



Algorithmen und Datenstrukturen – Übung #7

Mergesort, Master-Theorem, Heapsort

Matthias Konitzny, Arne Schmidt

20.01.2022

Mergesort

Mergesort

Algorithmus (grob):

1. Sortiere linke Hälfte
2. Sortiere rechte Hälfte
3. Füge beide Hälften zusammen (merge)

$A =$	4	2	6	3	1	5	7
1. $A =$							
2. $A =$							
3. $A =$							
4. $A =$							
5. $A =$							
6. $A =$							

Mergesort

Algorithmus (grob):

1. Sortiere linke Hälfte
2. Sortiere rechte Hälfte
3. Füge beide Hälften zusammen (merge)

$A =$	4	2	6	3	1	5	7
1. $A =$	2	4					
2. $A =$							
3. $A =$							
4. $A =$							
5. $A =$							
6. $A =$							

Mergesort

Algorithmus (grob):

1. Sortiere linke Hälfte
2. Sortiere rechte Hälfte
3. Füge beide Hälften zusammen (merge)

$A =$	4	2	6	3	1	5	7
1. $A =$	2	4					
2. $A =$			3	6			
3. $A =$							
4. $A =$							
5. $A =$							
6. $A =$							

Mergesort

Algorithmus (grob):

1. Sortiere linke Hälfte
2. Sortiere rechte Hälfte
3. Füge beide Hälften zusammen (merge)

$A =$	4	2	6	3	1	5	7
1. $A =$	2	4					
2. $A =$			3	6			
3. $A =$	2	3	4	6			
4. $A =$							
5. $A =$							
6. $A =$							

Mergesort

Algorithmus (grob):

1. Sortiere linke Hälfte
2. Sortiere rechte Hälfte
3. Füge beide Hälften zusammen (merge)

$A =$	4	2	6	3	1	5	7
1. $A =$	2	4					
2. $A =$			3	6			
3. $A =$	2	3	4	6			
4. $A =$					1	5	
5. $A =$							
6. $A =$							

Mergesort

Algorithmus (grob):

1. Sortiere linke Hälfte
2. Sortiere rechte Hälfte
3. Füge beide Hälften zusammen (merge)

$A =$	4	2	6	3	1	5	7
1. $A =$	2	4					
2. $A =$			3	6			
3. $A =$	2	3	4	6			
4. $A =$					1	5	
5. $A =$					1	5	7
6. $A =$							

Mergesort

Algorithmus (grob):

1. Sortiere linke Hälfte
2. Sortiere rechte Hälfte
3. Füge beide Hälften zusammen (merge)

$A =$	4	2	6	3	1	5	7
1. $A =$	2	4					
2. $A =$			3	6			
3. $A =$	2	3	4	6			
4. $A =$					1	5	
5. $A =$					1	5	7
6. $A =$	1	2	3	4	5	6	7

Mergesort - Laufzeit

Algorithmus (grob):

