Technische
Universität
Braunschweig

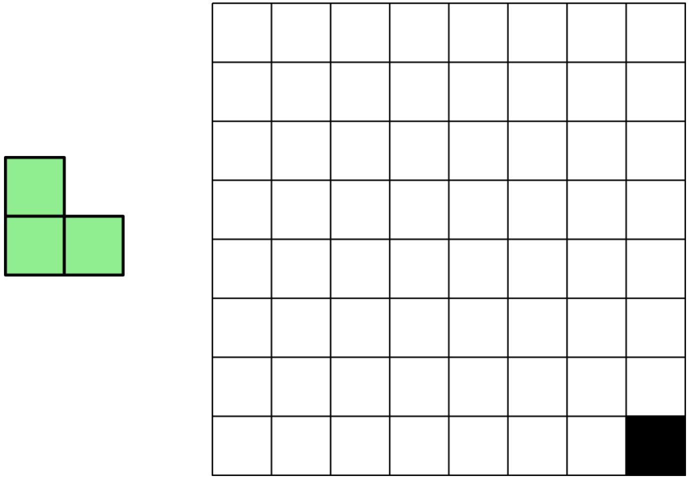
# Algorithmen und Datenstrukturen
# Übung 5

Matthias Konitzny, Arne Schmidt

16.12.2021

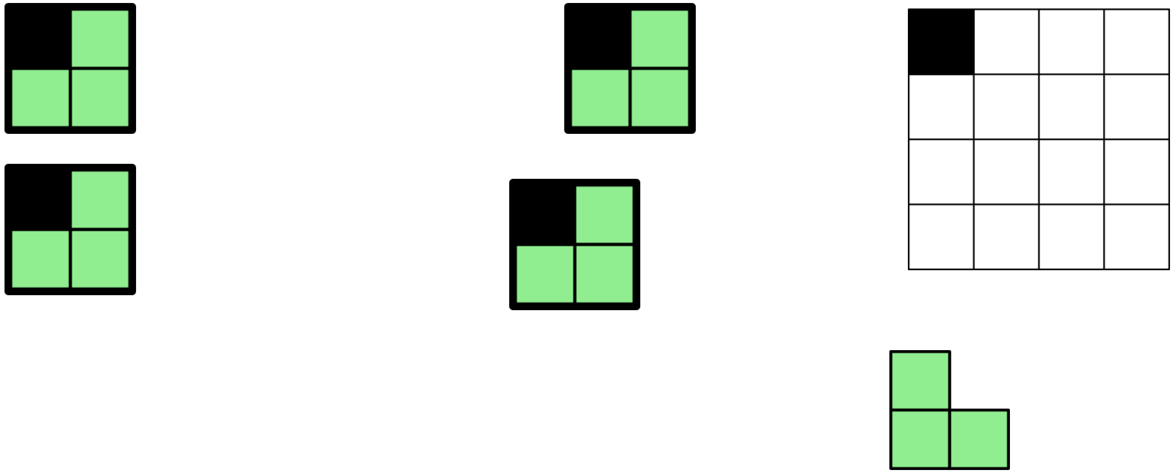
# Einführendes Beispiel

Kann man ein 8x8 Schachbrett mit L-Trominos füllen, wenn man eine beliebige Ecke des Feldes löscht?

