE
Eingabe: Wurzel v eines (Teil-)baums, Rechteck R
Ausgabe: Knoten unterhalb v, die in R liegen

```
1.  if (v ist ein Blatt)
2.      Gib v aus, falls v in R
3.  else
4.      if (Region(l(v)) ganz in R)
5.          REPORTSUBTREE(l(v))
6.      else if (Region(l(v)) schneidet R)
7.          SEARCHKDTREE(l(v), R)
8.      if (Region(r(v)) ganz in R)
9.          REPORTSUBTREE(r(v))
10.     else if (Region(r(v)) schneidet R)
11.         SEARCHKDTREE(r(v), R)
```

kd-Bäume – Search Query

Laufzeit ist $O(\sqrt{n}+x)$, wobei x die Anzahl an ausgegebenen Elementen ist.

Das nennt sich *output-sensitiv*, d.h. die Laufzeit ist von der Größe des Outputs abhängig.

Beweisidee:

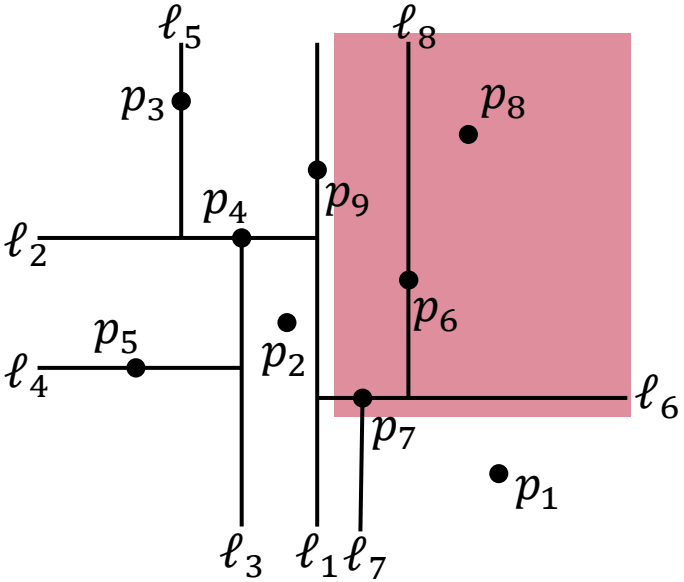
Wie viele *geschnittene* Regionen müssen betrachtet werden? Man kann die Rekursionsgleichung aufstellen: $Q(n) = 2 + 2Q\left(\frac{n}{4}\right)$.

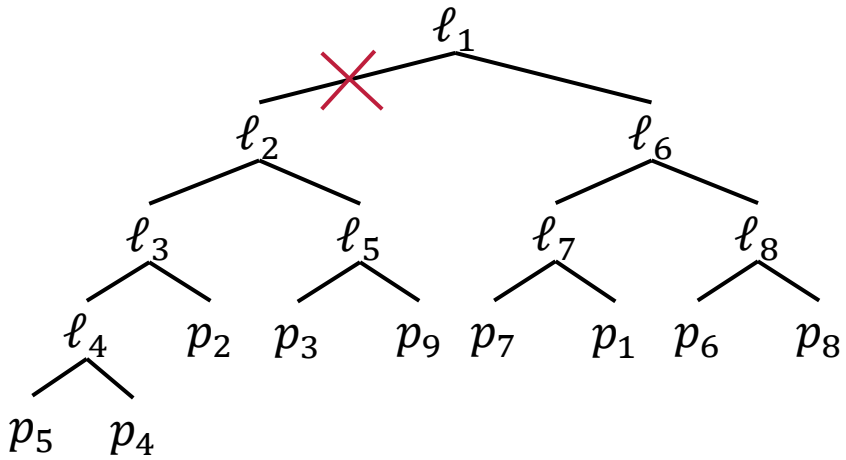
Also $Q(n) \in O(\sqrt{n})$. So viele Elemente können geprüft werden, die nicht in R liegen. Die $O(x)$ sind die Elemente in R.

Algorithmus SEARCHKDTREE
Eingabe: Wurzel v eines (Teil-)baums, Rechteck R
Ausgabe: Knoten unterhalb v, die in R liegen

```
1.  if (v ist ein Blatt)
2.      Gib v aus, falls v in R
3.  else
4.      if (Region(l(v)) ganz in R)
5.          REPORTSUBTREE(l(v))
6.      else if (Region(l(v)) schneidet R)
7.          SEARCHKDTREE(l(v), R)
8.      if (Region(r(v)) ganz in R)
9.          REPORTSUBTREE(r(v))
10.     else if (Region(r(v)) schneidet R)
11.         SEARCHKDTREE(r(v), R)
```

kd-Bäume - Beispiel





Welche Punkte liegen im Rechteck?

Antwort: p_7 p_6 p_8

kd-Bäume – Höhere Dimensionen

Bisher nur 1D und 2D betrachtet. Laufzeiten für $k \geq 2$ Dimensionen:

- BuildKDTree: $O(n \log n)$
- SearchKDTree: $O(n^{1-\frac{1}{k}} + x)$, um x Elemente auszugeben
- FindNearestNeighbor: $O(\log n)$ im Durchschnitt

Weiterer Vorteil: Sie benötigen nur $O(n)$ Speicherplatz.