Schnelldurchlauf!

Algorithmen und Datenstrukturen
WS 2020/21

Prof. Dr. Sándor Fekete

Algorithmen

Datenstrukturen

Ordentlich,
hält Regeln ein

Locker drauf,
zielorientiert

Algorithmen

Datenstrukturen

I get the job done. What the hell do you want?

Can you make it without killing yourself?

I don‘t make things difficult. That‘s the way they get, all by themselves.

I don‘t want to work with you.

Ain‘t got no choice.

Then don‘t.

I‘m getting too old for this…

1 Einführung: Algorithmen

Algorithmen und Datenstrukturen
WS 2020/21

Prof. Dr. Sándor Fekete

1.1 Was ist ein Algorithmus?

"Ein **Algorithmus** ist eine aus endlich vielen Schritten bestehende eindeutige Handlungsvorschrift zur Lösung eines Problems oder einer Klasse von Problemen."

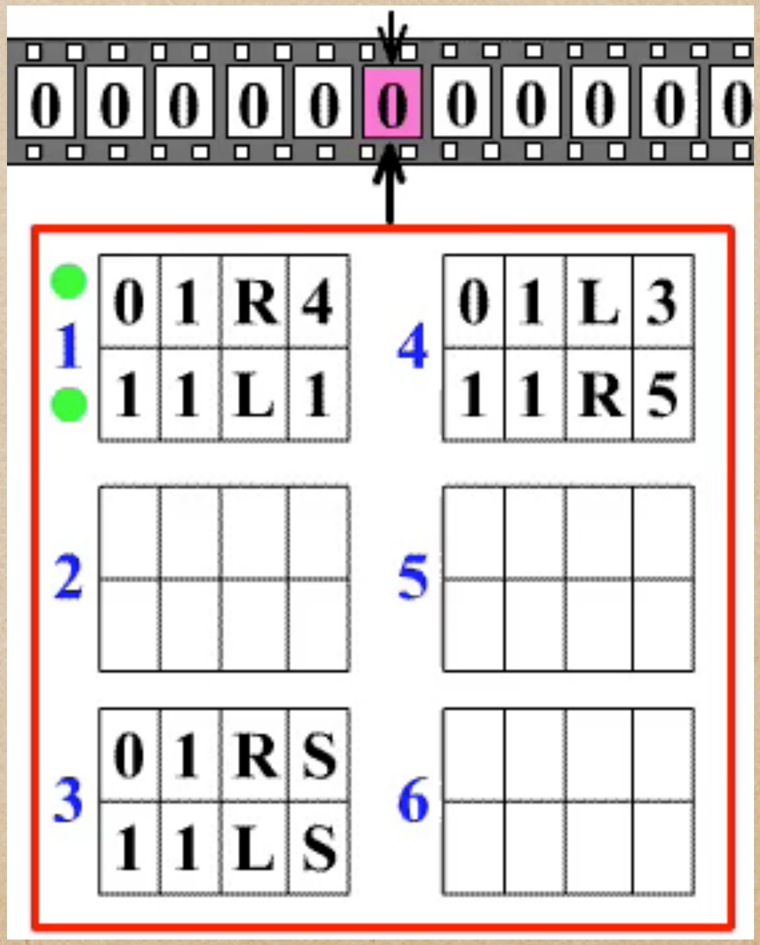
Beispiele:

- Kochrezept
- Bedienungsanleitung
- Notenblatt
- Programmablaufplan

Kein Computer ohne Algorithmen!
Keine Informatik ohne Algorithmen!
Kein Informatikstudium ohne Algorithmen!