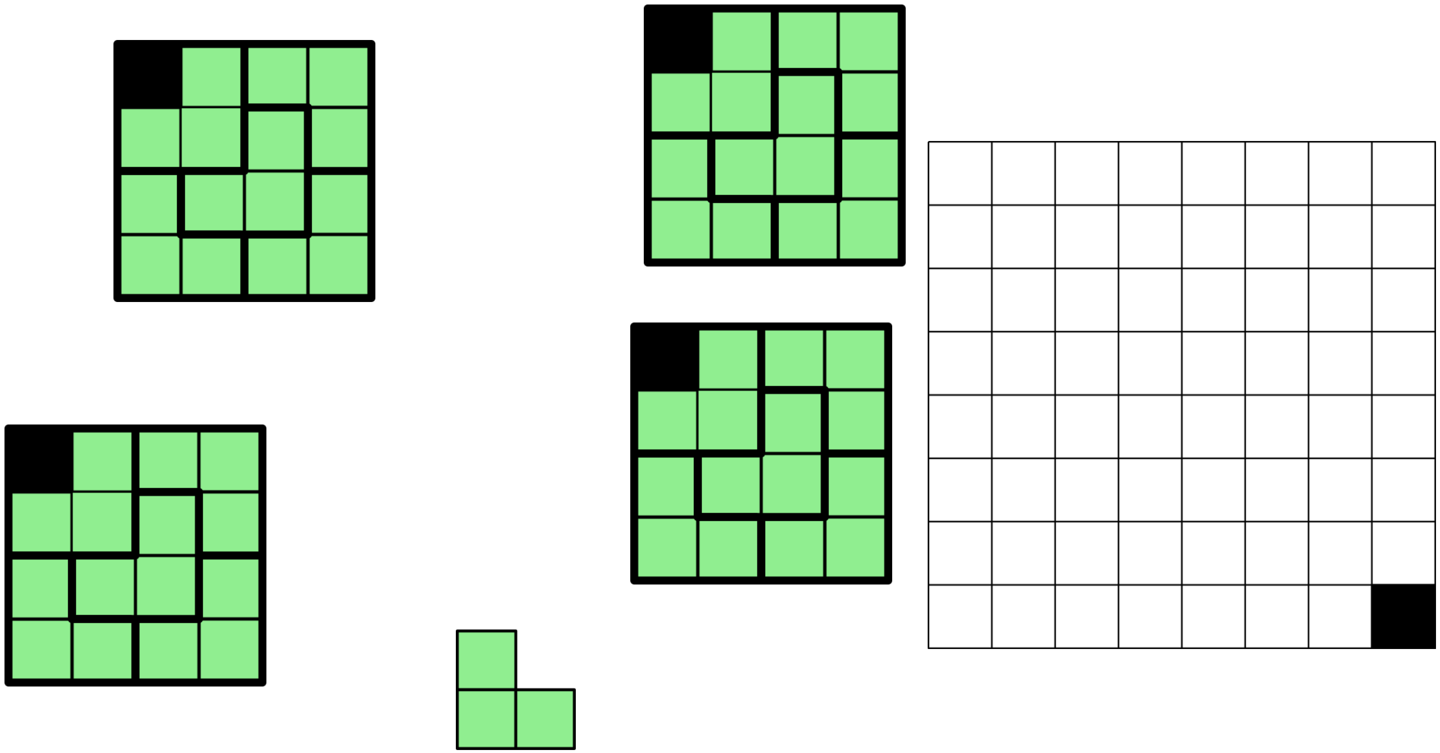


# Einführendes Beispiel

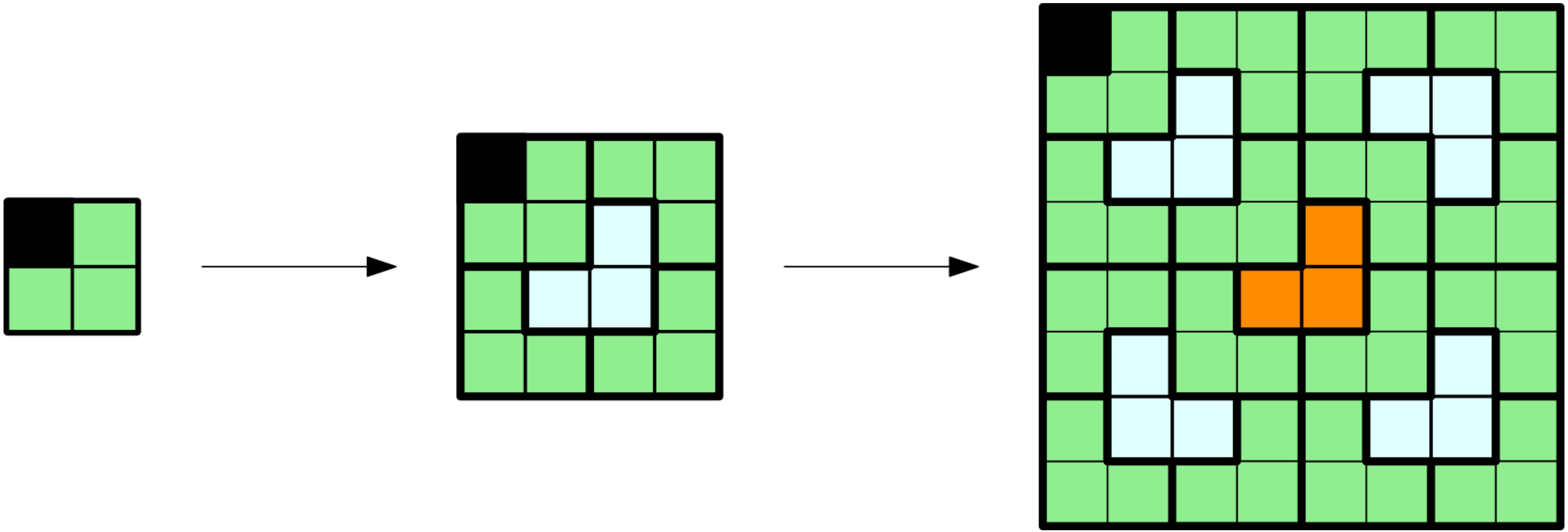
# Einführendes Beispiel



# Einführendes Beispiel



# Einführendes Beispiel



# L-Trominos und das Schachbrett

**Satz:** Jedes $2^n \times 2^n$ Schachbrett (minus eine Ecke) kann mit L-Trominos gepflastert werden.

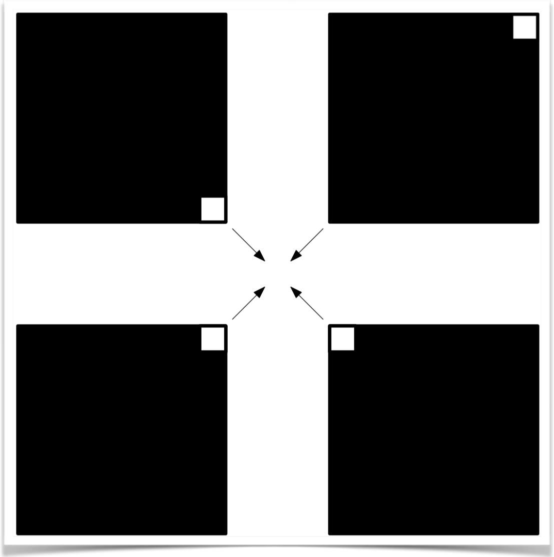
*Beweis:*
Für $n = 1$: $2^1 \times 2^1$ Schachbrett mit einer Ecke weniger. Es bleibt ein L-Tromino übrig. Dort können wir also ein L-Tromino pflastern.

Annahme: Wir haben den obigen Satz für ein bel., aber festes $n$ beweisen.

Wir zeigen nun: Wir können die Aussage auch für $n + 1$ beweisen.

# L-Trominos und das Schachbrett

Zunächst: Wir können ein $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ Schachbrett in vier $2^n \times 2^n$ Schachbretter disjunkt unterteilen (teile horizontal und vertikal in der Mitte)



