

Bitte so markieren: ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ Bitte verwenden Sie einen Kugelschreiber oder nicht zu starken Filzstift. Dieser Fragebogen wird maschinell erfasst.  
Korrektur: ☐ ☒ ☐ ☒ ☐ Bitte beachten Sie im Interesse einer optimalen Datenerfassung die links gegebenen Hinweise beim Ausfüllen.

Bitte ausfüllen (Die Angabe des Namens ist freiwillig.):

Prüfungsteilnehmer-ID für den Prüfungsbogen Nr.: 0:

Vorname:

Nachname:

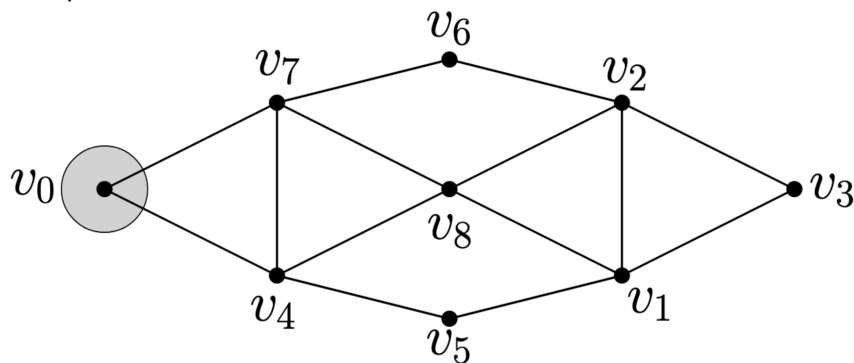
Für die eindeutige Zuordnung der Prüfung übertragen Sie bitte Ihre Prüfungsteilnehmer-ID gewissenhaft in die dafür vorgesehenen Felder. Alle Seiten sind vollständig individualisiert und nicht mit anderen Prüfungen tauschbar.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|--|

|   |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|---|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 0 | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 1 | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 2 | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 3 | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 4 | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 5 | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 6 | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 7 | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 8 | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 9 | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

## 1. Eulertouren (15 Punkte)

Betrachte folgenden Graphen.



Führe den Algorithmus von Fleury auf diesem Graphen aus, um eine Eulertour zu bestimmen. Starte bei dem markierten Knoten  $v_0$ . Kommen in einem Schritt mehrere **Knoten** infrage, wähle denjenigen mit dem kleinsten Index.

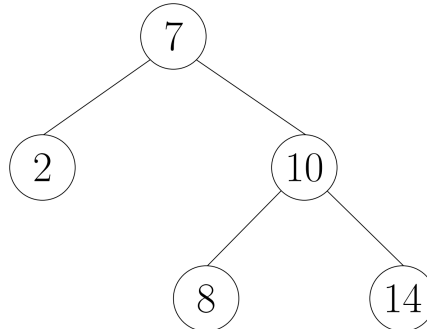
1.1 Gib die Indizes der Knoten in der abgelaufenen Reihenfolge an. (9 Punkte)

0, , , , , , , , ,

1.2 Begründe kurz, warum jeder Knotengrad im Graphen gerade sein muss, damit der Graph eine Eulertour besitzen kann. Nenne außerdem eine weitere notwendige Eigenschaft. (6 Punkte)

## 2. Datenstrukturen (10 Punkte)

Betrachte den folgenden AVL-Baum  $T_1$ . Führe die Operation  $\text{Insert}(T_1, 16)$  aus.