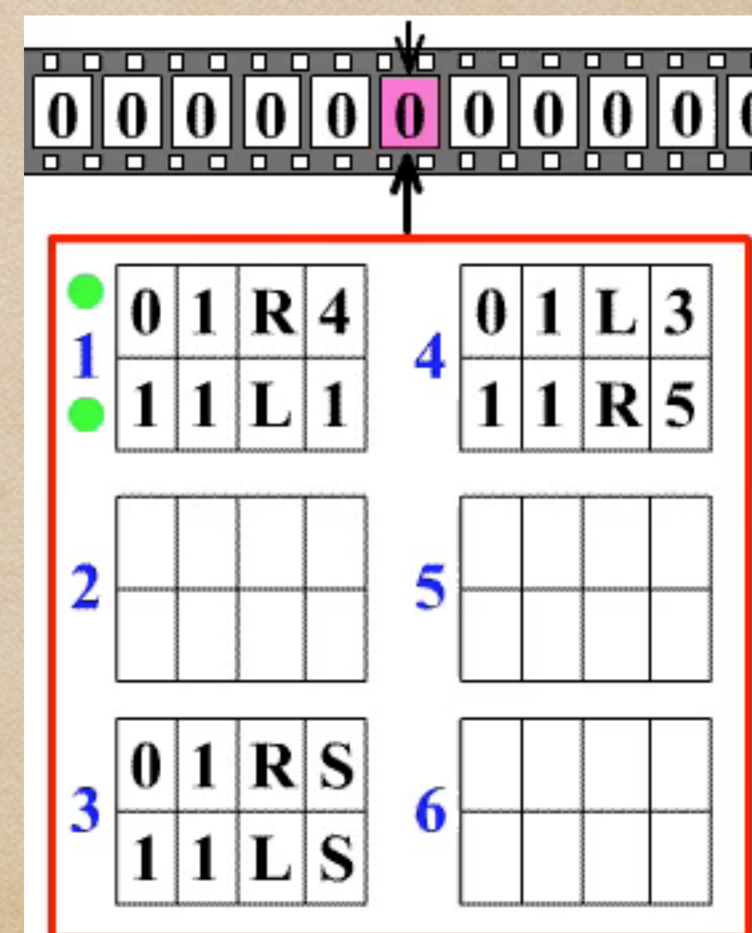
1.2 Wie formalisiert man einen Algorithmus?

Idee: Abstrakte Formalisierung beliebiger Berechnungen!



1.2 Wie formalisiert man einen Algorithmus?

Idee: Abstrakte Formalisierung beliebiger Berechnungen!



1.3 Eigenschaften von Algorithmen

1. Das Verfahren muss in einem endlichen Text eindeutig beschreibbar sein (Finitheit).
2. Jeder Schritt des Verfahrens muss tatsächlich ausführbar sein (Ausführbarkeit).
3. Das Verfahren darf zu jedem Zeitpunkt nur endlich viel Speicherplatz benötigen (Dynamische Finitheit, siehe Platzkomplexität).
4. Das Verfahren darf nur endlich viele Schritte benötigen (Terminierung, siehe auch Zeitkomplexität).

1.4 Datenstrukturen

Eine Datenstruktur erlaubt es, die für eine Aufgabe notwendigen Informationen

- geeignet zu repräsentieren
- den Zugriff und die Verwaltung während der Bearbeitung in effizienter Weise zu ermöglichen.

Mehr Einzelheiten werden uns ab dem dritten Kapitel begegnen!

XLII + XCVIII = CXL

42 + 98 = 140!

