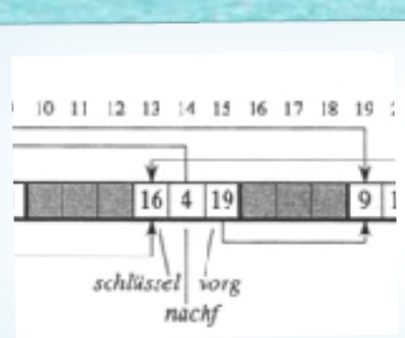
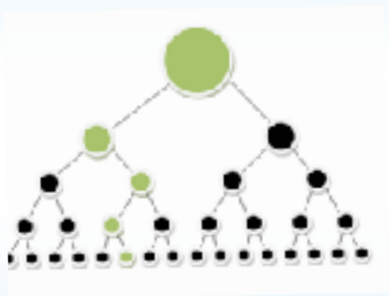





Kapitel 4: Dynamische Datenstrukturen

Algorithmen und Datenstrukturen
WS 2021/22

Prof. Dr. Sándor Fekete

4.1 Grundoperationen

<u>Aufgabenstellung:</u>

- ***Verwalten einer Menge S von Objekten***
- ***Ausführen von verschiedenen Operationen (s.u.)***

<u>Im Folgenden:</u>

S **Menge von Objekten**

k **Wert eines Elements (“Schlüssel”)**

x **Zeiger auf Element**

NIL **spezieller, “leerer” Zeiger**

<u>SEARCH(S,k):</u> **“Suche in S nach k”**

Durchsuche die Menge S nach einem Element von Wert k.

Ausgabe: Zeiger x, falls x existent
NIL, falls kein Element Wert k hat.

4.1 Grundoperationen

Langsam:

- ***O(n):*** ***lineare Zeit***

  Alle Objekte anschauen

Sehr schnell:

- ***O(1):*** ***konstante Zeit***

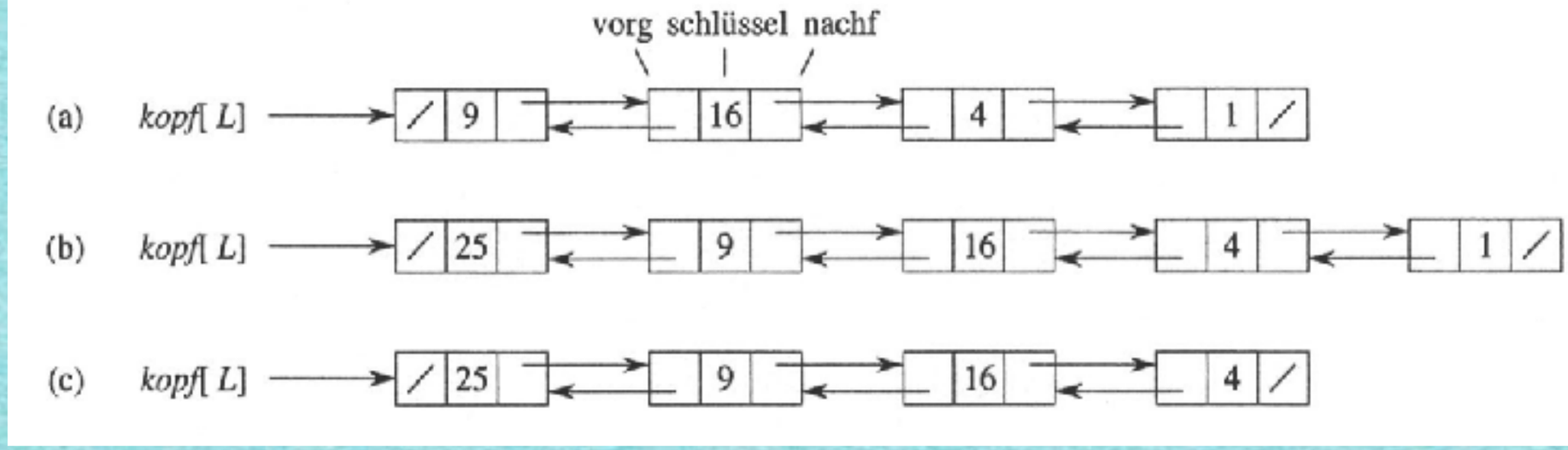
  Immer gleich schnell, egal wie groß S ist.

Schnell:

- ***O(log n):*** ***logarithmische Zeit***

  Wiederholtes Halbieren

Struktur einer doppelt verketteten Liste



- **Füge vorne das Element mit Schlüssel 25 ein.**

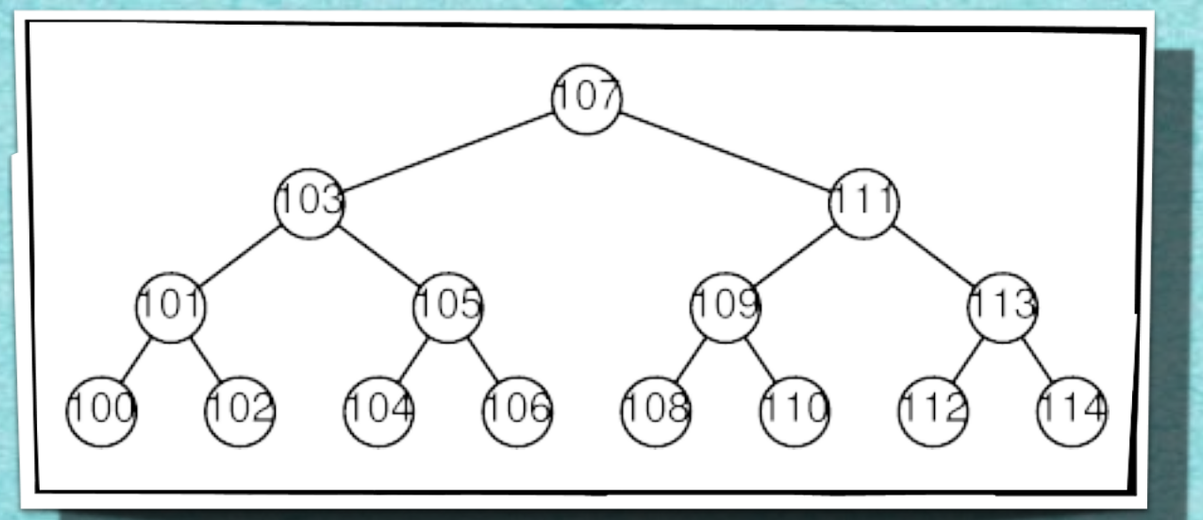
- **Finde ein Element mit Schlüssel 1 und lösche es.**

Satz 4.2

Die binäre Suche terminiert in O(log(RECHTS-LINKS)) Schritten (für RECHTS>LINKS).

Beweis:

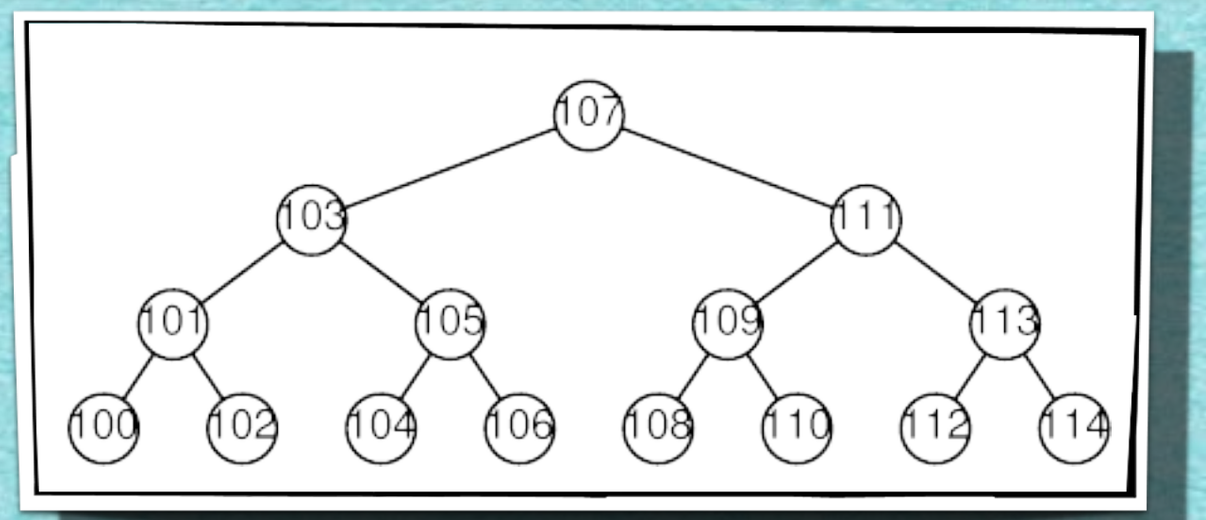
Selbst!