Wir wissen:

1. Wir können die vier Schachbretter mit L-Trominos pflastern.
2. Die vier Schachbretter sind unabhängig. Wir können sie also so anordnen, dass drei Schachbretter ihre fehlende Ecke in die Mitte drehen.
   Dadurch entsteht ein L-Tromino, welches wir füllen können.

Also können wir auch ein $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ mit L-Trominos pflastern.

Frage: Warum ist damit der Beweis fertig?

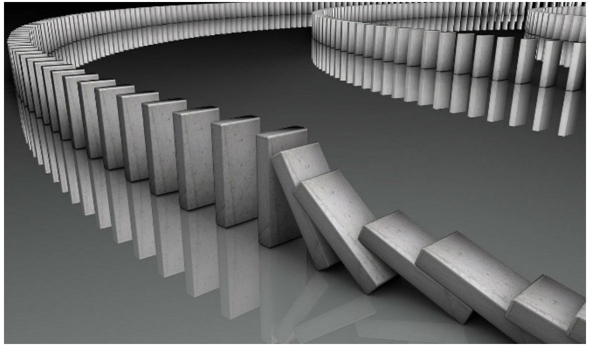
# Beweistechniken – Teil 2
# Vollständige Induktion

# Beweise – Vollständige Induktion


# Beweise – Vollständige Induktion

Bei der **vollständigen Induktion** beweist man Aussagen der Form
„Für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ gilt $P(n)$“ indem man
1. $P(n_0)$ und
2. „Für alle $x \in \mathbb{N}, x \geq n_0$ gilt $P(x) \Rightarrow P(x+1)$“

zeigt.