2.1 An welcher Stelle wird das neue Element (16) eingefügt? (1 Punkt)

☐ Links von der 2

☐ Rechts von der 2

☐ Links von der 8

☐ Rechts von der 8

☐ Rechts von der 14

☐ Links von der 14

2.2 Welcher ist der niedrigste unbalancierte Knoten vor der Restructure-Operation? (1 Punkt)

☐ 2

☐ 10

☐ 7

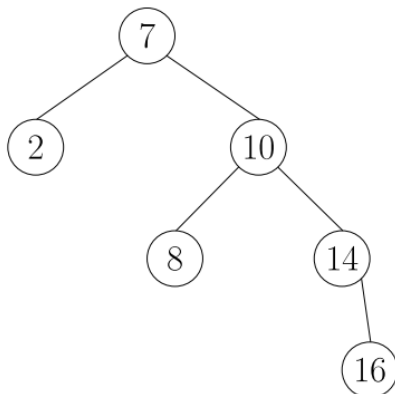
☐ 8

☐ 14

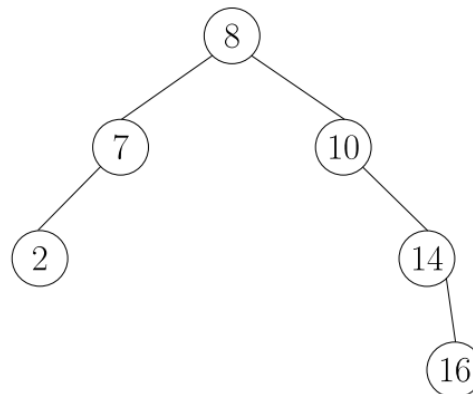
☐ Baum ist balanciert.

Führe nun solange Restructure-Operationen aus, sodass wieder ein AVL-Baum entsteht. Betrachte folgende Suchbäume.

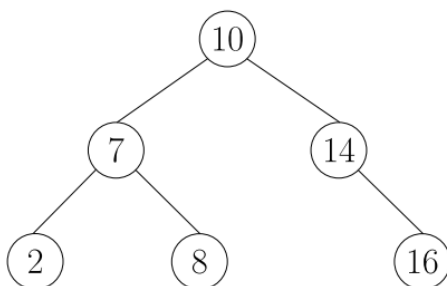
(A)



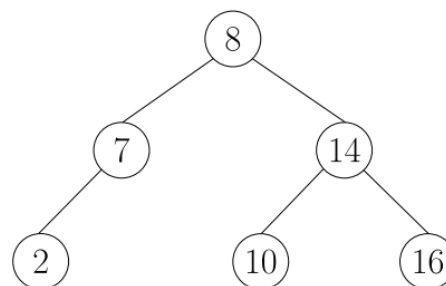
(B)



(C)



(D)



2.3 Welcher dieser Suchbäume ist das Resultat nach den Restructure-Operationen? (1 Punkt)

☐ (A)

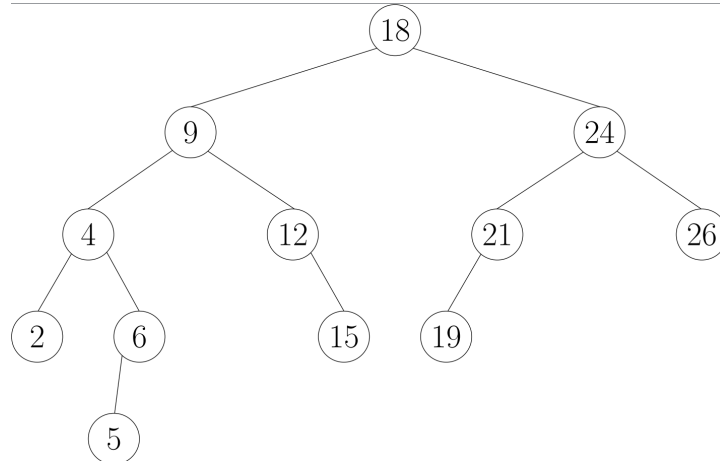
☐ (B)

☐ (C)

☐ (D)

## 2. Datenstrukturen (10 Punkte) [Fortsetzung]

Betrachte den folgenden AVL-Baum  $T_2$ . Führe die Operation  $Delete(T_2, 26)$  aus.



2.4 Welcher ist der niedrigste unbalancierte Knoten direkt nach der Löschoperation? (1 Punkt)

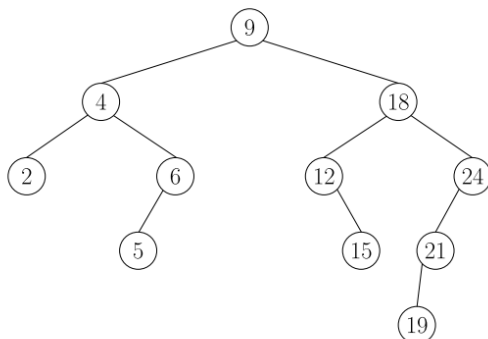
- ☐ 9
 ☐ 18
 ☐ 24  
☐ 26
 ☐ 4
 ☐ Baum ist balanciert.