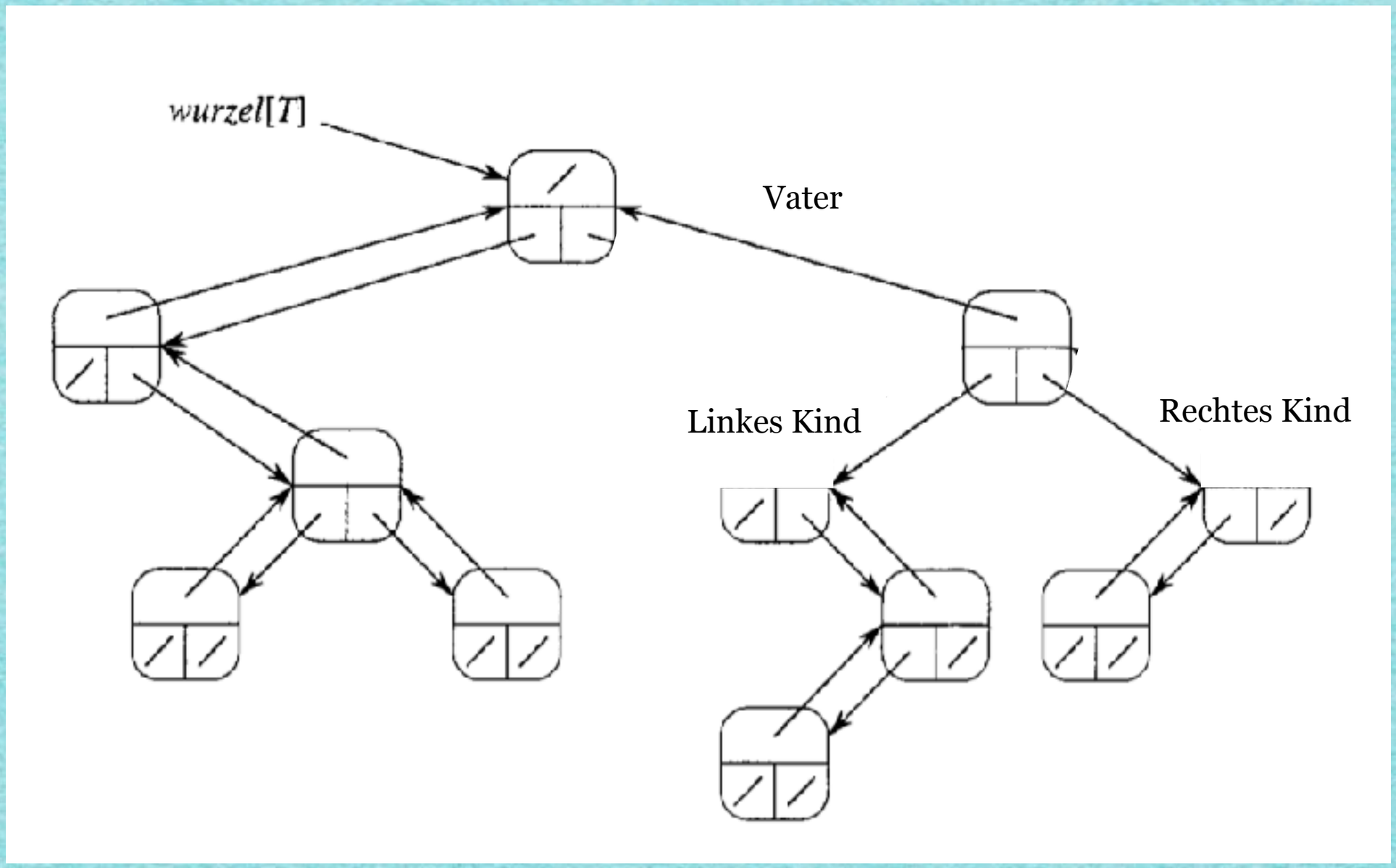
4.5 Binäre Suchbäume

Ideen:

- ***Strukturiere Daten wie im möglichen Ablauf einer binären Suche!***
- ***Erziele logarithmische Zeiten!***



Binärer Suchbaum



Außerdem wichtig: Struktur der Schlüsselwerte!

Definition 4.3

(1) Ein *gerichteter Graph* D=(V,A) besteht aus einer endlichen Menge V von Knoten v und einer endlichen Menge von gerichteten Kanten, a=(v,w). (v ist Vorgänger von w.)

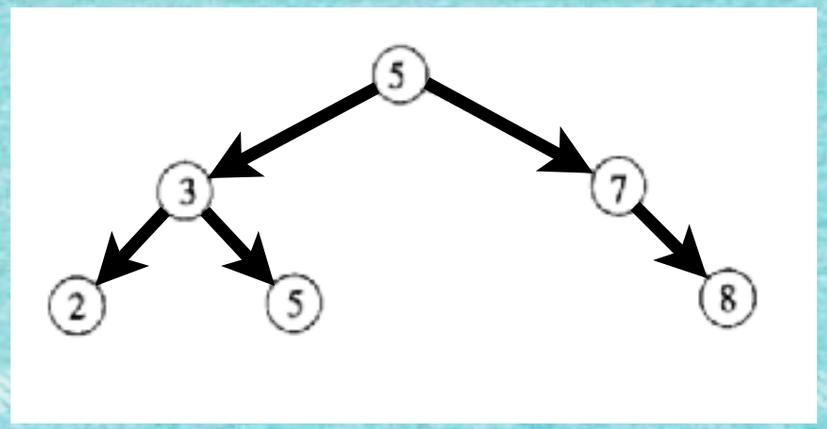
(2) Ein *gerichteter Baum* B=(V,T) hat folgende Eigenschaften:

(i) Es gibt einen eindeutigen Knoten w ohne Vorgänger.

(ii) Jeder Knoten außer w ist auf einem eindeutigen Weg von w aus erreichbar; das heißt insbesondere, dass v einen eindeutigen Vorgänger (Vaterknoten) hat.

(3) Die *Höhe* eines gerichteten Baumes ist die maximale Länge eines gerichteten Weges von der Wurzel.

(4) Ein *binärer Baum* ist ein gerichteter Baum, in dem jeder Knoten höchstens zwei Nachfolger ("Kindknoten") hat. Einer ist der "linke" l[v], der andere der "rechte", r[v].



Definition 4.3 (Forts.)

(5) Ein binärer Baum heißt *voll*, wenn jeder Knoten zwei oder keinen Kindknoten hat.

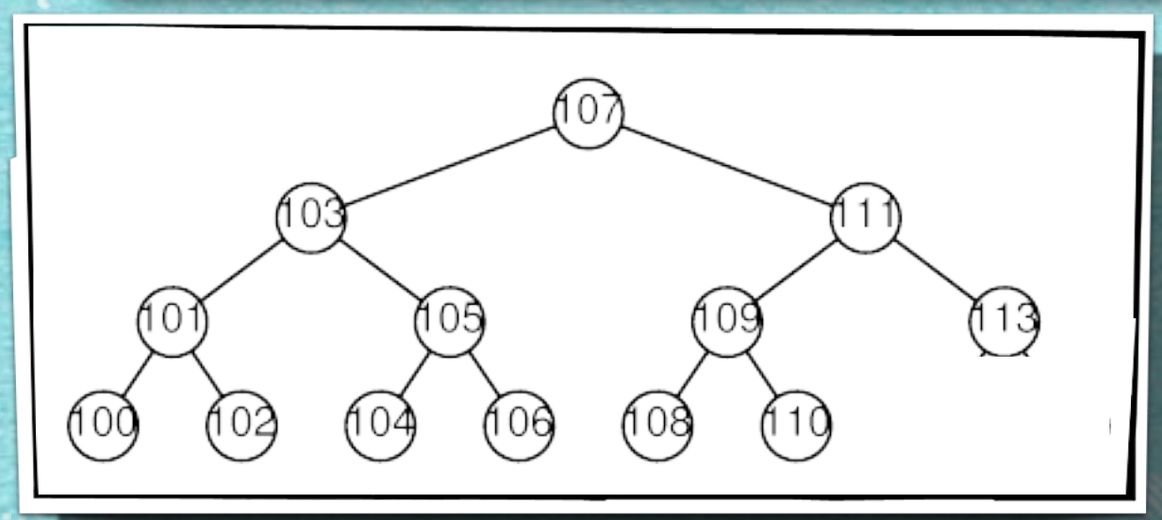
(6) Ein binärer Baum heißt *vollständig*, wenn zusätzlich alle Blätter gleichen Abstand zur Wurzel haben.

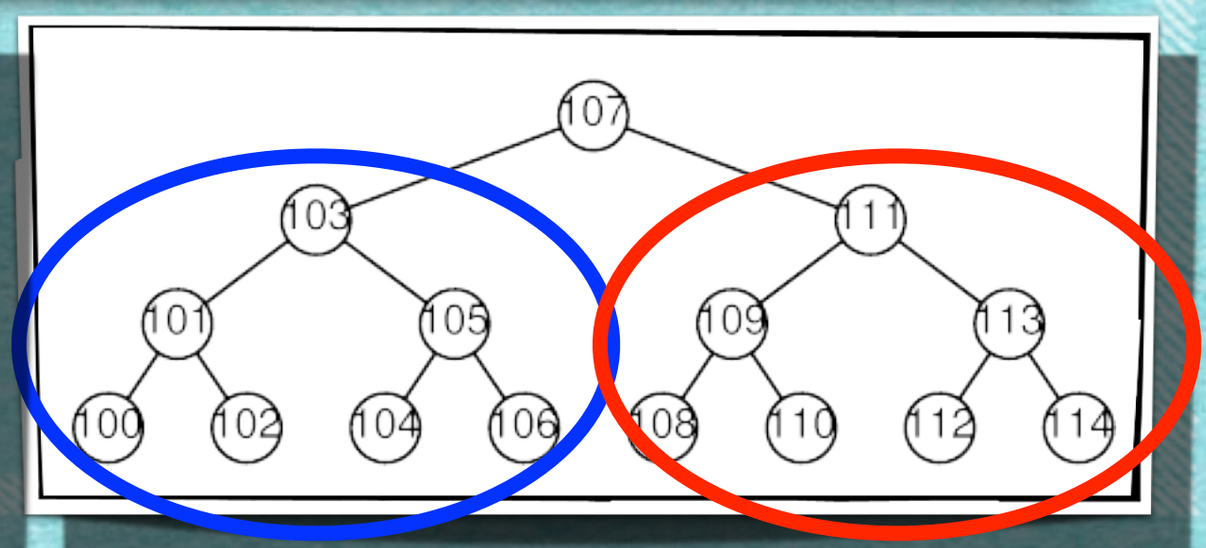
(7) Ein Knoten ohne Kindknoten heißt *Blatt*.

(8) Der *Teilbaum eines Knotens v* ist durch die Menge der von v erreichbaren Knoten und der dabei verwendeten Kanten definiert; der linke Teilbaum ist der Teilbaum von l[v].