Vollständige Induktion lässt sich auch oft auf Graphenstrukturen anwenden!

# Beweise – Vollständige Induktion

**Zeige**: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

**Induktionanfang:**

Für $n = 1$ ist $\sum_{i=1}^{n} i = 1 = \frac{2}{2} = \frac{1\cdot(1+1)}{2}$. Diese Aussage stimmt also.

**Induktionsvoraussetzung:**

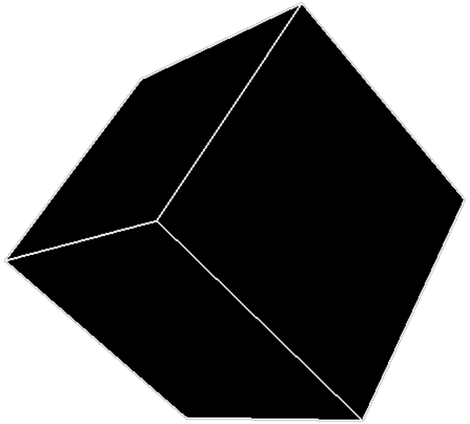
Es gelte $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ mit $n$ beliebig, aber fest.

**Induktionsschritt: $(\boldsymbol{n} \rightarrow \boldsymbol{n} + \mathbf{1})$**

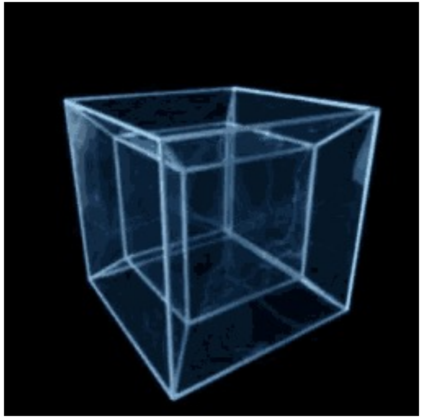
$$\sum_{i=1}^{n+1} i = (n+1) + \sum_{i=1}^{n} i$$

$$\overset{IV}{\triangleq} (n+1) + \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{2(n+1) + n(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