1.5 Ausblick

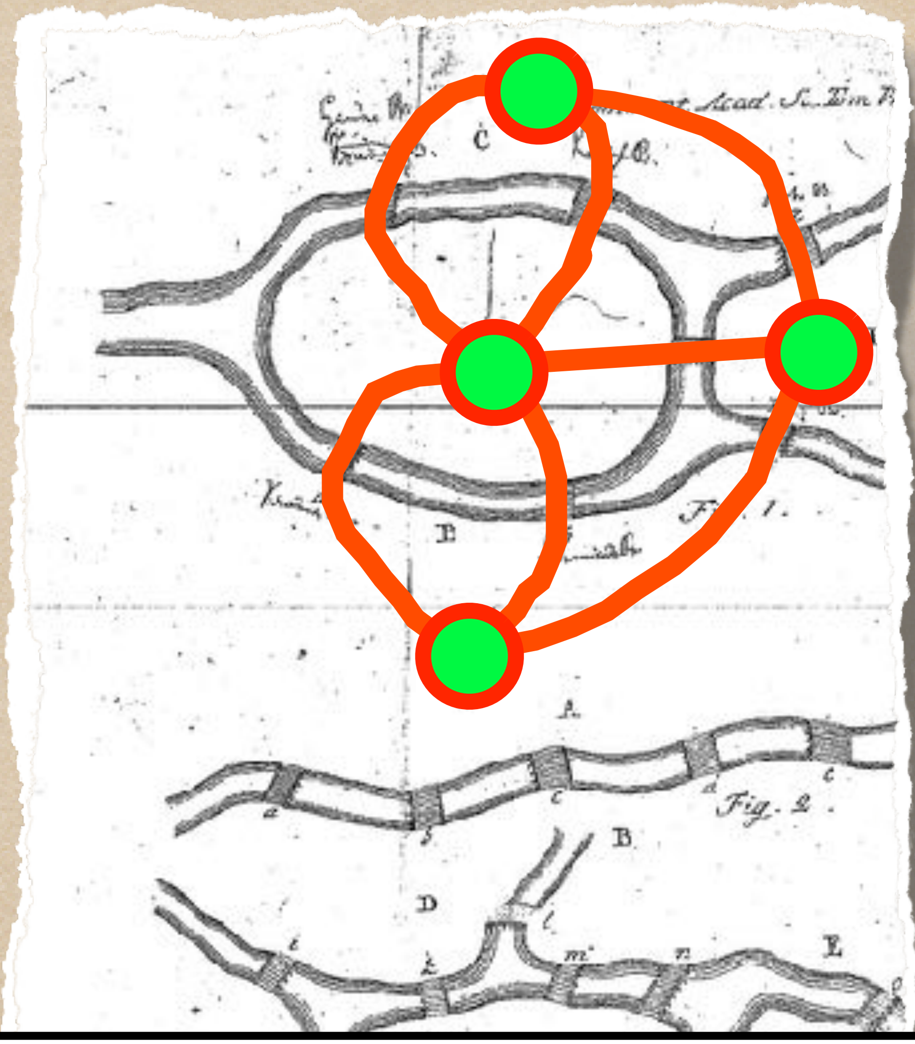
Wir werden uns in dieser Vorlesung mit verschiedenen Aspekten von Algorithmen beschäftigen. Dazu gehören oft auch Analyse und Verständnis der zugrundeliegenden mathematischen Strukture. Gerade letzteres macht oft den eigentlichen Witz aus!