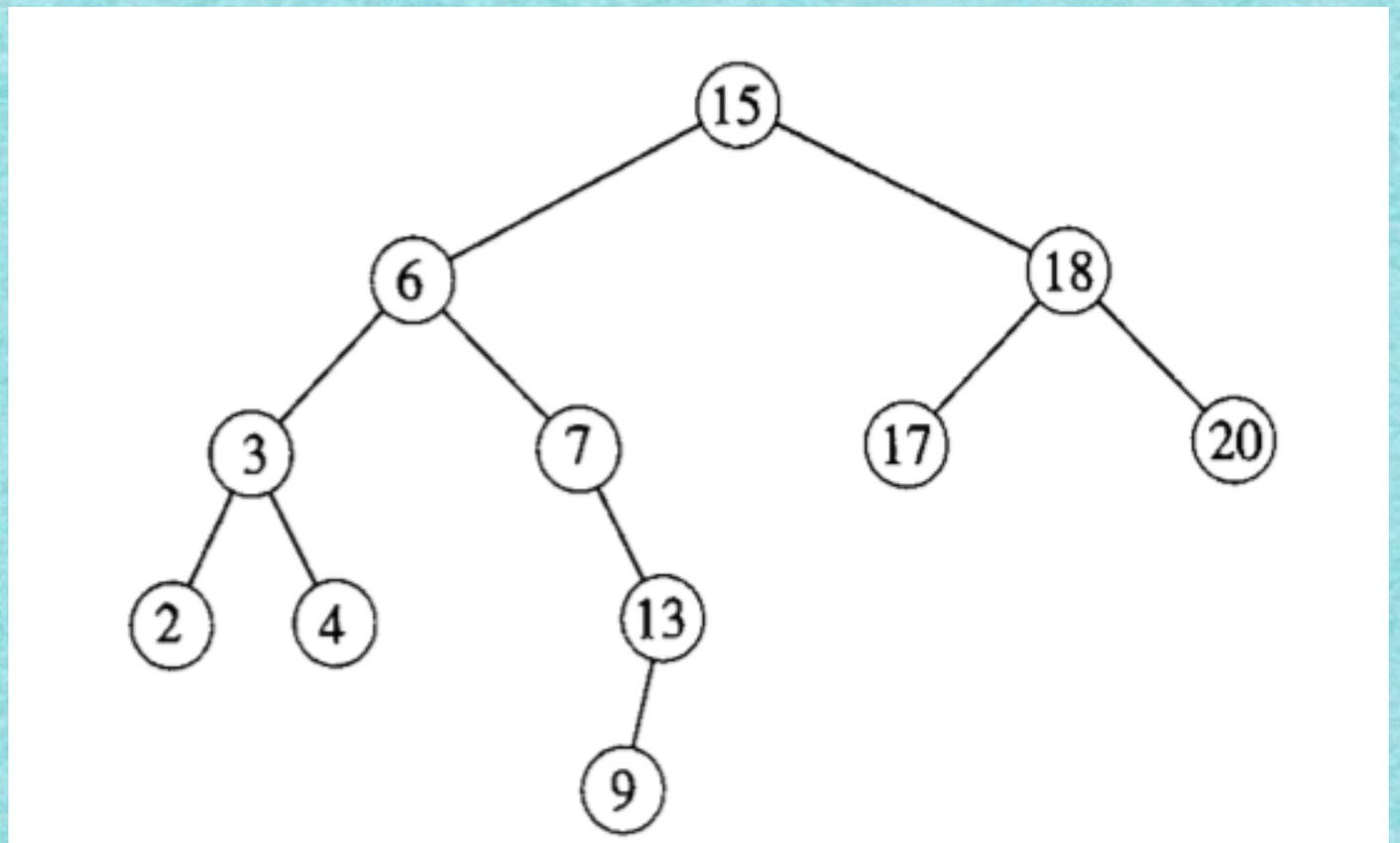
(9) In einem *binären Suchbaum* hat jeder Knoten v einen Schlüsselwert S[v],und es gilt:

- **S[u]≤S[v] für Knoten u im linken Teilbaum von v**
- **S[u]>S[v] für Knoten u im rechten Teilbaum von v**





Minimum und Maximum



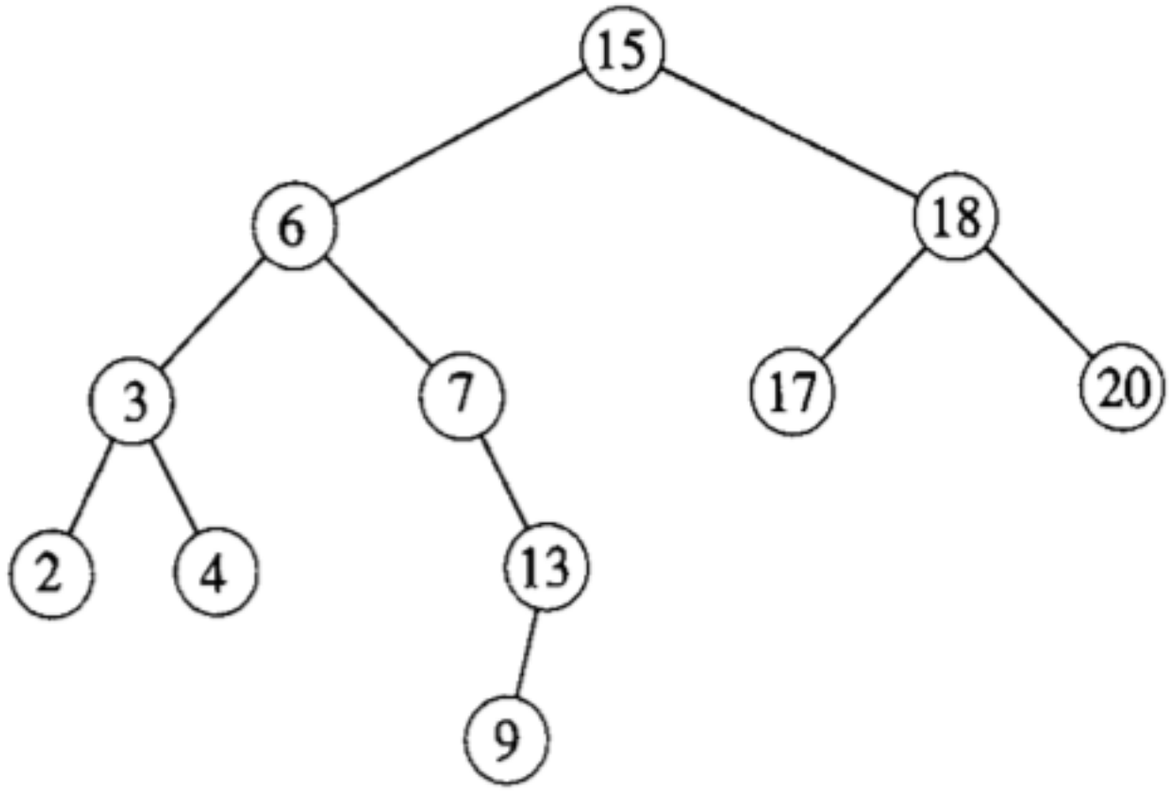
TREE-MINIMUM(x)

```
1  while links[x] ≠ NIL
2        do x ← links[x]
3  return x
```

TREE-MAXIMUM(x)

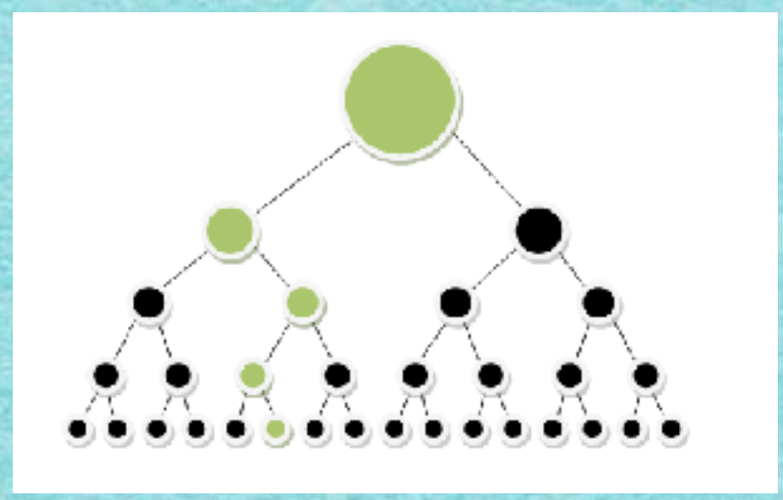
```
1  while rechts[x] ≠ NIL
2        do x ← rechts[x]
3  return x
```

Suche im Suchbaum



ITERATIVE-TREE-SEARCH(x, k)

```
1  while x ≠ NIL und k ≠ schlüssel[x]
2        do if k < schlüssel[x]
3              then x ← links[x]
4              else  x ← rechts[x]
5  return x
```

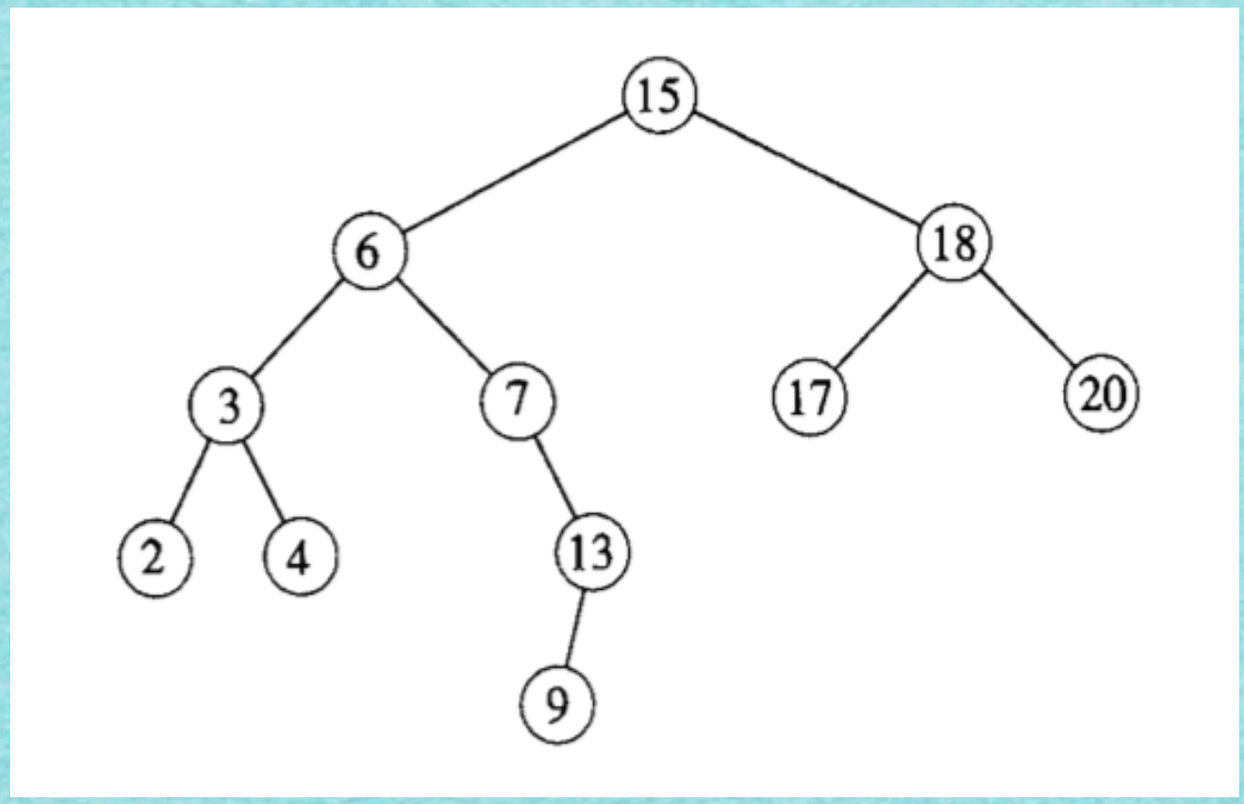


<u>SUCCESSOR(S,x):</u>
“Finde das nächstgrößere Element”

Für ein in x stehendes Element in S, bestimme ein Element von nächstgrößerem Wert in S.