1. Sortiere linke Hälfte
2. Sortiere rechte Hälfte
3. Füge beide Hälften zusammen (merge)

Sei $T(n)$ die Laufzeit von Mergesort für n Elemente

Schritt 1: $T\left(\frac{n}{2}\right)$

Schritt 2: $T\left(\frac{n}{2}\right)$

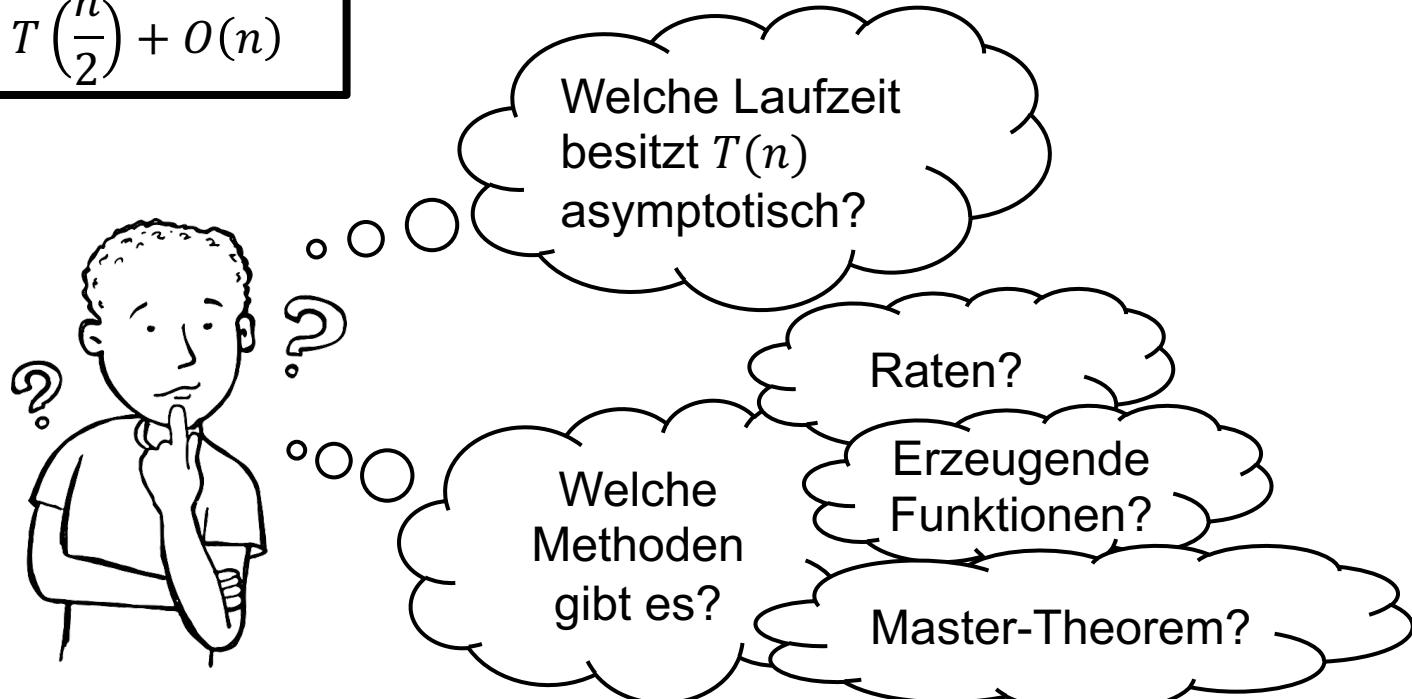
Schritt 3: $O(n)$

Zusammen ergibt das:

$$T(n) = 2 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + O(n)$$

Lösen von Rekursionsgleichungen

$$T(n) = 2 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + O(n)$$



Master-Theorem

Das Master-Theorem

Satz: Sei $T: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion der Form

$$T(n) := \sum_{i=1}^m T(\alpha_i \cdot n) + \Theta(n^k),$$

wobei $m \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{R}$ und $0 < \alpha_i < 1$ für alle $i \in \{1, \dots, m\}$.

Dann gilt

$$T(n) \in \begin{cases} \Theta(n^k), & \text{falls } \sum_{i=1}^m \alpha_i^k < 1 \\ \Theta(n^k \log n), & \text{falls } \sum_{i=1}^m \alpha_i^k = 1 \\ \Theta(n^c) \text{ mit } \sum_{i=1}^m \alpha_i^c = 1, & \text{falls } \sum_{i=1}^m \alpha_i^k > 1 \end{cases}$$

Master-Theorem (Beispiele)

Beispiel 1

$$U(n) = \frac{1}{2} \cdot U\left(\frac{n}{3}\right) + 6 \cdot U\left(\frac{n}{6}\right) + 7n \log n - 8n + 15n^2$$



Wichtig: Darauf achten, dass alle Parameter gültig sind!

Beispiel 1.2

$$U(n) = 3 \cdot U\left(\frac{n}{3}\right) + 6 \cdot U\left(\frac{n}{6}\right) + 7n \log n - 8n + 15n^2$$

Also:

$$m = 9, k = 2 \text{ und } \alpha_1 = \dots = \alpha_3 = \frac{1}{3}, \alpha_4 = \dots = \alpha_9 = \frac{1}{6}$$

$\Theta(n^2)$

Mit

$$\sum_{i=1}^9 \alpha_i^2 = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 6 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

folgt $U(n) \in \Theta(n^2)$

Beispiel 2

$$V(n) = 7n^2 + 5n^3 + 27 \cdot V\left(\frac{n}{3}\right) - 7n$$

Also:

$$m = 27, k = 3 \text{ und } \alpha_1 = \dots = \alpha_{27} = \frac{1}{3}$$

Mit

$$\sum_{i=1}^{27} \alpha_i^3 = 27 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{27}{27} = 1$$

folgt $V(n) \in \Theta(n^3 \log n)$

Beispiel 3

$$W(n) = 9 \cdot W\left(\frac{n}{3}\right) + 7n$$

Also:

$$m = 9, k = 1 \text{ und } \alpha_1 = \dots = \alpha_9 = \frac{1}{3}$$

Da

$$\sum_{i=1}^9 \alpha_i^1 = 9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1 = 3 > 1$$

müssen wir das c suchen!