Kapitel 2: Graphen

Algorithmen und Datenstrukturen
WS 2020/21

Prof. Dr. Sándor Fekete

2.1 Historie

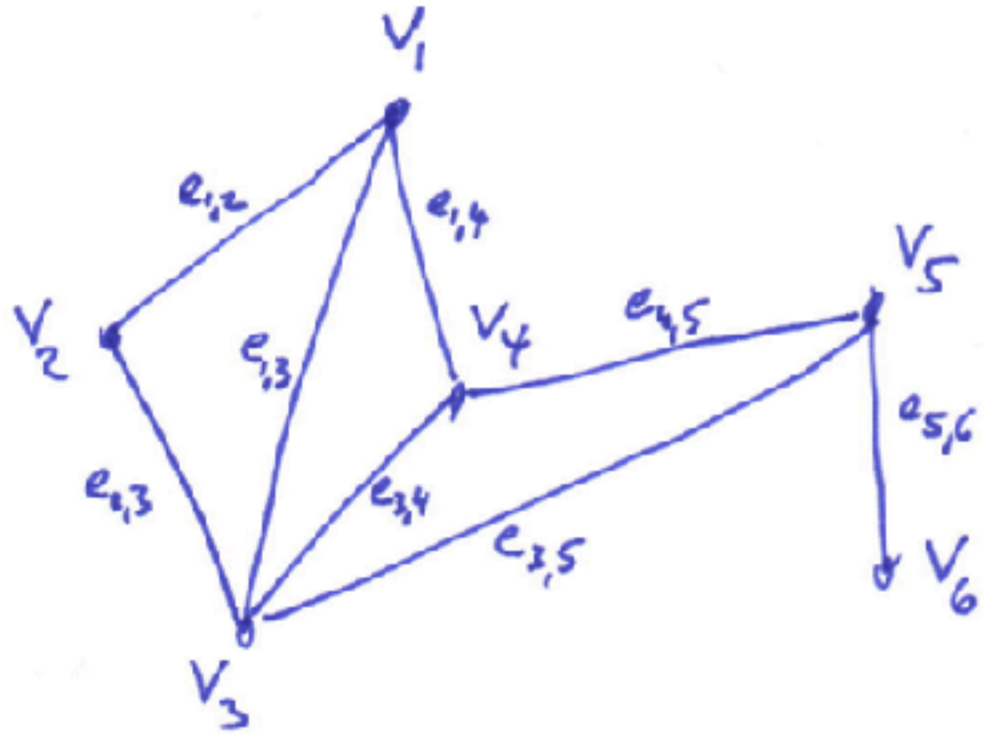


- Alle Knoten sind ungerade?!
- Man müsste an allen anfangen oder aufhören!
- Das geht nicht an einem Stück!

Euler: (1) Das gilt für jede beliebige Instanz: Mit mehr als zwei ungeraden Knoten gibt es keinen solchen Weg.

(2) Man kann auch charakterisieren, unter welchen Bedingungen es einen Weg tatsächlich gibt.

2.2 Formale Graphenbegriffe



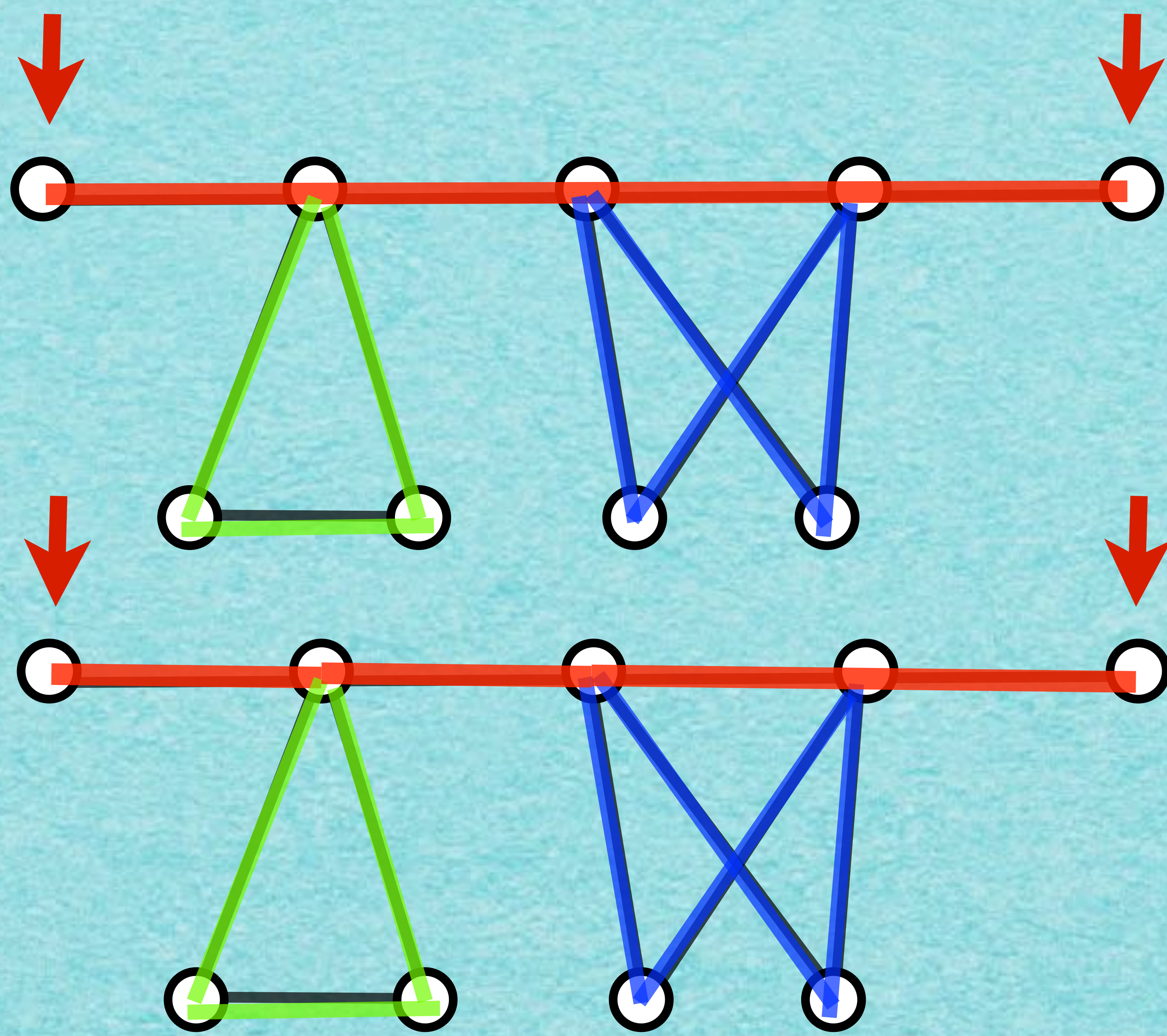
Knoten: $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$