2.5 Wie viele Restructure-Operationen sind notwendig, um den Suchbaum wieder zu balancieren? (1 Punkt)

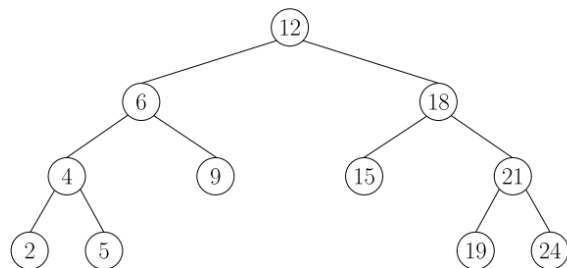
- ☐ 1
 ☐ 2
 ☐ 3  
☐ 0

Führe nun solange Restructure-Operationen aus, sodass wieder ein AVL-Baum entsteht. Betrachte folgende Suchbäume.

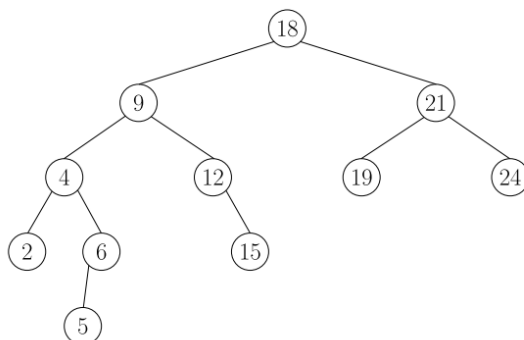
(A)



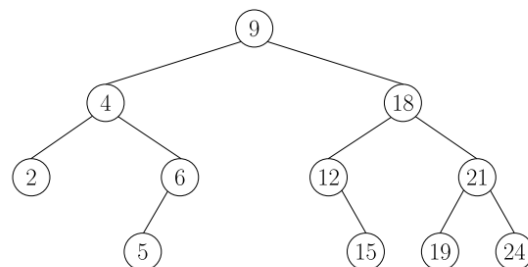
(B)



(C)



(D)



2.6 Welcher dieser Suchbäume ist das Resultat nach den Restructure-Operationen? (1 Punkt)

- ☐ (A)
 ☐ (B)
 ☐ (C)  
☐ (D)

## 2. Datenstrukturen (10 Punkte) [Fortsetzung]

2.7 Beschreibe kurz wie ein Knoten mit zwei Kindern aus einem binären Suchbaum gelöscht wird. **(3 Punkte)**

2.8 In welcher der folgenden Datenstrukturen kann das Element mit größtem Schlüssel am schnellsten bestimmt werden? **(1 Punkt)**

- ☐ Binärer Suchbaum
- ☐ Doppelt-verkettete Liste
- ☐ Max-Heaps
- ☐ Stapel
- ☐ Rot-Schwarz-Bäume

## 3. Asymptotisches Wachstum (14 Punkte)

Betrachte die folgende Funktion. (Je 1 Punkt)

$$f_1(n) := 2 \log n - 2n + n \log n$$

3.1 In welcher der folgenden Klassen liegt  $f_1$ ?  
(Mindestens eine Antwort ist korrekt.)

☐  $O(n)$ 
☐  $O(n \log n)$ 
☐  $O(n^2)$ 

3.2 In welcher der folgenden Klassen liegt  $f_1$ ?  
(Mindestens eine Antwort ist korrekt.)

☐  $\Omega(n)$ 
☐  $\Omega(n \log n)$ 
☐  $\Omega(n^2)$ 

Betrachte die folgende Funktion. (Je 1 Punkt)

$$f_2(n) := \frac{3n^2}{\log n}$$

3.3 In welcher der folgenden Klassen liegt  $f_2$ ?  
(Mindestens eine Antwort ist korrekt.)

☐  $O(n)$ 
☐  $O(n \log n)$ 
☐  $O(n^2)$ 

3.4 In welcher der folgenden Klassen liegt  $f_2$ ?  
(Mindestens eine Antwort ist korrekt.)

☐  $\Omega(n)$ 
☐  $\Omega(n \log n)$ 
☐  $\Omega(n^2)$ 

Betrachte die folgende Funktion. (Je 1 Punkt)