Ausgabe: Zeiger y auf Element
NIL, falls x Maximum von S angibt

Nachfolger im Suchbaum



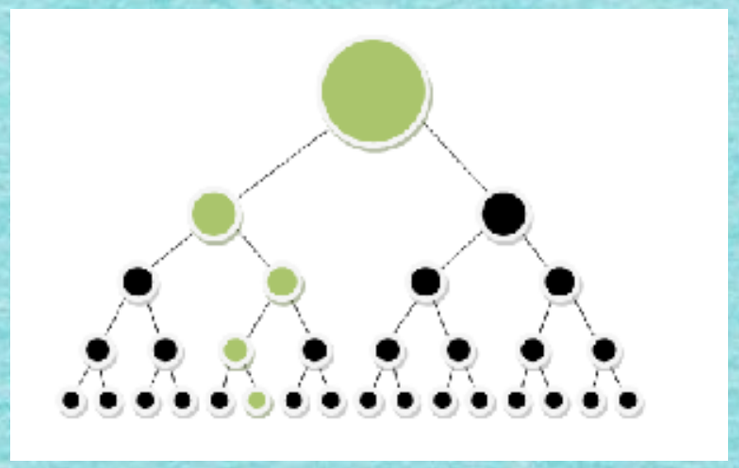

```
TREE-SUCCESSOR(x)
1  if rechts[x] ≠ NIL
2      then return TREE-MINIMUM(rechts[x])
3  y ← p[x]
4  while y ≠ NIL und x = rechts[y]
5        do x ← y
6           y ← p[y]
7  return y
```

Satz 4.4

Suchen, Minimum, Maximum, Nachfolger, Vorgänger können in einem binären Suchbaum der Höhe h in Zeit O(h) durchlaufen werden.

Beweis:

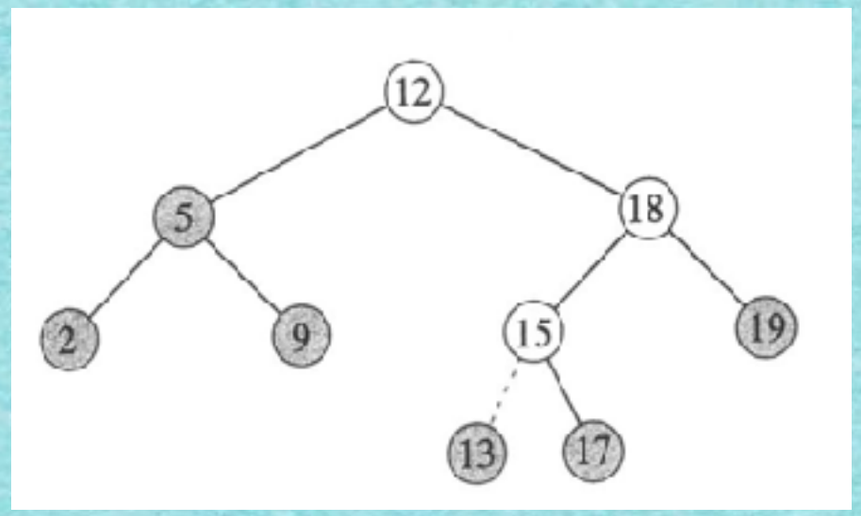
Klar, der Baum wird nur einmal vertikal durchlaufen!



<u>INSERT(S,x):</u> **“Füge x in S ein”**

Erweitere S um das Element, das unter der Adresse x steht.

Einfügen im Suchbaum

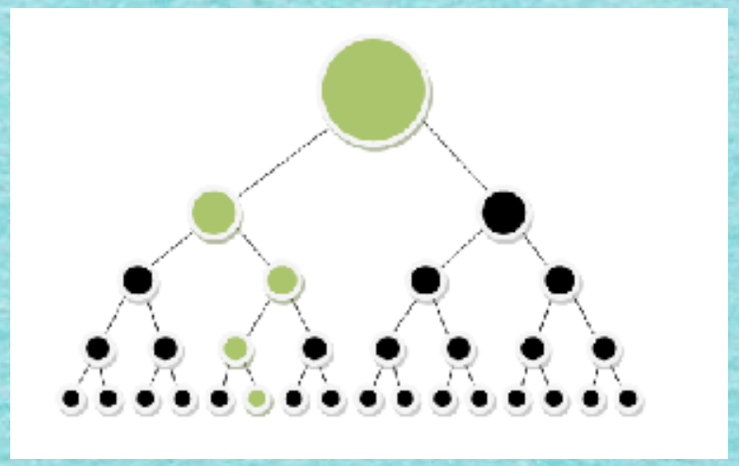


TREE-INSERT(T, z)

```
2   x ← wurzel[T]
3   while x ≠ NIL
4         do y ← x
5            if schlüssel[z] < schlüssel[x]
6               then x ← links[x]
7               else  x ← rechts[x]
8   p[z] ← y
9   if y = NIL
10     then wurzel[T] ← z
11     else  if schlüssel[z] < schlüssel[y]
12              then links[y] ← z
13              else  rechts[y] ← z
```

Satz 4.5
Einfügen benötigt O(h) für einen binären Suchbaum der Höhe h.

Beweis:
Klar, der Baum wird nur vertikal abwärts durchlaufen!

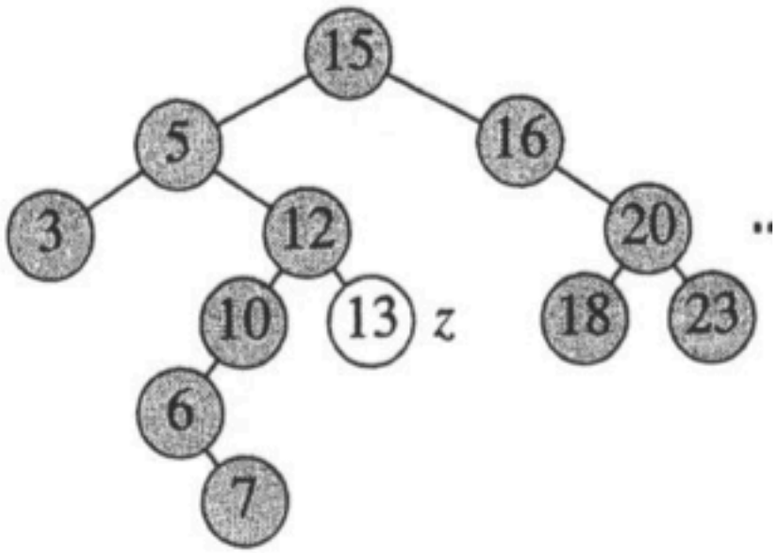


DELETE(S,x): **“Entferne x aus S”**

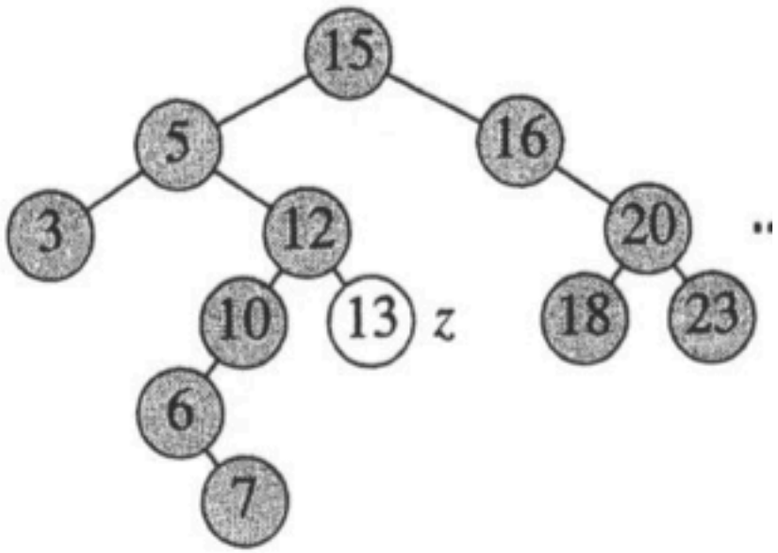
Lösche das unter der Adresse x stehende Element aus der Menge S.

Löschen im Suchbaum

Löschen im Suchbaum

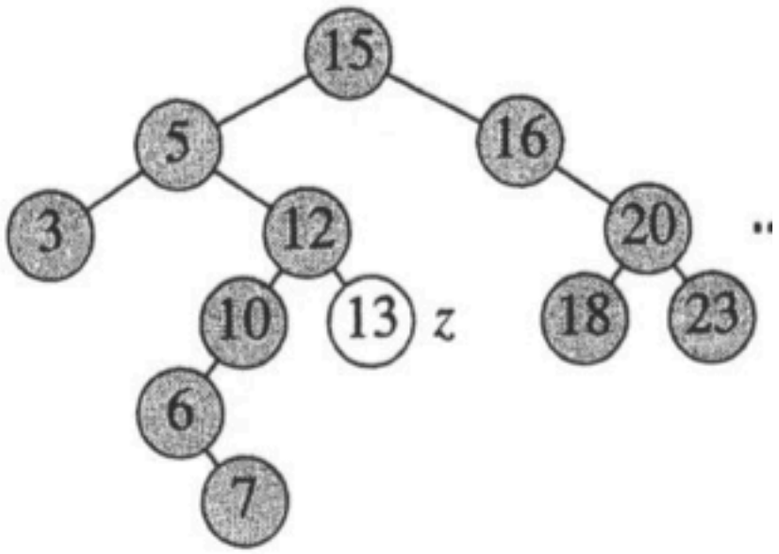


Löschen im Suchbaum



Lösche 13!