Kanten: $e_{1,2}, e_{1,3}, e_{1,4}$
$e_{2,3}, e_{3,4}, e_{3,5}$
$e_{4,5}, e_{5,6}$

Bezeichnungen: Knotenmenge V ("vertices")
Kantenmenge E ("edges")

Schreibweise: $G = (V, E)$

Wegebau



Algorithmus 2.8

Algorithmus von Hierholzer

INPUT:	Ein zusammenhängender Graph G mit höchstens zwei ungeraden Knoten
OUTPUT:	Ein Eulerweg bzw. eine Eulertour in G

A. Wähle einen Startknoten v (ungerade falls vorhanden);

B. Verwende Algorithmus 2.7, um einen Weg W von v aus zu bestimmen;

C. Solange es noch unbenutzte Kanten gibt:

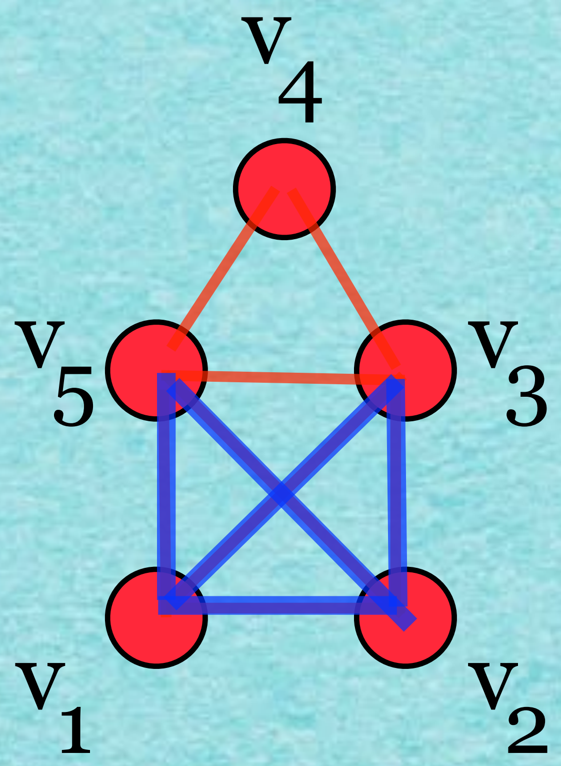
   C.1. Wähle einen von W besuchten Knoten w mit positivem Grad im Restgraphen;

   C.2. Verwende Algorithmus 2.7, um einen Weg W′ von w aus zu bestimmen;

   C.3. Verschmelze W und W′

D. STOP

Es geht auch anders!



Wir hinterlassen Kanten?!