$$f_3(n) := 7n - 2^{20}$$

3.5 In welcher der folgenden Klassen liegt  $f_3$ ?  
(Mindestens eine Antwort ist korrekt.)

☐  $O(n)$ 
☐  $O(n \log n)$ 
☐  $O(n^2)$ 

3.6 In welcher der folgenden Klassen liegt  $f_3$ ?  
(Mindestens eine Antwort ist korrekt.)

☐  $\Omega(n)$ 
☐  $\Omega(n \log n)$ 
☐  $\Omega(n^2)$ 

Betrachte die folgende Funktion. (Je 1 Punkt)

$$f_4(n) := \frac{4n^3 + 7n - 4}{2n + 3}$$

3.7 In welcher der folgenden Klassen liegt  $f_4$ ?  
(Mindestens eine Antwort ist korrekt.)

☐  $O(n)$ 
☐  $O(n \log n)$ 
☐  $O(n^2)$ 

3.8 In welcher der folgenden Klassen liegt  $f_4$ ?  
(Mindestens eine Antwort ist korrekt.)

☐  $\Omega(n)$ 
☐  $\Omega(n \log n)$ 
☐  $\Omega(n^2)$

## 3. Asymptotisches Wachstum (14 Punkte) [Fortsetzung]

Im Folgenden betrachten wir nun Relationen zwischen den Klassen. Gib dazu in jeder Frage an, ob die Klasse A in B enthalten ist (aber nicht gleich), ob B in A enthalten ist (aber nicht gleich), ob die Klassen gleich sind ( $A = B$ ), oder ob keines davon zutrifft. **(Je 1 Punkt)**

3.9 Sei  $A = O(n)$  und  $B = \Theta(n^2)$ . Wie stehen A und B zueinander?

- ☐  $A = B$
- ☐ A Teilmenge von B
- ☐ B Teilmenge von A
- ☐ Keine der Antworten

3.10 Sei  $A = O(3^n)$  und  $B = O(2^n)$ . Wie stehen A und B zueinander?

- ☐  $A = B$
- ☐ A Teilmenge von B
- ☐ B Teilmenge von A
- ☐ Keine der Antworten

3.11 Sei  $A = O(n)$  und  $B = \Omega(1)$ . Wie stehen A und B zueinander?

- ☐  $A = B$
- ☐ A Teilmenge von B
- ☐ B Teilmenge von A
- ☐ Keine der Antworten

3.12 Sei  $A = O(4n^2 + 42^2)$  und  $B = O(n^*(n-42))$ . Wie stehen A und B zueinander?

- ☐  $A = B$
- ☐ A Teilmenge von B
- ☐ B Teilmenge von A
- ☐ Keine der Antworten

3.13 Sei  $A = O(n \log n)$  und  $B = \Theta(\log(n!))$ . Wie stehen A und B zueinander?

- ☐  $A = B$
- ☐ A Teilmenge von B
- ☐ B Teilmenge von A
- ☐ Keine der Antworten

3.14 Sei  $A = \Omega(n \log n)$  und  $B = \Omega(n)$ . Wie stehen A und B zueinander?

- ☐  $A = B$
- ☐ A Teilmenge von B
- ☐ B Teilmenge von A
- ☐ Keine der Antworten

## 4. Master-Theorem (9 Punkte)

A - Betrachte die folgende Rekursionsgleichung.

$$P(n) = 7 \cdot P\left(\frac{n}{2}\right) + 2 \cdot P\left(\frac{n}{4}\right) + n^3 + n^2 \log n$$

4.1 Gib die im Master-Theorem auftretenden Parameter an. (1 Punkt)

$m =$  ,  $k =$  ,  $\alpha_1 = \dots = \alpha_7 =$   / ,  $\alpha_8 = \alpha_9 =$   /