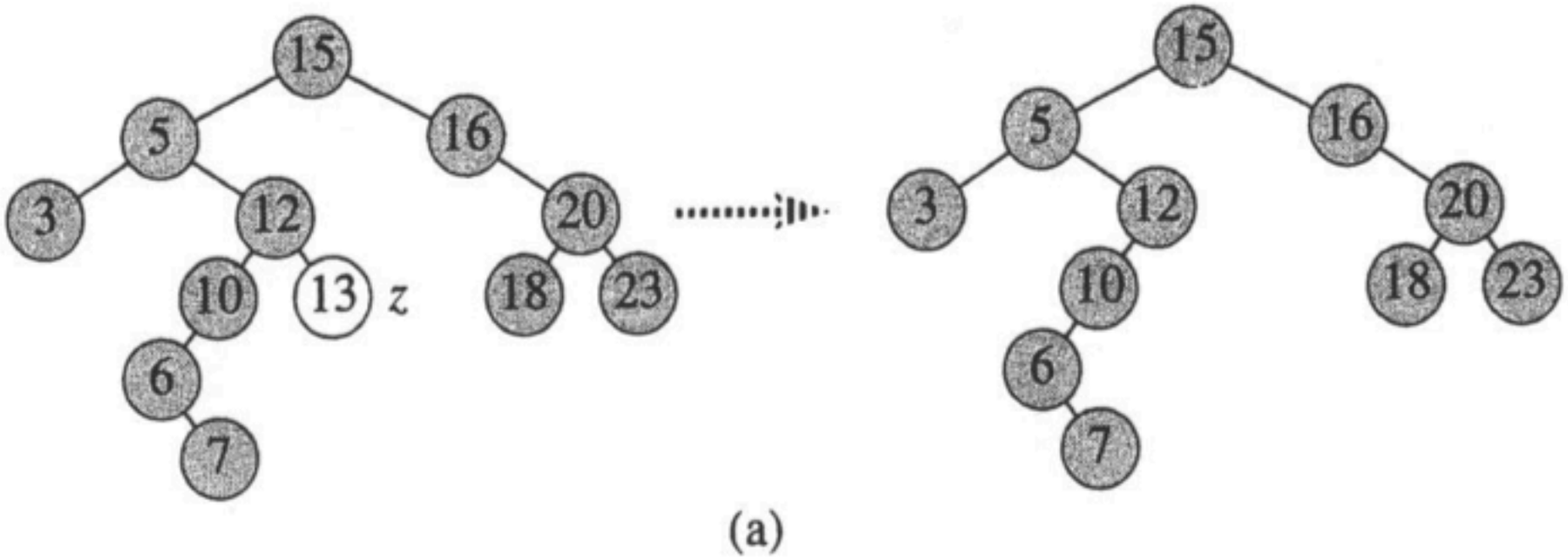
Löschen im Suchbaum



Lösche 13!

(a) Keine Kinder:

Löschen im Suchbaum

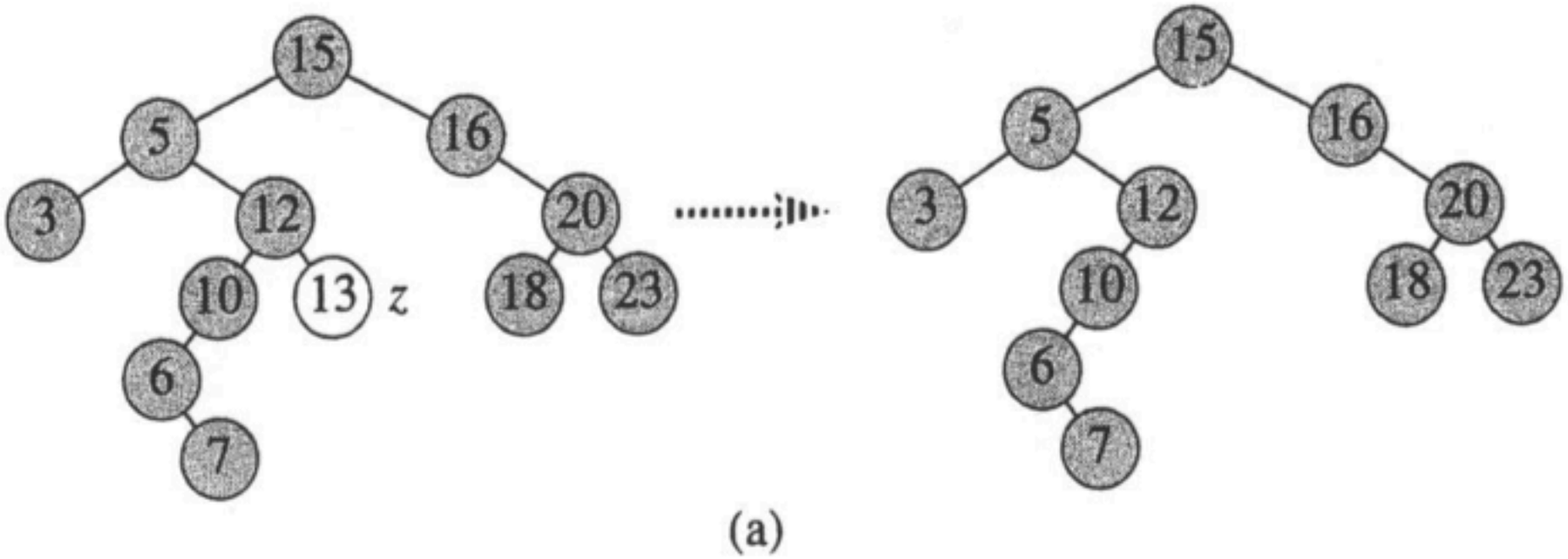


(a)

Lösche 13!

(a) Keine Kinder:

Löschen im Suchbaum



(a)

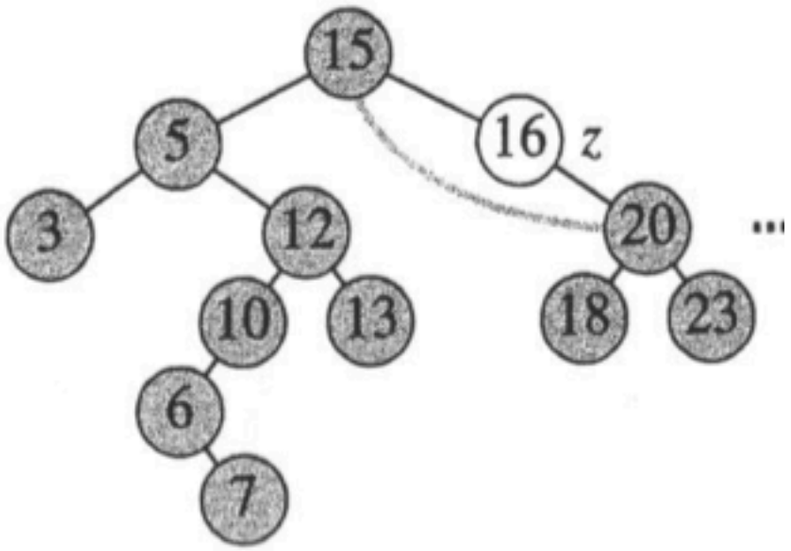
Lösche 13!

(a) Keine Kinder:

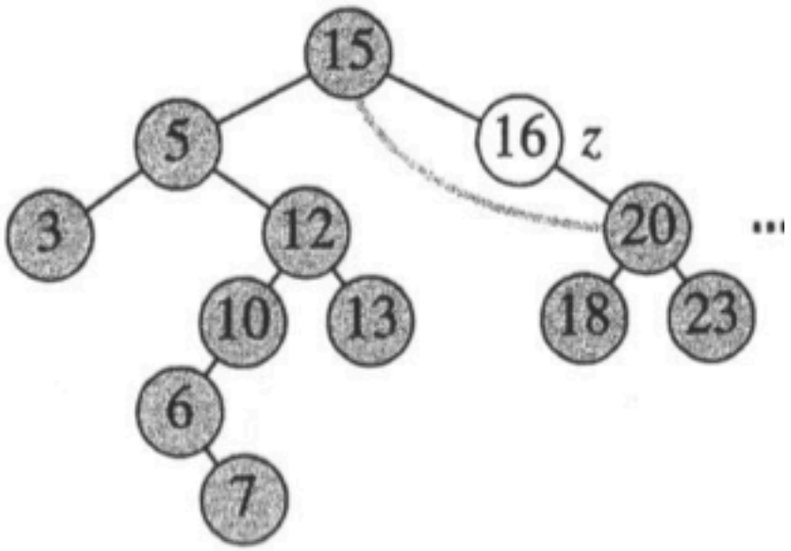
Einfach entfernen

Löschen im Suchbaum

Löschen im Suchbaum

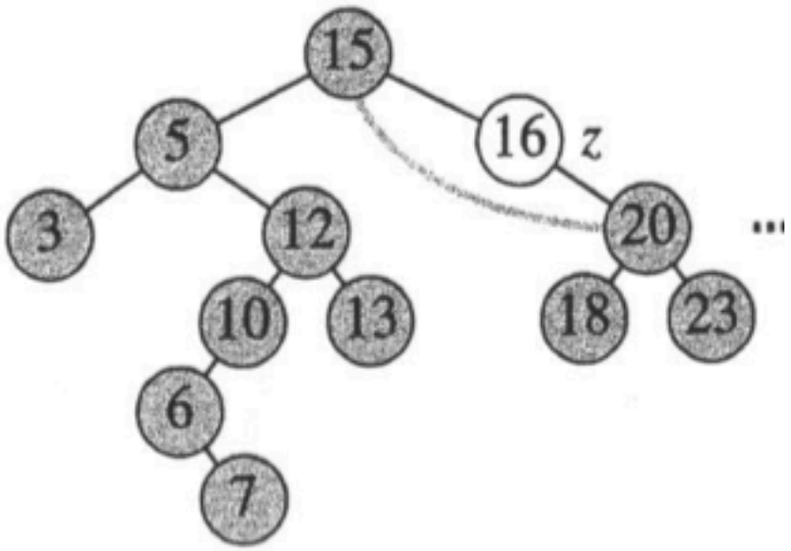


Löschen im Suchbaum



Lösche 16!