Also suche c , sodass gilt

$$\sum_{i=1}^9 \alpha_i^c = 1$$

$$\Leftrightarrow 9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^c = 1$$

$$\Leftrightarrow 9 = 3^c$$

$$\Leftrightarrow \log_3 9 = c$$

$$\Leftrightarrow 2 = c$$

Also:

$$W(n) \in \Theta(n^2)$$

(Sortieren mit)

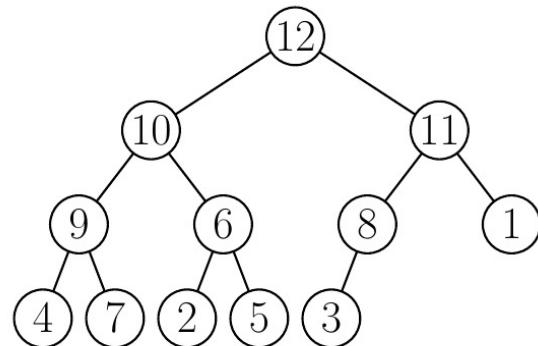
Max-Heaps

Max-Heaps – Definition

Ein Max-Heap ist ein binärer Baum mit folgenden Eigenschaften:

- Jeder Knoten besitzt einen Schlüssel
- Ebene $i < h$ besitzt 2^{i-1} Knoten, wobei h die Höhe des Baumes ist.
- Auf Ebene h sind die linken $n - 2^{h-1} + 1$ Positionen besetzt.
- Der Schlüssel jedes Knotens ist mindestens so groß wie die seiner beiden Kinder.

$$A = [12, 10, 11, 9, 6, 8, 1, 4, 7, 2, 5, 3]$$



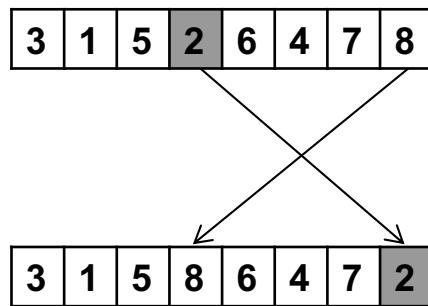
Build-Max-Heap

```
1: function BUILD-MAX-HEAP( $A$ )
2:   heap-größe[ $A$ ] := länge[ $A$ ]
3:   for  $i = \lfloor \frac{\text{länge}[A]}{2} \rfloor$  down to 1 do
4:     MAX-HEAPIFY( $A, i$ )
```

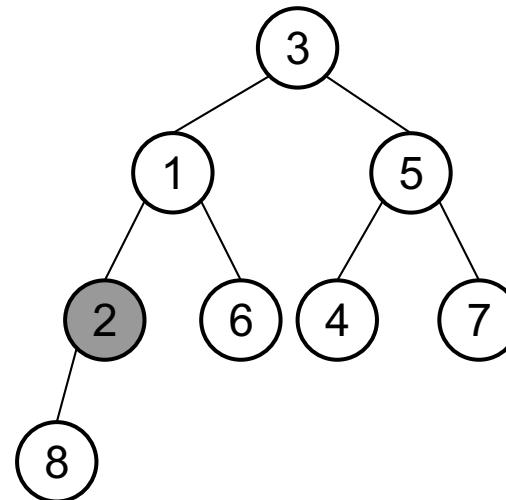
```
1: function MAX-HEAPIFY( $A, i$ )
2:    $\ell := \text{links}(i)$ ,  $r := \text{rechts}(i)$ 
3:   if  $\ell \leq \text{heap-größe}[A]$  und  $A[\ell] > A[i]$  then
4:     max :=  $\ell$ 
5:   else
6:     max :=  $i$ 
7:   if  $r \leq \text{heap-größe}[A]$  und  $A[r] > A[\text{max}]$  then
8:     max :=  $r$ 
9:   if max  $\neq i$  then
10:    Vertausche  $A[\text{max}]$  und  $A[i]$ 
11:    MAX-HEAPIFY( $A, \text{max}$ )
```