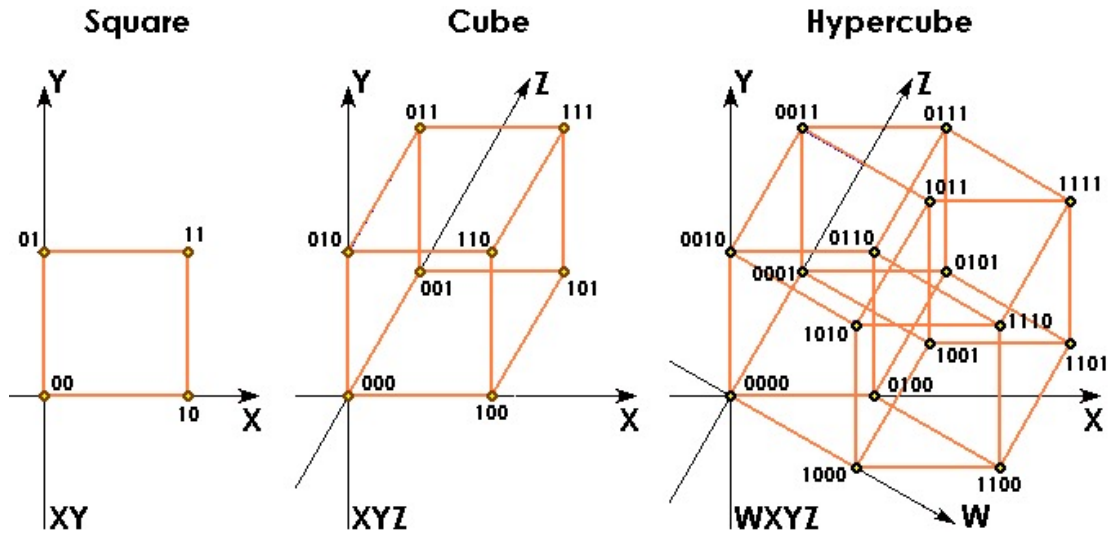


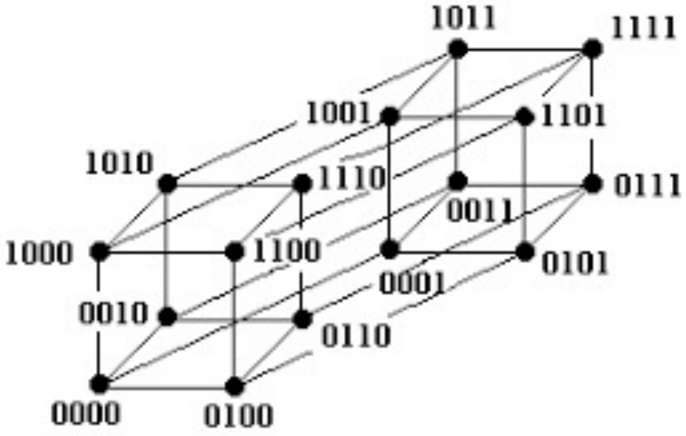
# Hypercubes



### $n$-Dimensionale Würfel

**Zeige**: $n$-Dimensionale Würfel sind hamiltonsch.



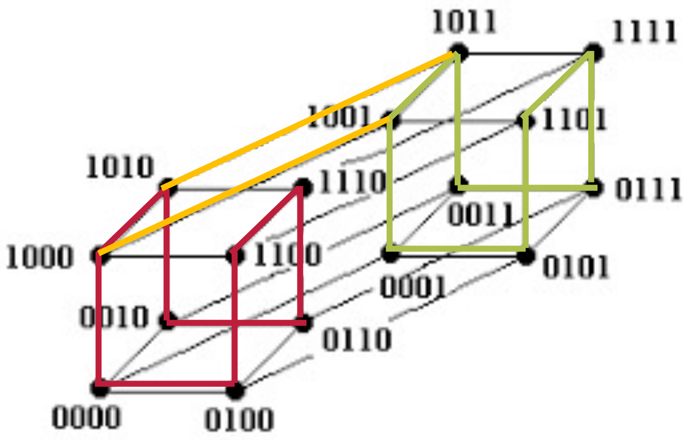
# Beweise – Vollständige Induktion

**I.A.:** Der 2-Dimensionale Würfel ist hamiltonsch (der Kreis selbst ist die Tour).

**I.V.:** Der $n$-Dimensionale Würfel ist hamiltonsch für bel. aber festes $n$.

**I.S.:**

- Betrachte $(n+1)$-Dimensionalen Würfel.
- Nach IV: Zwei Subgraphen hamiltonsch.
- Verschmelze die Kreise.



# Beweise – Vollständige Induktion

**I.A.:** Der 2-Dimensionale Würfel ist hamiltonsch (der Kreis selbst ist die Tour).

**I.V.:** Der $n$-Dimensionale Würfel ist hamiltonsch für bel. aber festes $n$.

**I.S.:** Betrachte einen $(n+1)$-dimenisonalen Würfel $W$ und die Aufteilung in zwei $n$-dimensionale Würfel $W_1 := \{v_1, \dots, v_{2^n}\}, W_2 := \{v_1', \dots, v_{2^n}'\}$, wobei $v_i$ und $v_i'$ in $W$ verbunden sind.

$W_1$ und $W_2$ sind beide hamiltonsch. Betrachte einen Hamiltonkreis, der in beiden Würfeln die gleiche Reihenfolge benutzt. O.B.d.A. sei $\mathrm{v}_1\mathrm{v}_2$ die letzte Kante des Kreises $K_1$ in $W_1$ und $\mathrm{v}_1'\mathrm{v}_2'$ die letzte Kante des Kreises $K_2$ in $W_2$.

Ein Hamiltonkreis in $W$ ist: $\mathrm{v}_1 \overbrace{\mathrm{v}_1' \dots \mathrm{v}_2'}^{K_2} \overbrace{\mathrm{v}_2 \dots \mathrm{v}_1}^{K_1}$

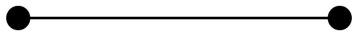
# Zusammenhang in Graphen

# Zusammenhang in Graphen

**<u>Behauptung:</u>** Alle Graphen (mit mind. zwei Knoten), bei denen alle Knoten mindestens den Grad 1 haben, sind zusammenhängend.

