Algorithmen und Datenstrukturen
Prof. Dr. Sándor P. Fekete
Matthias Konitzny
Dr. Arne Schmidt

Winter 2021/22
Abgabe: 20.12.2021
Rückgabe: ab 17.01.2022

Hausaufgabenblatt 3

Abgabe der Lösungen muss bis zum 20.12.2021 um 11:00 Uhr erfolgen. Lösungen müssen per Mail mit einer pdf-Datei (Name der Datei „`blatt_[nr]_[name]_[matrikel].pdf`") an den jeweiligen Tutor geschickt werden. Email-Adressen sind unter `https://www.ibr.cs.tu-bs.de/alg/index.html` zu finden.

> *<u>Beachte:</u> Bei der Bearbeitung der Hausaufgaben gelten folgenden Richtlinien:*
> `https://www.ibr.cs.tu-bs.de/alg/Merkzettel/homework-booklet.pdf`

Hausaufgabe 1 (Durchmesser von Graphen): (3+4+4 Punkte)
Distanzen spielen in der Graphentheorie eine sehr große Rolle. In dieser Aufgabe wollen wir einen Algorithmus entwerfen, der den *Durchmesser* eines Graphen bestimmt, d.h. die maximale kürzeste Distanz zwischen zwei Knoten. Dazu definieren wir folgendes.

- Die *Distanz* $\mathrm{dist}(v, w)$ zwischen zwei Knoten $v, w \in V$ in einem Graphen G ist die Anzahl an Kanten auf einem kürzesten Weg zwischen v und w in G. Gibt es keinen Weg zwischen v und w, so ist $\mathrm{dist}(v, w) = \infty$.
- Die *Exzentrizität* $\mathrm{ex}(v)$ eines Knotens $v \in V$ bezeichnet die Länge eines kürzesten Pfades zu dem am weitesten entfernten Knoten, d.h. $\mathrm{ex}(v) := \max_{w\in V}(\mathrm{dist}(v, w))$.
- Der *Durchmesser* eines Graphen G entspricht dem Maximum über die Exzentrizitäten, d.h. $\mathrm{diam}(G) := max_{v\in V}(\mathrm{ex}(v))$.

a) Betrachte den in Abbildung 1 abgebildeten Graphen H. Gib folgende Punkte an:

   (i) $\mathrm{ex}(v_1)$ und $\mathrm{ex}(v_2)$.

   (ii) $\mathrm{diam}(H)$

   (iii) Menge $V' \subseteq V$ an Knoten, sodass $\mathrm{ex}(w) = \mathrm{diam}(H)$ für jeden Knoten $w \in V'$ gilt.

b) Aus der Vorlesung ist Algorithmus 3.17 bekannt (siehe Vorlesung vom 08.12.21), der jedem Knoten $w \in V$ die kürzeste Distanz zu einem Knoten $v \in V$ bestimmt.

   Entwirf einen Algorithmus EXZENTRIZITÄT in Pseudocode (maximal 10 Zeilen[1]) mit Laufzeit $O(n + m)$, der für einen gegebenen Graphen G und Knoten $v \in V$ den Wert $\mathrm{ex}(v)$ bestimmt. Begründe kurz, warum die Laufzeit eingehalten wird.

c) Entwirf einen Algorithmus DURCHMESSER in Pseudocode (maximal 10 Zeilen[1]) mit Laufzeit $O(n^2 + nm)$, der für einen gegebenen Graphen G den Wert $\mathrm{diam}(G)$ bestimmt. Begründe kurz, warum die Laufzeit eingehalten wird.

(Hinweis: Ein Korrektheitsbeweis für die Algorithmen ist nicht erforderlich.)

[1] end while, end if, etc. werden dabei nicht mitgezählt.

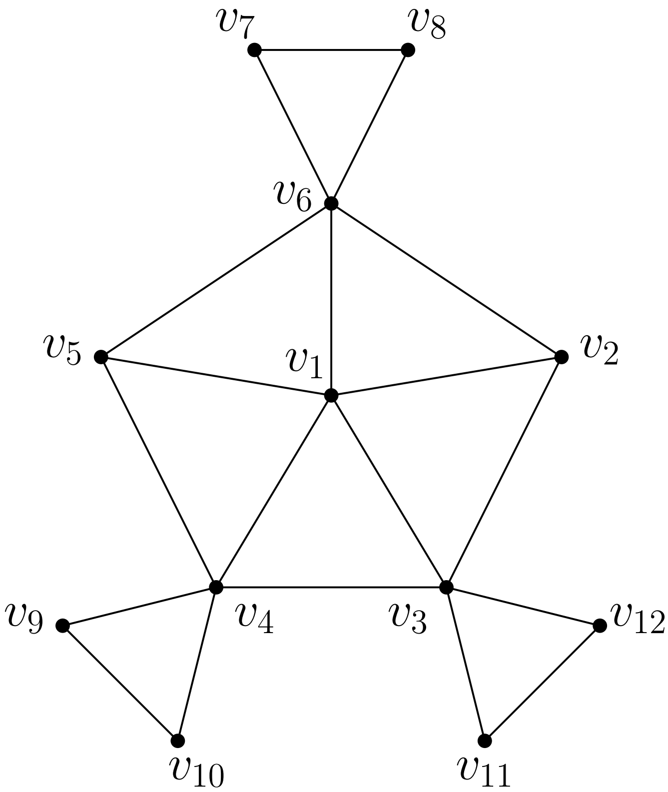

Abbildung 1: Darstellung des Graphen H.

Hausaufgabe 2 (Asymptotisches Wachstum): (4+5 Punkte)

a) In welcher Beziehung stehen die folgenden Klassen zueinander? Schreibe $\subsetneq$ in das Feld, wenn Klasse A in Klasse B enthalten ist (aber $A \neq B$), $\supsetneq$, wenn Klasse B in Klasse A enthalten ist (aber $A \neq B$), $=$, wenn die Klassen A und B übereinstimmen und $\times$, wenn dies alles nicht zutrifft. Eine Begründung ist nicht notwendig.

A	**Relation**	**B**
$O(n^2)$		$\Theta(n \log n)$
$\Theta(n^2 - n)$		$\Theta(n^2)$
$\Omega(\frac{n}{\log n})$		$\Omega(n)$
$O(n^3)$		$\Omega(n^2)$

b) Betrachte die Funktionen $f, g, h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.
Zeige oder widerlege:

$$f(n) \in \Theta(g(n)) \wedge g(n) \in O(h(n)) \Rightarrow f(n) \in \Theta(h(n))$$