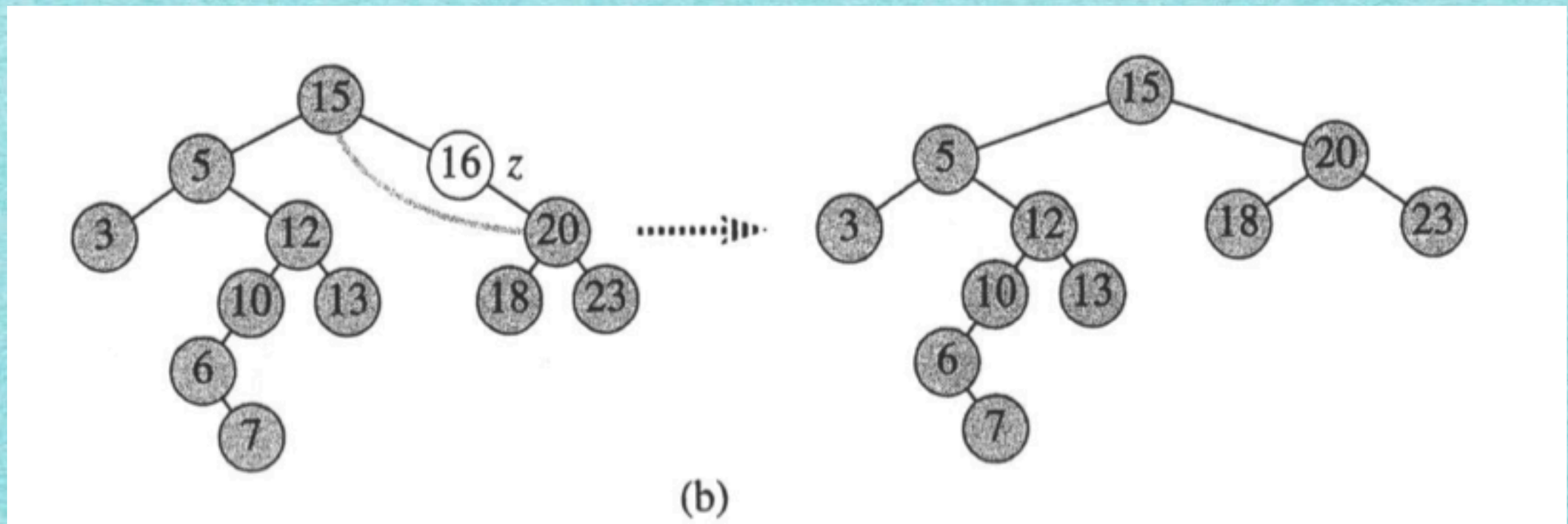
Löschen im Suchbaum



Lösche 16!

(b) Ein Kind:

Löschen im Suchbaum

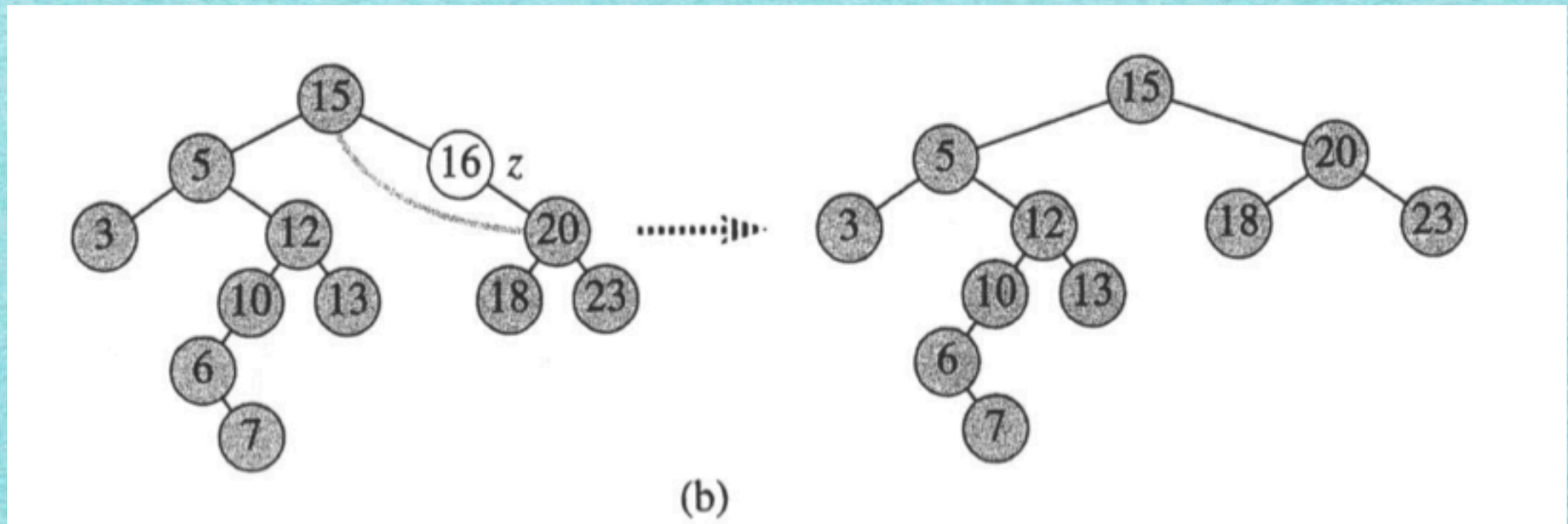


(b)

Lösche 16!

(b) Ein Kind:

Löschen im Suchbaum



(b)

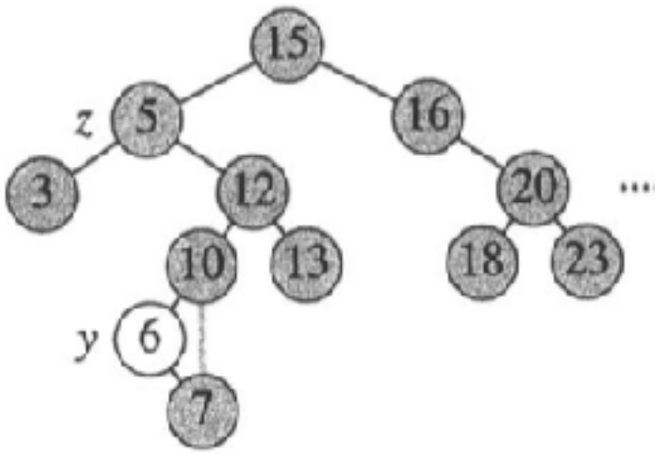
Lösche 16!

(b) Ein Kind:

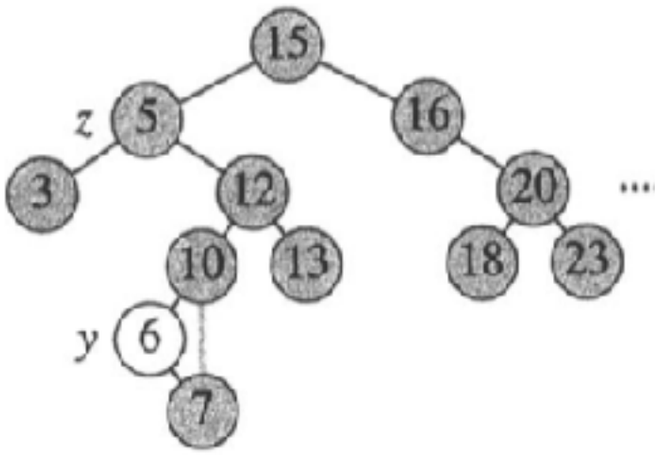
"Ausschneiden"

Löschen im Suchbaum

Löschen im Suchbaum

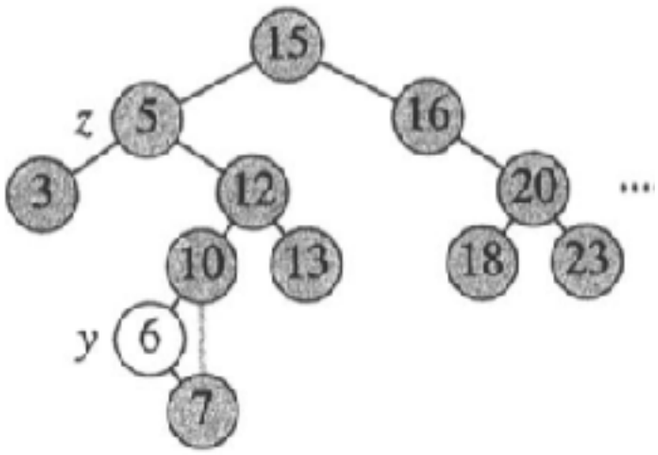


Löschen im Suchbaum



Lösche 5!

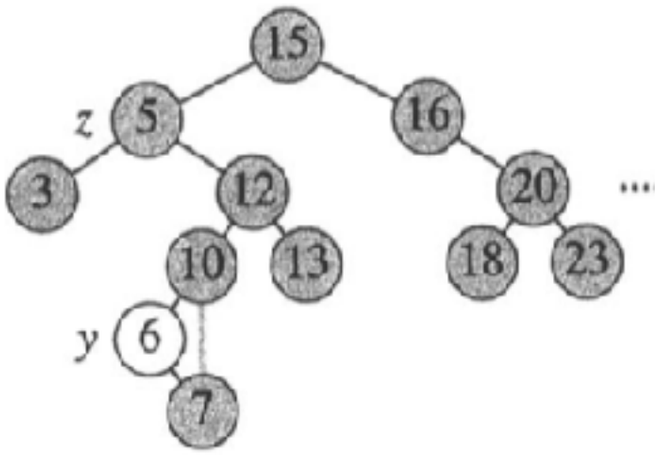
Löschen im Suchbaum



Lösche 5!

(c) Zwei Kinder:

Löschen im Suchbaum

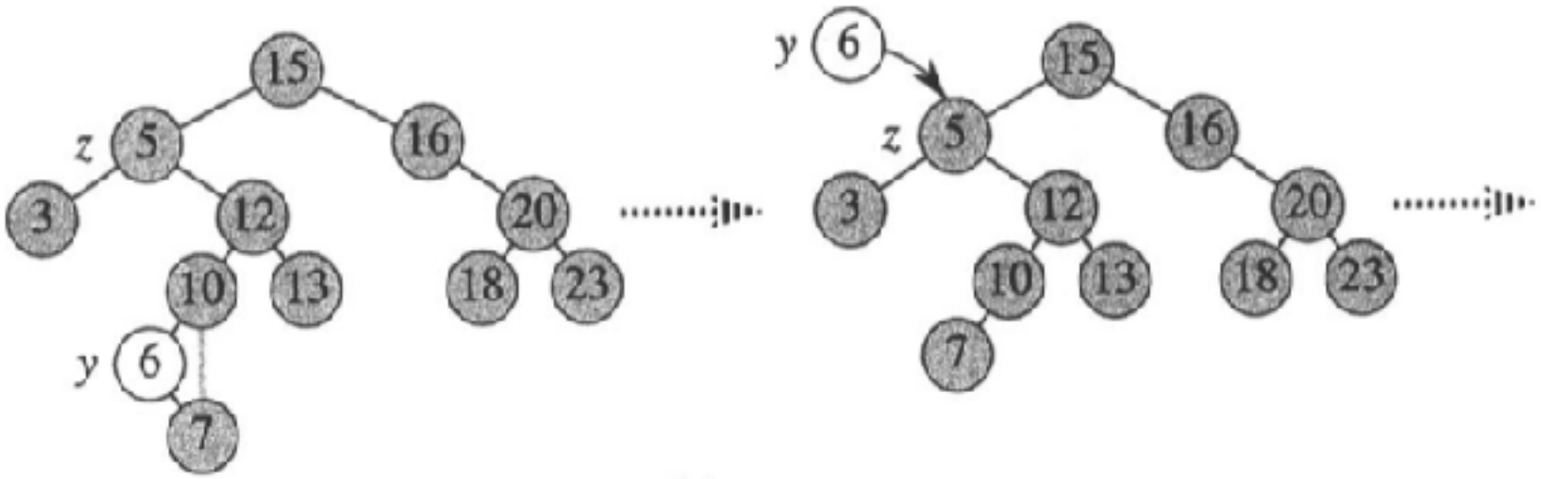


Lösche 5!