*Beweis:*

**I.A.:** Der kleinste Graph, bei dem jeder Knoten (mind.) Grad 1 besitzt zwei Knoten und eine Kante.



**I.V.:** Für ein bel., aber festes $n$, sind alle Graphen mit n Knoten und Minimalgrad 1 zusammenhängend.

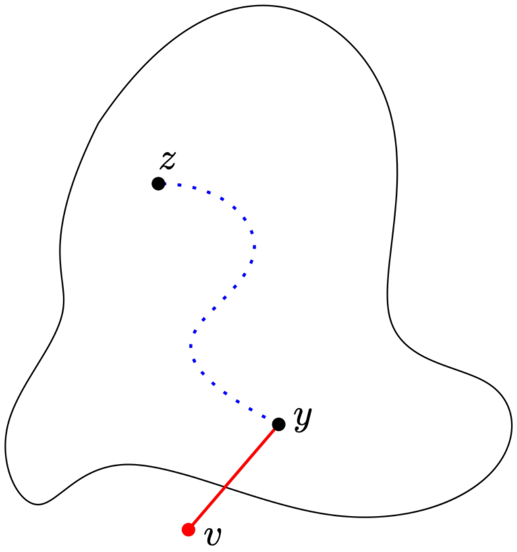
# Zusammenhang in Graphen

**I.S.:** $n \rightarrow n + 1$

Betrachte einen Graphen $G$ mit n Knoten in dem jeder Knoten mindestens den Grad 1 hat.

Nach Annahme ist dieser Graph zusammenhängend; es existiert also ein Pfad zwischen je zwei Knoten.

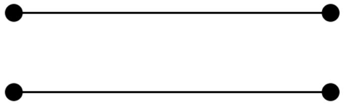
Nun fügen wir einen neuen Knoten plus eine Kante hinzu um einen Graphen mit $n + 1$ Knoten zu erhalten.

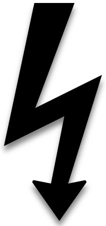



Damit ist der neue Knoten zu einem Knoten $G$ verbunden, wodurch es zwischen allen $n + 1$ Knoten einen Pfad gibt.
$\Rightarrow$ Der neue Graph ist zusammenhängend!

# Zusammenhang in Graphen

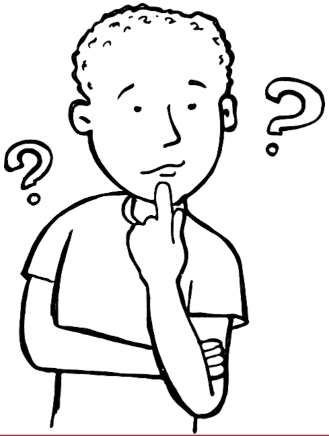
Was ist hiermit?





Was lief im Beweis schief?

Konnten wir über unsere Methode alle möglichen Graphen mit $n + 1$ Knoten erzeugen?



# Build-up Error

Dies ist ein typischer “***build-up error***”.

*Fehlerhafte Annahme:* Jeder Graph mit $n+1$ Knoten mit einer Eigenschaft A kann aus einen Graphen mit $n$ Knoten und derselben Eigenschaft konstruiert werden.

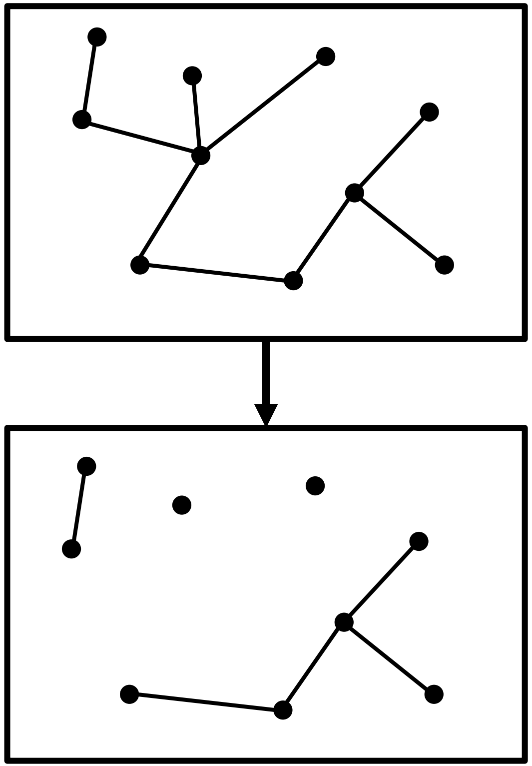
*Ausweg:* “***Shrink down and grow back***”

Nimm einen bel. Graphen mit $n+1$ Knoten, entferne einen Knoten, wende I.V. an, füge Knoten wieder an und argumentiere, warum die Eigenschaft immer noch gilt.