Build-Max-Heap

Als Array



Als Baum



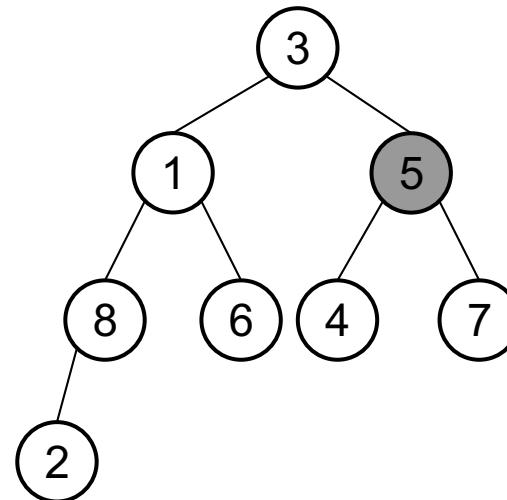
Build-Max-Heap

Als Array

3	1	5	8	6	4	7	2
---	---	---	---	---	---	---	---

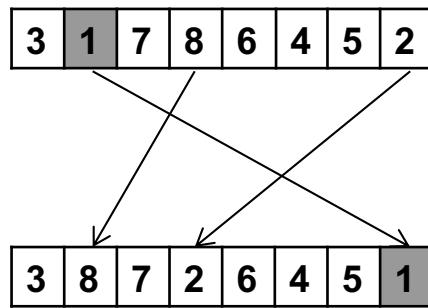
3	1	7	8	6	4	5	2
---	---	---	---	---	---	---	---