Algorithmus 2.13

Algorithmus von Fleury

INPUT:	Graph G mit höchstens zwei ungeraden Knoten
OUTPUT:	Ein Weg in G.

1. Starte in einem Knoten v_0 (ungerade, sonst beliebig);
2. Solange es eine zum gegenwärtigen Knoten v_i inzidente unbenutzte Kante $\{v_i, v_j\}$ gibt:

   2.1. Wähle eine dieser Kanten aus, $e_i = \{v_i, v_j\}$ der den Restgraphen zshgd. lässt

   2.2. Laufe zum Nachbarknoten v_j

   2.3. Lösche die Kante aus der Liste der unbenutzten Kanten.

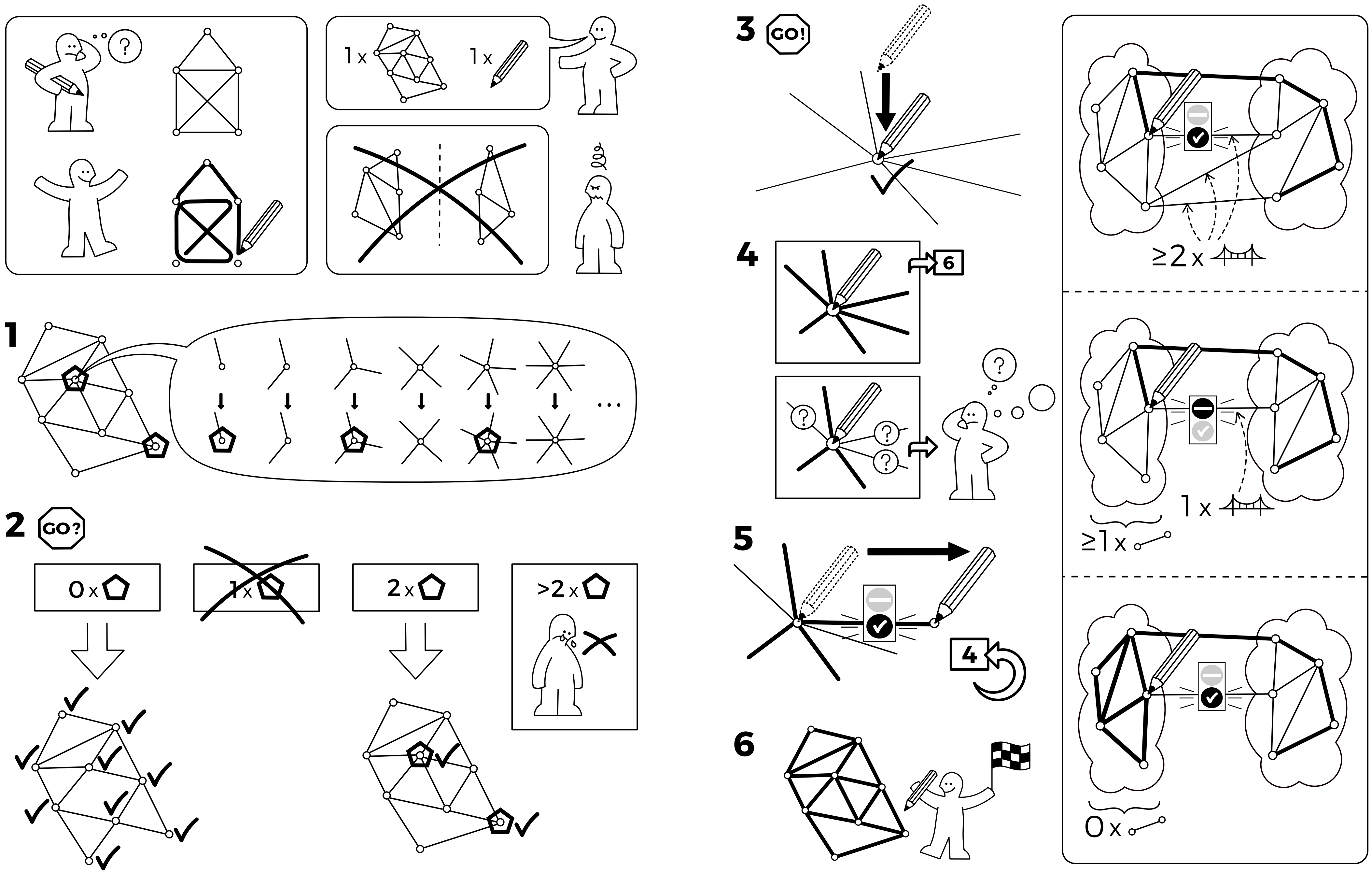
   2.4.Setze $v_{i+1} := v_j$

   2.5.Setze $i := i+1$

3. STOP

ONE STRÖKE DRÅW

idea-instructions.com/euler-path/



Zusammenfassung Kapitel 2!

Kapitel 3: Suche in Graphen

Algorithmen und Datenstrukturen
WS 2020/21

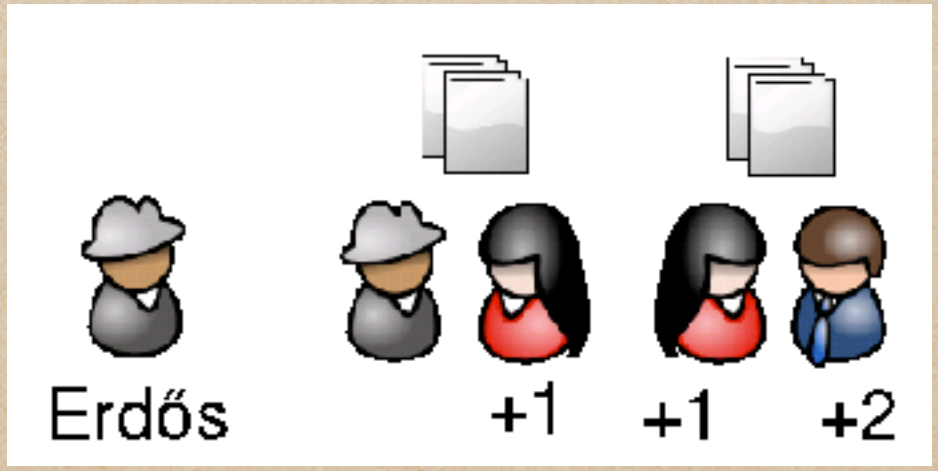
Prof. Dr. Sándor Fekete

3.1 Vorspann

Paul Erdös, 1913-1996