4.2 Die Summe der  $\alpha_i$  hoch  $k$  ist... (1 Punkt)

☐  $< 1$ 
☐  $= 1$ 
☐  $> 1$ 

4.3 Welches asymptotische Wachstum ergibt sich mit dem Master-Theorem für  $T(n)$ ? (1 Punkt)

☐  $\Theta(n^3)$ 
☐  $\Theta(n^3 \log n)$ 
☐  $\Theta(n^4)$ 

B - Betrachte die folgende Rekursionsgleichung.

$$Q(n) = 6 \cdot Q\left(\frac{2n}{7}\right) + Q\left(\frac{5n}{7}\right) + 3n^2 - n$$

4.4 Gib die im Master-Theorem auftretenden Parameter an. (1 Punkt)

$m =$  ,  $k =$  ,  $\alpha_1 = \dots = \alpha_6 =$   / ,  $\alpha_7 =$   /

4.5 Die Summe der  $\alpha_i$  hoch  $k$  ist... (1 Punkt)

☐  $< 1$ 
☐  $= 1$ 
☐  $> 1$ 

4.6 Welches asymptotische Wachstum ergibt sich mit dem Master-Theorem für  $T(n)$ ? (1 Punkt)

☐  $\Theta(n)$ 
☐  $\Theta(n^2 \log n)$ 
☐  $\Theta(n^2)$ 

C - Betrachte die folgende Rekursionsgleichung.

$$V(n) = 32 \cdot V\left(\frac{n}{2}\right) + n^4 - 3n^2$$

4.7 Gib die im Master-Theorem auftretenden Parameter an. (1 Punkt)

$m =$  ,  $k =$  ,  $\alpha_1 = \dots = \alpha_{32} =$   /

4.8 Die Summe der  $\alpha_i$  hoch  $k$  ist... (1 Punkt)

☐  $< 1$ 
☐  $= 1$ 
☐  $> 1$ 

4.9 Welches asymptotische Wachstum ergibt sich mit dem Master-Theorem für  $T(n)$ ? (1 Punkt)

☐  $\Theta(n^4)$ 
☐  $\Theta(n^5)$ 
☐  $\Theta(n^3)$

## 5. Sortieren (12 Punkte)

Betrachte das folgende Array A mit 8 Elementen.

$$A[1] = 1047$$

$$A[2] = 7806$$

$$A[3] = 0775$$

$$A[4] = 9439$$

$$A[5] = 6207$$

$$A[6] = 5821$$

$$A[7] = 4734$$

$$A[8] = 2566$$

Sortiere das Array A mit Hilfe von Radixsort. Notiere dabei das Array nach jedem Durchlauf von Countingsort.

5.1 Welche Position im Array besitzen die Elemente nach der **ersten** Iteration? (4 Punkte)

|      | 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        | 8                        |
|------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 9439 | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 1047 | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 4734 | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 0775 | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 5821 | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 2566 | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 6207 | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 7806 | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

5.2 Welche Position im Array besitzen die Elemente nach der **dritten** Iteration? (4 Punkte)

|      | 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        | 8                        |
|------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 4734 | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 9439 | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 7806 | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 0775 | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 2566 | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 1047 | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 5821 | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 6207 | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

5.3 Wie viele Iterationen müssen durchgeführt werden, bis das Array A sortiert ist? (1 Punkt)

- ☐ 1
 ☐ 2
 ☐ 3
 ☐ 4
 ☐ 5
 ☐ 6

5.4 Welche Eigenschaft muss der in Radixsort verwendete Sortieralgorithmus besitzen? Gib außerdem die Definition dieser Eigenschaft an. (2 Punkte)

5.5 Welche Laufzeit besitzt Radixsort für n Zahlen mit d Ziffern, welche k verschiedene Werte annehmen können? (1 Punkt)

- ☐  $O(n)$   
☐  $O(kn)$   
☐  $O(dn)$   
☐  $O(dk)$   
☐  $O(d(n+k))$



## 6. Mediane (9 Punkte)

6.1 Welche der folgenden Zahlen sind ein Median der Menge  $X = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$ ? (Mindestens eine Antwort ist korrekt.) (1 Punkt)

- ☐ 2  
☐ 7  
☐ 17

- ☐ 3  
☐ 11  
☐ 19

- ☐ 5  
☐ 13

Betrachte den aus der Vorlesung bekannten Algorithmus zum Finden eines Rang  $k$  Elements in einer Menge von  $n$  Elementen:  
1. Teile die  $n$  Elemente in 5er Gruppen auf und bestimme die Mediane dieser Gruppen.  
2. Suche den Median  $m$  dieser Mediane.  
3. Teile alle Elemente in drei Mengen auf: Elemente kleiner als  $m$ , gleich  $m$ , und größer als  $m$ .  
4. Wiederhole Vorgang auf der Menge, die das gesuchte Element enthält.