Als Baum

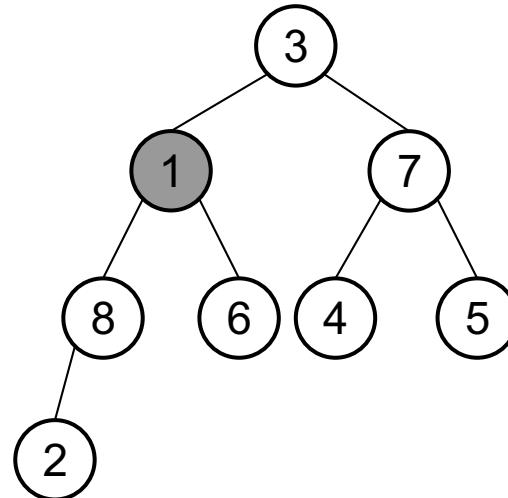


Build-Max-Heap

Als Array

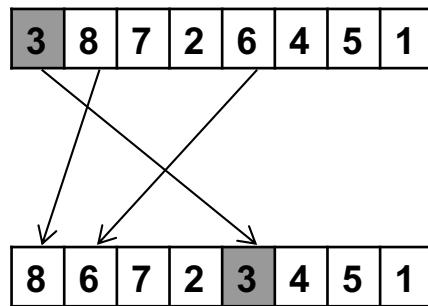


Als Baum

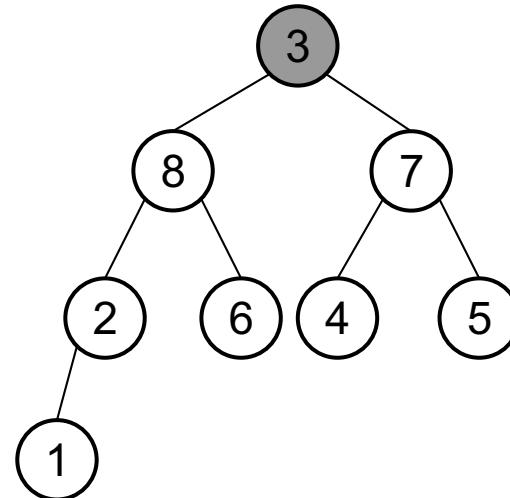


Build-Max-Heap

Als Array



Als Baum



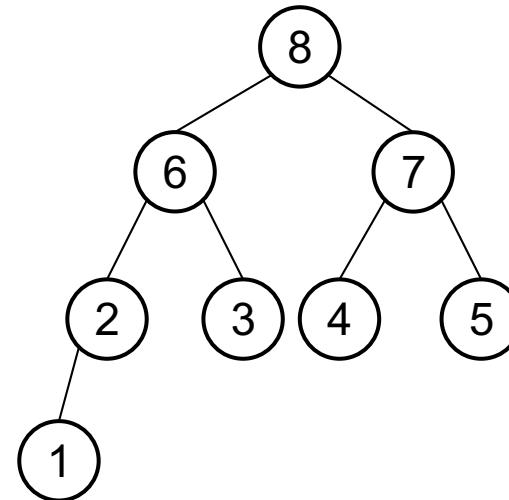
Build-Max-Heap

Als Array

Fertig!

8	6	7	2	3	4	5	1
---	---	---	---	---	---	---	---

Als Baum



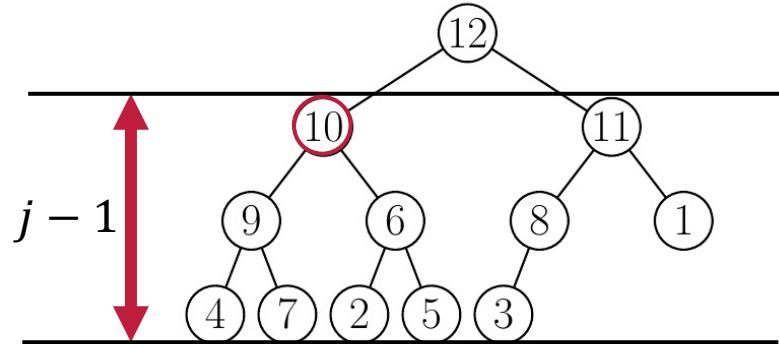
Build-Max-Heap

```
1: function BUILD-MAX-HEAP( $A$ )
2:   heap-größe[ $A$ ] := länge[ $A$ ]
3:   for  $i = \lfloor \frac{\text{länge}[A]}{2} \rfloor$  down to 1 do
4:     MAX-HEAPIFY( $A, i$ )
```

```
1: function MAX-HEAPIFY( $A, i$ )
2:    $\ell := \text{links}(i)$ ,  $r := \text{rechts}(i)$ 
3:   if  $\ell \leq \text{heap-größe}[A]$  und  $A[\ell] > A[i]$  then
4:     max :=  $\ell$ 
5:   else
6:     max :=  $i$ 
7:   if  $r \leq \text{heap-größe}[A]$  und  $A[r] > A[\text{max}]$  then
8:     max :=  $r$ 
9:   if max  $\neq i$  then
10:    Vertausche  $A[\text{max}]$  und  $A[i]$ 
11:    MAX-HEAPIFY( $A, \text{max}$ )
```

Build-Max-Heap

```
1: function MAX-HEAPIFY( $A, i$ )
2:    $\ell := \text{links}(i), r := \text{rechts}(i)$ 
3:   if  $\ell \leq \text{heap-größe}[A]$  und  $A[\ell] > A[i]$  then
4:      $\text{max} := \ell$ 
5:   else
6:      $\text{max} := i$ 
7:   if  $r \leq \text{heap-größe}[A]$  und  $A[r] > A[\text{max}]$  then
8:      $\text{max} := r$ 
9:   if  $\text{max} \neq i$  then
10:    Vertausche  $A[\text{max}]$  und  $A[i]$ 
11:    MAX-HEAPIFY( $A, \text{max}$ )
```



Für Knoten auf Ebene $h - j$ benötigen wir maximal $O(j)$ Durchgänge.

