Abteilung Algorithmik **Winter 2020/21**
Institut für Betriebssysteme und Rechnerverbund
TU Braunschweig

Dr. Linda Kleist
Phillip Keldenich
Dominik Krupke

Mathematische Methoden der Algorithmik
Übungsblatt 1 vom 28. Oktober 2020

Die Abgabe eurer Lösungen zu diesem Blatt muss bis zum 4. November 2020 um 16:00 Uhr per E-Mail an `sven.langner@tu-bs.de` erfolgen. Am besten gebt ihr eure Lösung als einzelnes PDF-Dokument (LaTeX, Word oder Scan) ab. Ihr könnt auch handschriftliche Lösungen scannen oder abfotografieren; nach Möglichkeit fasst ihr auch in diesem Fall am besten die einzelnen Seiten zu einem PDF-Dokument zusammen. Achtet dabei bitte einerseits auf Lesbarkeit und andererseits auf eine vernünftige Dateigröße (höchstens etwa 2 MB/Seite). Vermeidet bitte auch das Versenden von ZIP-Archiven, da es hier möglicherweise zu Problemen mit dem Virenscanner auf dem Mailserver der TU kommen kann.

Bitte beachtet, dass ihr für dieses erste Übungsblatt nur eine Woche Bearbeitungszeit habt und es nur 30 statt 60 Punkten gibt.

> **WICHTIG:** Zur Bescheinigung der Studienleistung müssen am Ende des Semesters mindestens 50% der Hausaufgabenpunkte erreicht worden sein.

Aufgabe 1 (Graphische Darstellung von LPs): Gegeben seien die folgenden linearen Ungleichungen:

$$
\begin{aligned}
2x_2 &\geq -x_1 + 3 && (1)\\
x_1 + 2x_2 - 4 &\geq 0 && (2)\\
x_1 &\leq 6 + x_2 && (3)\\
-x_2 &\geq -x_1 - 3 && (4)\\
-4x_1 + 24 &\geq -x_2 && (5)\\
x_1 + x_2 &\leq 11 && (6)\\
x_1 &\geq 1 && (7)\\
x_1 &\leq 8 && (8)\\
x_2 &\geq 0 && (9)\\
x_2 &\leq 8 && (10)
\end{aligned}
$$

(a) Gib die Matrixdarstellung $Ax \leq b$ der linearen Ungleichungen an.

(b) Skizziere die Menge der zulässigen Lösungen in einem geeigneten Koordinatensystem.

(c) Betrachte die folgenden Optimierungsprobleme:

(i) $\min x_1 + x_2$

(ii) $\min x_1$

(iii) $\max x_2$

(iv) $\max 5x_2 + x_1$

Bestimme (mit Hilfe der Skizze) die relevanten Ungleichungen für das jeweilige Optimum und berechne anhand der relevanten Ungleichungen die jeweils optimalen Lösungen. Wenn ein Problem mehrere Lösungen hat, erläutere kurz wieviele Lösungen existieren und warum.

Optional: Im Verlaufe des Semesters werden wir den Simplex-Algorithmus kennen und verstehen lernen, der solche Probleme auch für viele Variablen in der Praxis effizient lösen kann. Du kannst deine Lösung optional mit einem solchen Algorithmus etwa auf der Seite `http://hgourvest.github.io/glpk.js/` überprüfen. Die Syntax hierfür ist beispielsweise wie folgt:

```
Minimize
x1 + x2

Subject To
2 x1 + 1 x2 >= 1
3 x1 - 2 x2 <= 3

End
```

Konstanten dürfen nur auf der rechten Seite stehen und Variablen nur auf der linken, daher musst du obige Ungleichungen eventuell umformen.

(d) Im Laufe der Vorlesung werden wir es primär mit hochdimensionalen Räumen zu tun haben. Die 2- oder 3-dimensionale geometrische Darstellung kann in vielen Fällen das Verständnis erleichtern. Hierbei sollte man jedoch im Hinterkopf behalten, dass sich manche Dinge in höherdimensionalen Räumen unintuitiv sind und insbesondere die mit der Dimension steigende Komplexität leicht übersehen wird. Für diesen Zweck wollen wir einen n-dimensionalen Würfel mit Seitenlänge 1 betrachten.

Wie viele $(n-1)$-dimensionale Flächen hat ein n-dimensionaler Würfel? Welche Ungleichungen braucht man, um den Inhalt des Würfels zu begrenzen? Wie viele Ecken hat ein n-dimensionaler Würfel?

(3+5+8+4 Punkte)

Aufgabe 2 (Lineare Unabhängigkeit):

a) Skizziere die folgenden Mengen A, B, C von Vektoren im $\mathbb{R}^2$ und bestimme die davon aufgespannten Unterräume.

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

b) Welche der folgenden Mengen von Vektoren sind linear unabhängig? Begründe deine Antwort.

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} \right\},$$
$$\left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix} \right\},$$
$$\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} \right\},$$
$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(3+7 Punkte)