Betrachte nun den Algorithmus, wenn Dreiergruppen statt Fünfergruppen benutzt werden. (Je 1 Punkt)

6.2 Welche Laufzeit benötigt der Algorithmus für Schritte 1. und 3. für Dreiergruppen?

- ☐  $\Theta(1)$  ☐  $\Theta(\log n)$  ☐  $\Theta(n)$   
☐  $\Theta(n \log n)$

6.3 Welche Laufzeit benötigt der Algorithmus für Schritt 2. für Dreiergruppen?

- ☐  $T(n/2)$  ☐  $T(n/3)$  ☐  $T(n/4)$   
☐  $T(n/5)$

6.4 Welche Laufzeit benötigt der Algorithmus für Schritt 4. für Dreiergruppen?

- ☐  $T(n/3)$  ☐  $T(2n/3)$  ☐  $T(3n/4)$   
☐  $T(3n/5)$

6.5 Welche Laufzeit ergibt sich für den Algorithmus mit Dreiergruppen über das Mastertheorem?

- ☐  $\Theta(1)$  ☐  $\Theta(n)$  ☐  $\Theta(n \log n)$   
☐  $\Theta(n^2)$  ☐  $\Theta(n^3)$

Betrachte nun den Algorithmus, wenn Siebenergruppen statt Fünfergruppen benutzt werden. (Je 1 Punkt)

6.6 Welche Laufzeit benötigt der Algorithmus für Schritte 1. und 3. für Siebenergruppen?

- ☐  $\Theta(1)$  ☐  $\Theta(\log n)$  ☐  $\Theta(n)$   
☐  $\Theta(n \log n)$

6.7 Welche Laufzeit benötigt der Algorithmus für Schritt 2. für Siebenergruppen?

- ☐  $T(n/5)$  ☐  $T(n/6)$  ☐  $T(n/7)$   
☐  $T(n/8)$

6.8 Welche Laufzeit benötigt der Algorithmus für Schritt 4. für Siebenergruppen?

- ☐  $T(5n/7)$  ☐  $T(6n/7)$  ☐  $T(n/2)$   
☐  $T(3n/4)$

6.9 Welche Laufzeit ergibt sich für den Algorithmus für Siebenergruppen über das Mastertheorem?

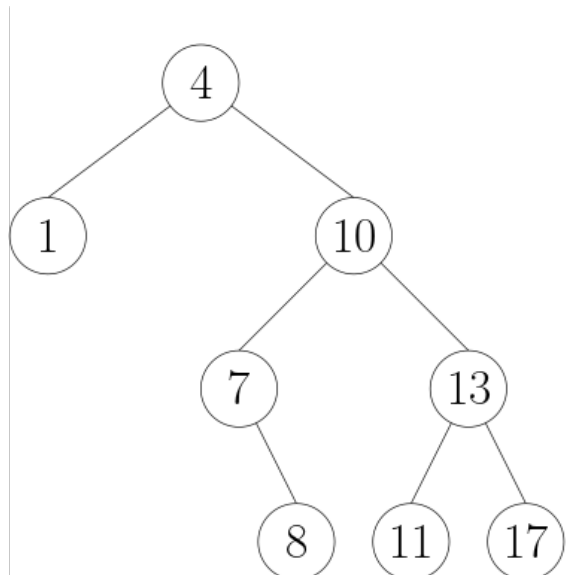
- ☐  $\Theta(1)$  ☐  $\Theta(n)$  ☐  $\Theta(n \log n)$   
☐  $\Theta(n^2)$  ☐  $\Theta(n^3)$

## 7. Algorithmenverständnis (9 Punkte)

Betrachte folgenden Algorithmus, welche als Eingabe einen Knoten eines binären Suchbaums bekommt.

```
function ALGORITHMUS(v)
    if v = NIL then
        return 0
    a := ALGORITHMUS(links[v])
    b := ALGORITHMUS(rechts[v])
    if a + b = 0 then
        return 1
    else
        return a + b
```

Betrachte dazu folgendenden binären Suchbaum T



Führe den Algorithmus auf die Wurzel von T aus. Notiere dabei für jeden Knoten den Rückgabewert.