# Zusammenhang in Graphen

**I.S.:** $n \rightarrow n+1$

Betrachte einen Graphen $G$ mit $n+1$ Knoten in dem jeder Knoten mindestens den Grad 1 hat.



Nimm einen beliebigen Knoten (samt Kanten) aus $G$ heraus.

Der Restgraph enthält $n$ Knoten, welche alle den Grad…mind. 0 besitzen…

Darauf können wir I.V. nicht anwenden!

# Beliebte Fehler

# Beweise – Vollständige Induktion

Beliebte Fehler:

- Build-Up-Error:

  Füge etwas hinzu, um den Induktionsschritt zu zeigen.
  So werden ggf. nicht alle Strukturen berücksichtigt!
- Kein Induktionsanfang oder -schluss.

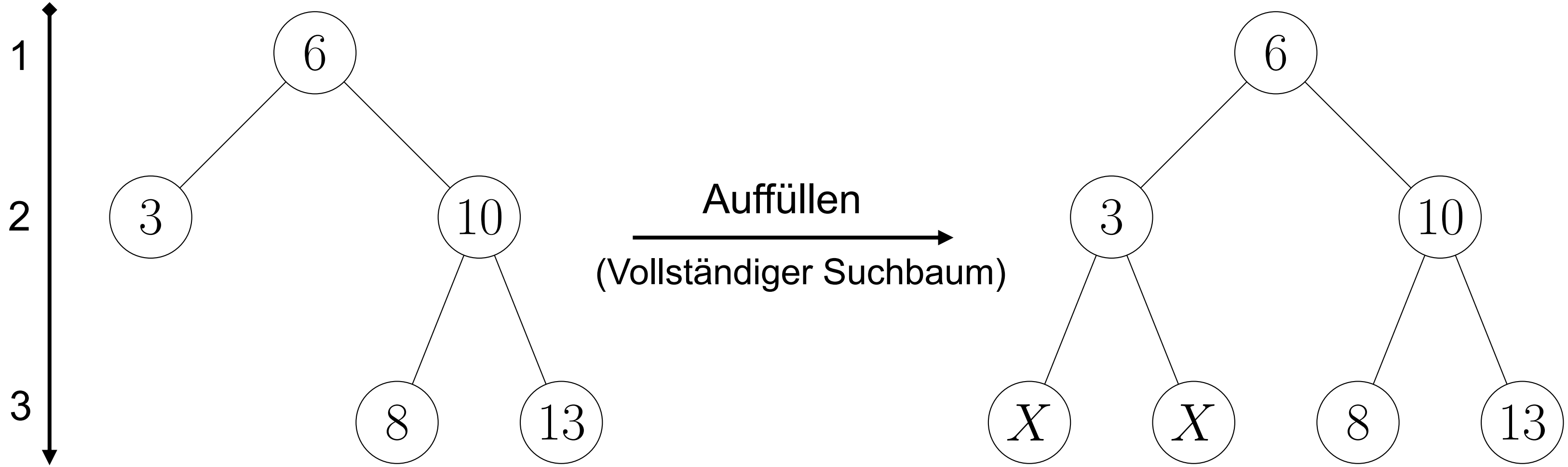
  IA und IS müssen beide vorhanden sein!
- Zu wenig Induktionsanfänge (z.B. bei Rekursionen mit mehreren Anfängen)
- Induktionsvoraussetzung falsch angewendet.

  Behauptung: $a^n = b^n$ für alle $a, b \in \mathbb{R}, n \geq 0$
  IA: $n = 0$: $a^0 = 1 = b^0$
  IV: $a^x = b^x$ gilt für alle $x \leq n$ mit $n$ bel., aber fest.
  IS: $a^{n+1} = a^n a \neq b^n b = b^{n+1}$

# Beispiele für Vollständige Induktion

# Knoten in binären Suchbäumen

Satz: Sei $B$ ein binärer Suchbaum der Höhe $h$ mit $n$ Knoten. Dann ist $n \leq 2^h - 1$.