Jeder Durchgang kostet $O(1)$

Build-Max-Heap

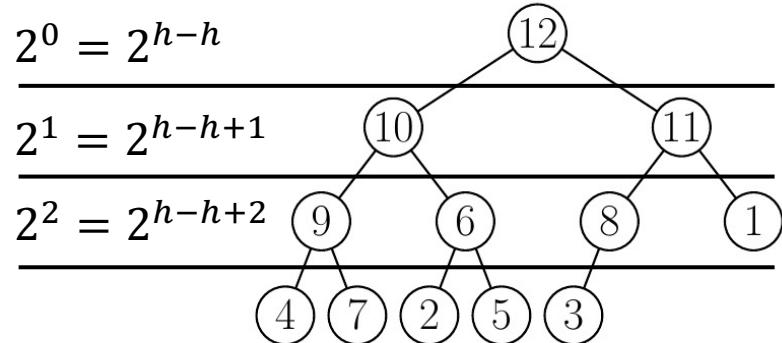
```
1: function BUILD-MAX-HEAP( $A$ )
2:   heap-größe[ $A$ ] := länge[ $A$ ]
3:   for  $i = \lfloor \frac{\text{länge}[A]}{2} \rfloor$  down to 1 do
4:     MAX-HEAPIFY( $A, i$ )
```

```
1: function MAX-HEAPIFY( $A, i$ )
2:    $\ell := \text{links}(i), r := \text{rechts}(i)$ 
3:   if  $\ell \leq \text{heap-größe}[A]$  und  $A[\ell] > A[i]$  then
4:     max :=  $\ell$ 
5:   else
6:     max :=  $i$ 
7:   if  $r \leq \text{heap-größe}[A]$  und  $A[r] > A[\text{max}]$  then
8:     max :=  $r$ 
9:   if max  $\neq i$  then
10:    Vertausche  $A[\text{max}]$  und  $A[i]$ 
11:    MAX-HEAPIFY( $A, \text{max}$ )
```

Für Knoten auf Ebene $h - j$: O(j)

Build-Max-Heap

```
1: function BUILD-MAX-HEAP( $A$ )
2:   heap-größe[ $A$ ] := länge[ $A$ ]
3:   for  $i = \lfloor \frac{\text{länge}[A]}{2} \rfloor$  down to 1 do
4:     MAX-HEAPIFY( $A, i$ )
```



Laufzeit:

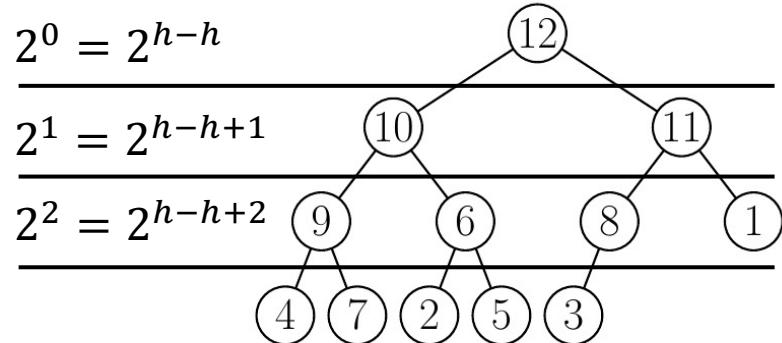
$$O\left(1 + \sum_{j=1}^h 2^{h-j} \cdot j\right) = O\left(2^h \cdot \sum_{j=1}^h \frac{j}{2^j}\right)$$

Per Induktion:

$$\sum_{j=1}^h \frac{j}{2^j} = 2 - \frac{h+2}{2^h}$$

Build-Max-Heap

```
1: function BUILD-MAX-HEAP( $A$ )  
2:   heap-größe[ $A$ ] := länge[ $A$ ]  
3:   for  $i = \lfloor \frac{\text{länge}[A]}{2} \rfloor$  down to 1 do  
4:     MAX-HEAPIFY( $A, i$ )
```



Laufzeit:

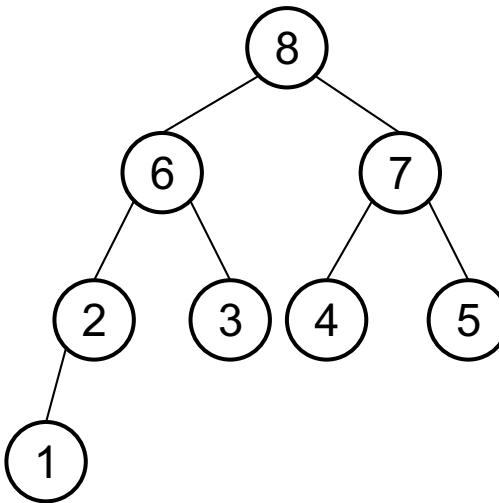
$$O\left(1 + \sum_{j=1}^h 2^{h-j} \cdot j\right) = O\left(2^h \cdot \sum_{j=1}^h \frac{j}{2^j}\right)$$