7.1 Welchen Wert besitzt der Rückgabewert an den Knoten mit Schlüsseln 1, 4, 7 und 8? (2 Punkte)

1: , 4: , 7: , 8:

7.2 Welchen Wert besitzt der Rückgabewert an den Knoten mit Schlüsseln 10, 11, 13 und 17? (2 Punkte)

10: , 11: , 13: , 17:

## 7. Algorithmenverständnis (9 Punkte) [Fortsetzung]

- 7.3 Was bestimmt der angegebene Algorithmus und welche Laufzeit besitzt er? Begründe außerdem deine angegebene Laufzeit. **(5 Punkte)**

## 8. Algorithmenentwurf (10 Punkte)

Betrachte folgendes Problem.

Gegeben ist eine Menge  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  mit  $n$  paarweise verschiedenen Zahlen.

Diese Zahlen sollen nun so in Paare  $P_i = (a_i, b_i)$  aufgeteilt werden, sodass jedes Element in genau einem Paar vorkommt und  $a_i + b_i = a_j + b_j$  für je zwei Paare  $P_i$  und  $P_j$  gilt (d.h., jedes Paar besitzt die gleiche Summe).

- 8.1 Betrachte die Menge  $\{1, 3, 2, 6, 4, 8, 9, 7\}$ .  
Teile diese Zahlen in Paare mit der obigen Eigenschaft. **(2 Punkte)**

- 8.2 Beschreibe wie das Problem im Allgemeinen in Zeit  $O(n \log n)$  gelöst werden kann. Begründe außerdem die Korrektheit und die Laufzeit deines Algorithmus. Es ist kein Pseudocode erforderlich.  
(Hinweis: Es darf angenommen werden, dass nur Instanzen übergeben werden, für die diese Aufteilung existiert.) **(8 Punkte)**

## 9. Kurzfragen (12 Punkte)

Betrachte folgende Kurzfragen. In jeder Teilaufgabe ist mindestens eine Antwort korrekt. **(Je 2 Punkte)**

9.1 Welche der folgenden Eigenschaften erfüllt ein Graph, der einen Eulerweg enthält, auf jeden Fall?

- ☐ Er besitzt maximal zwei Knoten ungeraden Grades.
- ☐ Er besitzt mindestens einen Kreis.
- ☐ Er besitzt einen Hamiltonpfad.

9.2 In jedem binären Suchbaum mit Höhe  $h$ ...

- ☐ ... benötigen Einfügeoperationen  $O(h)$  Zeit.
- ☐ ... gibt es  $h$  Blätter.
- ☐ ... hat jeder Knoten maximal zwei Kinder.

9.3 Welche Operationen lassen sich in  $O(1)$  Zeit durchführen?

- ☐ Löschen eines identifizierten Elements aus einer einfach verketteten Liste.
- ☐ Einfügen eines Elements in einen AVL-Baum.
- ☐ Hinzufügen eines Elements auf einen Stack.

9.4 Welche Aussagen zu Quicksort sind korrekt?

- ☐ Quicksort ist ein vergleichsbasiertes Sortierverfahren.
- ☐ Quicksort besitzt eine Laufzeit von  $O(n^2)$ .
- ☐ Quicksort nutzt das Prinzip "Teile und Herrsche".

9.5 Die Codierungsgröße einer Adjazenzmatrix eines Graphen mit  $n$  Knoten und  $m$  Kanten ist immer...

- ☐  $O(m \log n)$
- ☐  $O(n^2)$
- ☐  $O(n+m)$

9.6 Welche Aussagen zu Breitensuche sind korrekt?

- ☐ Breitensuche nutzt als Datenstruktur einen Stapel.
- ☐ Breitensuche besitzt eine Laufzeit von  $O(n+m)$ .
- ☐ Mit Breitensuche können Distanzen zwischen Knoten bestimmt werden.