$h = 3, n = 5 \leq 7 = 2^3 - 1$

Höhe bleibt gleich.
Anzahl an Knoten ist maximal!

# Knoten in binären Suchbäumen

Satz: Sei $B$ ein ***vollständiger*** binärer Suchbaum der Höhe $h$ mit $n$ Knoten. Dann ist $n = 2^h - 1$.

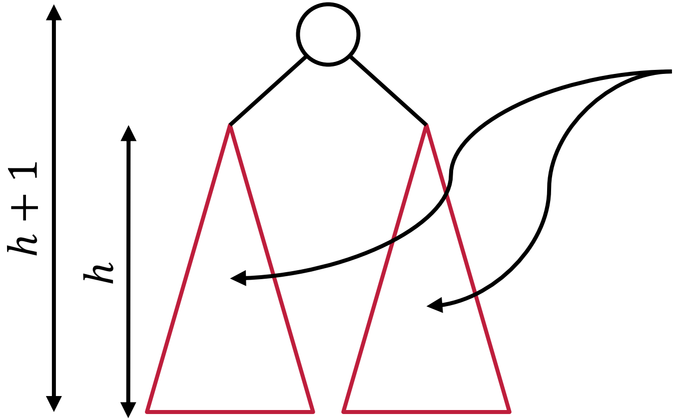
***Induktionsanfang***:
Vollständiger Suchbaum der Höhe 1 besitzt einen Knoten.
Außerdem ist $2^1 - 1 = 1 = n$.

***Induktionsvoraussetzung***:
Jeder vollständige binäre Suchbaum der Höhe $h$ besitzt $n = 2^h - 1$ mit $h$ beliebig, aber fest.

# Knoten in binären Suchbäumen

Satz: Sei $B$ ein ***vollständiger*** binärer Suchbaum der Höhe $h$ mit $n$ Knoten. Dann ist $n = 2^h - 1$.

***Induktionsschluss***:
Betrachte vollständigen binären Suchbaum $B$ der Höhe $h + 1$.




Zwei vollst. bin. Suchbäume der Höhe $h$.
Nach IV: je $2^h - 1$ Knoten

Also hat $B$

$$2 \cdot (2^h - 1) + 1 = 2^{h+1} - 1$$

Knoten.

# Rekursionsformel

Satz: Sei $F_n := F_{n-1} - F_{n-2}$ mit $F_0 = 0$ und $F_1 = 1$.
Dann gilt:

$$F_n = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{3}\right)$$

***Induktionsanfang***:

$$F_0 = 0 = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 0 = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sin\left(\frac{0\pi}{3}\right)$$

***Induktionsvoraussetzung***:

Es gilt $F_n = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{3}\right)$ mit $n$ beliebig, aber fest.

# Rekursionsformel

***Induktionsschritt***:

$$F_{n+1} = F_n - F_{n-1}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\sin\left(\frac{\pi n}{3}\right) - \sin\left(\frac{\pi(n-1)}{3}\right)\right)$$

Für $n + 1 = 1$ geht es hier schief, denn $F_{-1}$ ist unbekannt!

# Rekursionsformel

Satz: Sei $F_n := F_{n-1} - F_{n-2}$ mit $F_0 = 0$ und $F_1 = 1$.
Dann gilt:

$$F_n = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{3}\right)$$

***Induktionsanfang***:

$$\left.\begin{array}{l} F_0 = 0 = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 0 = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sin\left(\frac{0\pi}{3}\right) \\ F_1 = 1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sin\left(\frac{1\pi}{3}\right) \end{array}\right\} \text{Hier sind zwei Induktionsanfänge nötig!}$$

***Induktionsvoraussetzung***:

Es gilt $F_n = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{3}\right)$ mit $n$ beliebig, aber fest.

# Rekursionsformel

***Induktionsschritt***:

$$F_{n+1} = F_n - F_{n-1}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\sin\left(\frac{\pi n}{3}\right) - \sin\left(\frac{\pi(n-1)}{3}\right)\right)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\pi(n+1)}{3}\right)$$

| $i = n \bmod 6$ | $\sin\left(\frac{\pi i}{3}\right)$ | $\sin\left(\frac{\pi i}{3}\right) - \sin\left(\frac{\pi(i-1)}{3}\right)$ |
|---|---|---|
| $0$ | $0$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| $2$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $0$ |
| $3$ | $0$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| $4$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| $5$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $0$ |