Per Induktion:

$$\sum_{j=1}^h \frac{j}{2^j} = 2 - \frac{h+2}{2^h}$$

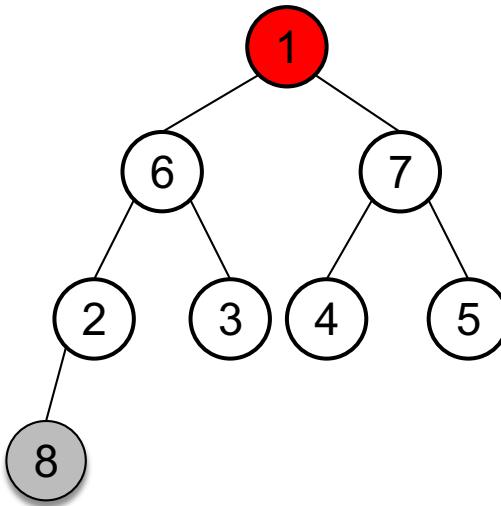
Heapsort

```
function SORT( $A$ )
    BUILD-MAX-HEAP( $A$ )
    for  $i \leftarrow \text{length}(A)$  downto 2 do
        vertausche  $A[1]$  und  $A[i]$ 
         $\text{heap-größe}[A] \leftarrow \text{heap-größe}[A] - 1$ 
        MAX-HEAPIFY( $A$ , 1)
    end for
end function
```



Heapsort

```
function SORT( $A$ )
    BUILD-MAX-HEAP( $A$ )
    for  $i \leftarrow \text{length}(A)$  downto 2 do
        vertausche  $A[1]$  und  $A[i]$ 
         $\text{heap-größe}[A] \leftarrow \text{heap-größe}[A] - 1$ 
        MAX-HEAPIFY( $A$ , 1)
    end for
end function
```



Heapsort

```
function SORT( $A$ )
    BUILD-MAX-HEAP( $A$ )
    for  $i \leftarrow \text{length}(A)$  downto 2 do
        vertausche  $A[1]$  und  $A[i]$ 
         $\text{heap-größe}[A] \leftarrow \text{heap-größe}[A] - 1$ 
        MAX-HEAPIFY( $A$ , 1)
    end for
end function
```

8	6	7	2	3	4	5	1
7	6	5	2	3	4	1	8
6	3	5	2	1	4	7	8
5	3	4	2	1	6	7	8
4	3	1	2	5	6	7	8
3	2	1	4	5	6	7	8
2	1	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7	8

Heapsort – Laufzeit

```
function SORT( $A$ )
    BUILD-MAX-HEAP( $A$ )
    for  $i \leftarrow \text{length}(A)$  downto 2 do
        vertausche  $A[1]$  und  $A[i]$ 
         $\text{heap-größe}[A] \leftarrow \text{heap-größe}[A] - 1$ 
        MAX-HEAPIFY( $A$ , 1)
    end for
end function
```

Build-Max-Heap: $O(n)$

In der For-Schleife:

1. Vertauschen: $O(1)$
2. Verkleinern: $O(1)$
3. Max-Heapify: $O(\log n)$

Für n Iterationen ist das $O(n \log n)$

Heapsort – Korrektheit

Heapsort ist ein Sortierverfahren.

Beweis:

- Wir zeigen: Nach der i -ten Iteration besitzen wir wieder einen Max-Heap auf den restlichen Feldern
→ Wir können das nächstgrößere Element an die richtige Stelle sortieren.
- Zu Beginn, besitzen wir einen Max-Heap.
→ das größte Element ist an der ersten Stelle.
- Angenommen, wir haben zu Beginn der Iteration i einen Max-Heap auf den aktiven $n - i + 1$ Feldern.
- Nach dem Tauschen des i größten Elements nach hinten und nach Verkleinern des Arrays:
→ U.U. kein Max-Heap vorhanden.
- Aber: Jeder Knoten außer Wurzel erfüllt Max-Heap Eigenschaft.
- Also: Max-Heapify auf Wurzelknoten reicht aus, um einen Max-Heap wiederherzustellen!
- Wir tauschen also in jeder Iteration das richtige Element nach hinten!