(c) Zwei Kinder:

"Nachfolger verpflanzen"

Löschen im Suchbaum



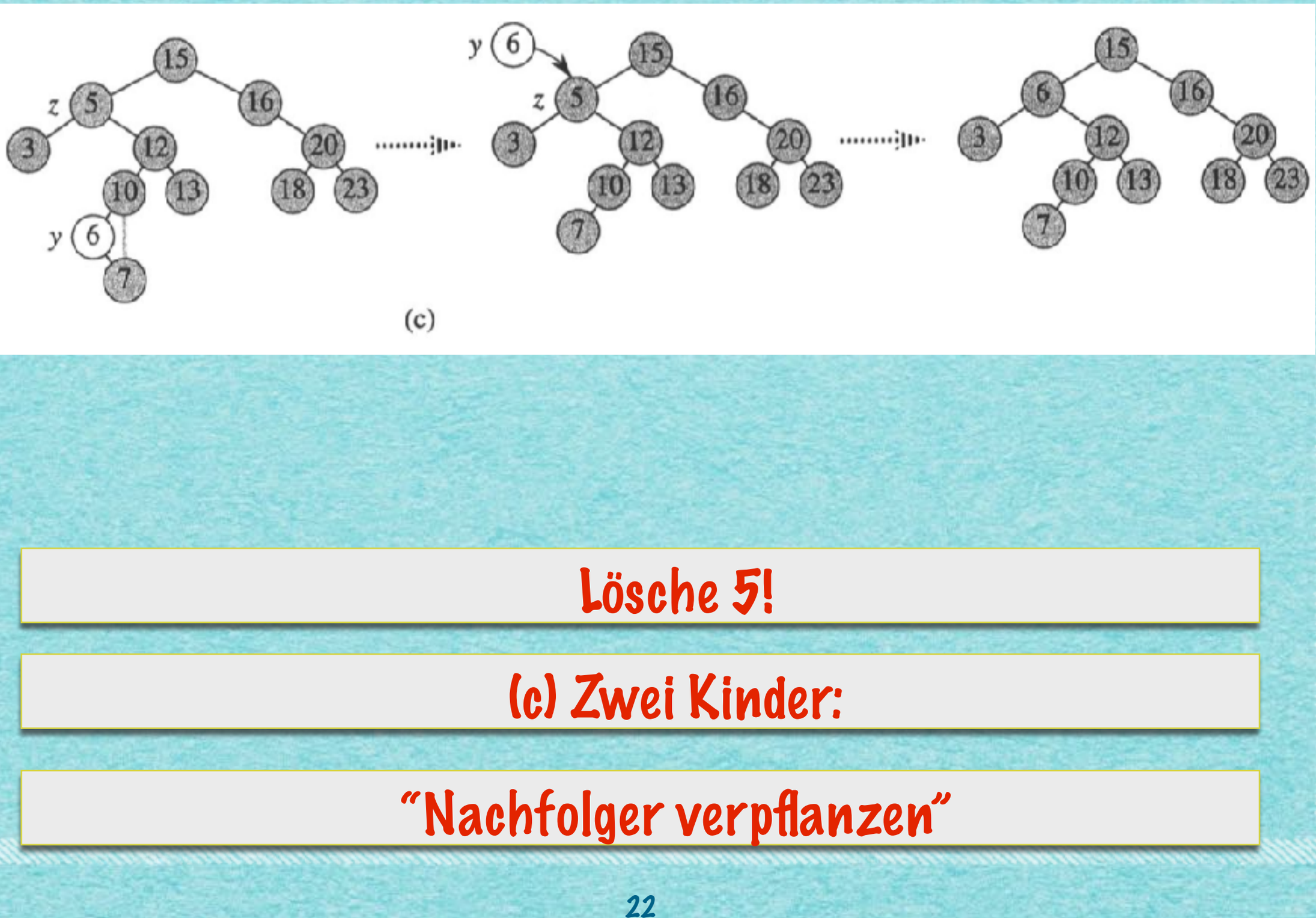
(c)

Lösche 5!

(c) Zwei Kinder:

"Nachfolger verpflanzen"

Löschen im Suchbaum



(c)

Lösche 5!

(c) Zwei Kinder:

"Nachfolger verpflanzen"

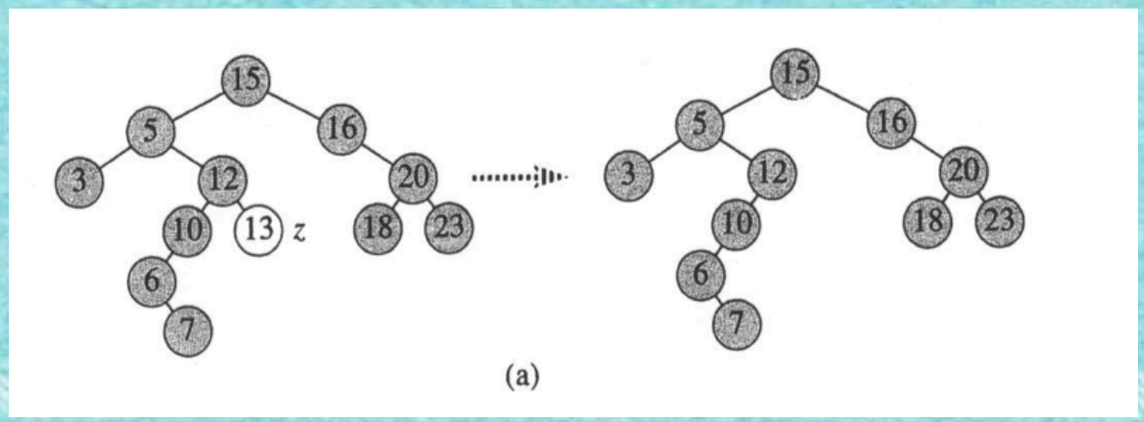
Löschen im Suchbaum

Löschen im Suchbaum

```
TREE-DELETE(T, z)
 1  if links[z] = NIL oder rechts[z] = NIL
 2      then y ← z
 3      else y ← TREE-SUCCESSOR(z)
 4  if links[y] ≠ NIL
 5      then x ← links[y]
 6      else x ← rechts[y]
 7  if x ≠ NIL
 8      then p[x] ← p[y]
 9  if p[y] = NIL
10      then wurzel[T] ← x
11      else if y = links[p[y]]
12              then links[p[y]] ← x
13              else rechts[p[y]] ← x
14  if y ≠ z
15      then schlüssel[z] ← schlüssel[y]
16           kopiere die Satellitendaten von y in z
17  return y
```

Löschen im Suchbaum

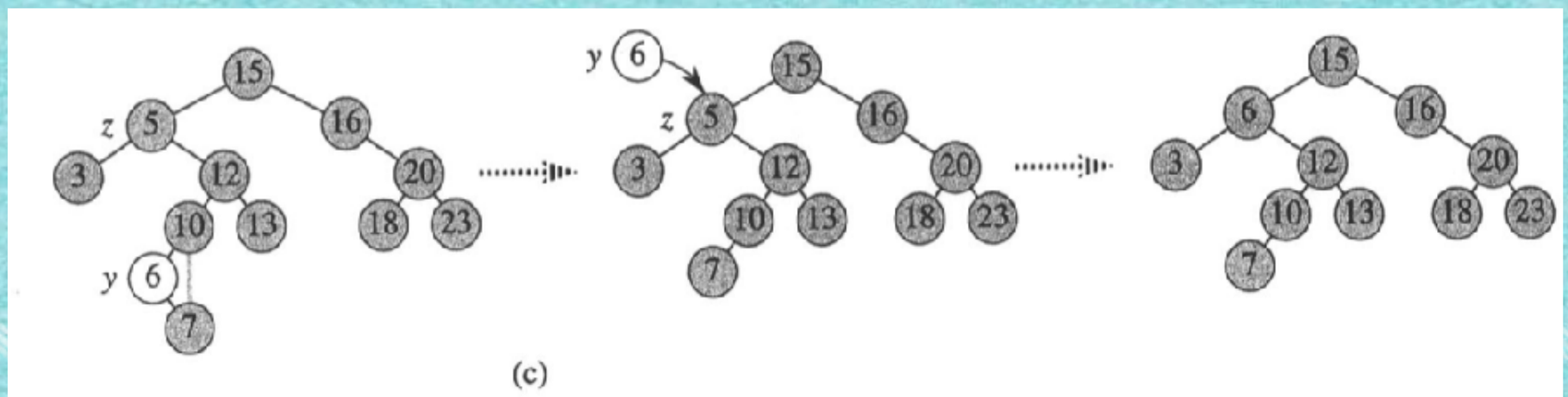
```
TREE-DELETE(T, z)
 1  if links[z] = NIL oder rechts[z] = NIL
 2      then y ← z
 3      else y ← TREE-SUCCESSOR(z)
 4  if links[y] ≠ NIL
 5      then x ← links[y]
 6      else x ← rechts[y]
 7  if x ≠ NIL
 8      then p[x] ← p[y]
 9  if p[y] = NIL
10      then wurzel[T] ← x
11      else if y = links[p[y]]
12              then links[p[y]] ← x
13              else rechts[p[y]] ← x
14  if y ≠ z
15      then schlüssel[z] ← schlüssel[y]
16           kopiere die Satellitendaten von y in z
17  return y
```



(a)

Löschen im Suchbaum

```
TREE-DELETE(T, z)
 1  if links[z] = NIL oder rechts[z] = NIL
 2      then y ← z
 3      else y ← TREE-SUCCESSOR(z)
 4  if links[y] ≠ NIL
 5      then x ← links[y]
 6      else x ← rechts[y]
 7  if x ≠ NIL
 8      then p[x] ← p[y]
 9  if p[y] = NIL
10      then wurzel[T] ← x
11      else if y = links[p[y]]
12              then links[p[y]] ← x
13              else rechts[p[y]] ← x
14  if y ≠ z
15      then schlüssel[z] ← schlüssel[y]
16           kopiere die Satellitendaten von y in z
17  return y
```



(c)

Löschen im Suchbaum

```
TREE-DELETE(T, z)
 1  if links[z] = NIL oder rechts[z] = NIL
 2      then y ← z
 3      else y ← TREE-SUCCESSOR(z)
 4  if links[y] ≠ NIL
 5      then x ← links[y]
 6      else x ← rechts[y]
 7  if x ≠ NIL
 8      then p[x] ← p[y]
 9  if p[y] = NIL
10      then wurzel[T] ← x
11      else if y = links[p[y]]
12              then links[p[y]] ← x
13              else rechts[p[y]] ← x
14  if y ≠ z
15      then schlüssel[z] ← schlüssel[y]
16           kopiere die Satellitendaten von y in z
17  return y
```

4.5 Binäre Suchbäume

Satz 4.6

Satz 4.6

Löschen benötigt O(h) für einen binären Suchbaum der Höhe h.

Satz 4.6
Löschen benötigt O(h) für einen binären Suchbaum der Höhe h.

Beweis:

Satz 4.6
Löschen benötigt O(h) für einen binären Suchbaum der Höhe h.

Beweis:
Klar, der Baum wird i.W. nur einmal durchlaufen!

4.5 Binäre Suchbäume

4.5 Binäre Suchbäume

Schnell:

4.5 Binäre Suchbäume

Schnell:

- ***O(log n): logarithmische Zeit***

4.5 Binäre Suchbäume

Schnell:

- ***O(log n): logarithmische Zeit***
- ***O(h): Tiefe des Baumes***

4.5 Binäre Suchbäume

Schnell:

- ***O(log n): logarithmische Zeit***
- ***O(h): Tiefe des Baumes***

4.5 Binäre Suchbäume

<u>Schnell:</u>

- ***O(log n): logarithmische Zeit***
- ***O(h): Tiefe des Baumes***

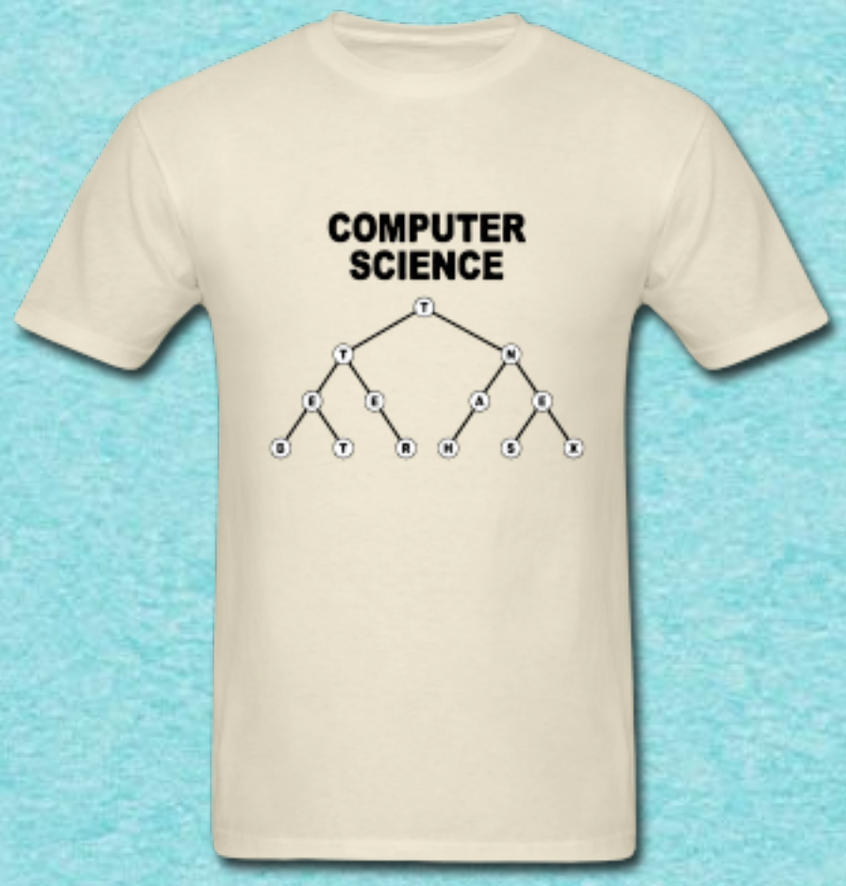
<u>Also: Wie können wir die Tiefe des Baumes auf O(log n) beschränken?</u>

Ab an die Tafel!

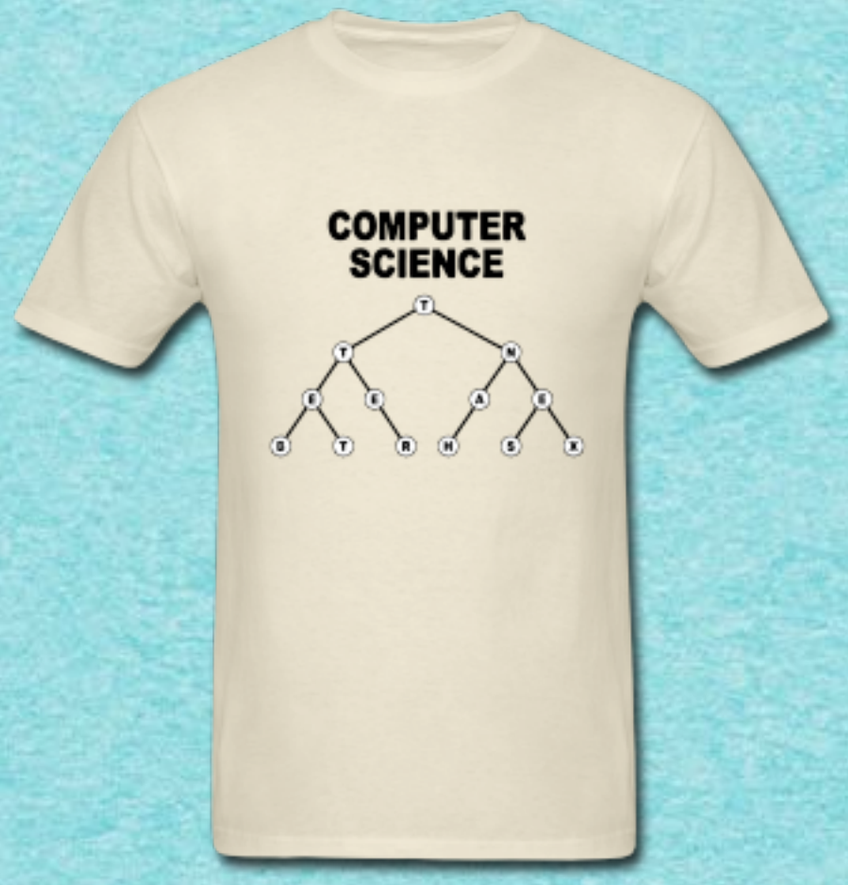
s.fekete@tu-bs.de

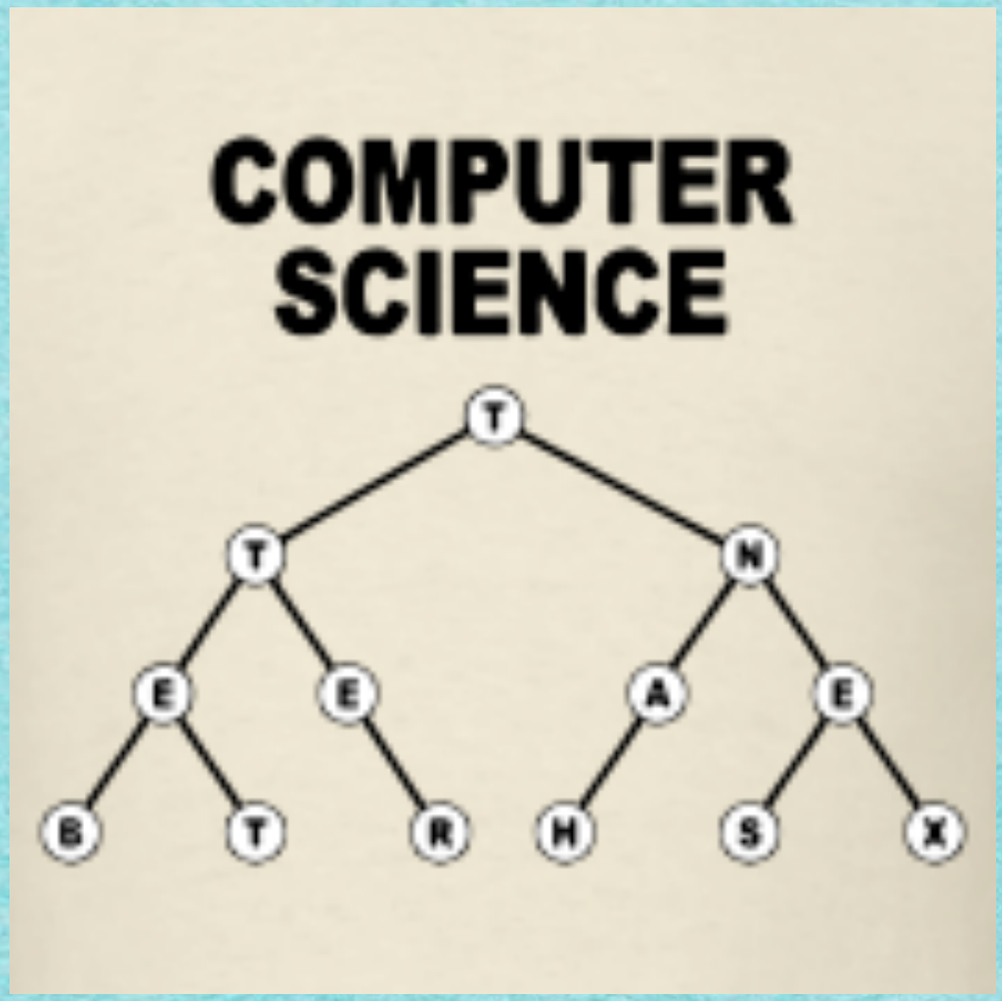
4.5 Binäre Suchbäume

4.5 Binäre Suchbäume



4.5 Binäre Suchbäume





Mehr demnächst!

s.fekete@tu-bs.de