- *Produktivster Mathematiker aller Zeiten (~1500 Artikel)*
- *"Zweitbedeutendster Mathematiker nach Euler"*

Erdös-Zahl



3.2 Problemdefinitionen:

PROBLEM 3.1 (s-t-Weg)

Gegeben: Graph $G=(V,E)$, Startknoten s, Zielknoten t
Gesucht: Weg von s nach t, falls einer existiert

Allgemeiner:

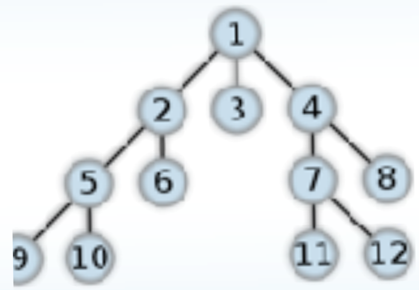
PROBLEM 3.2 (Zusammenhangskomponente)

Gegeben: Graph $G=(V,E)$, Startknoten s
Gesucht: Menge aller von s erreichbaren Knoten (→ „Zusammenhangskomponente" von s)
Wege, die die Erreichbarkeit sichern

Beobachtung:

SATZ 3.3

Wenn ein Weg zwischen zwei Knoten s und t in einem Graphen existiert, dann existiert auch ein Pfad.



Kapitel 3.3: Zusammenhangskomponenten

Algorithmen und Datenstrukturen
WS 2020/21

Prof. Dr. Sándor Fekete

Algorithmus 3.7

<u>INPUT:</u> Graph G = (V,E), Knoten s

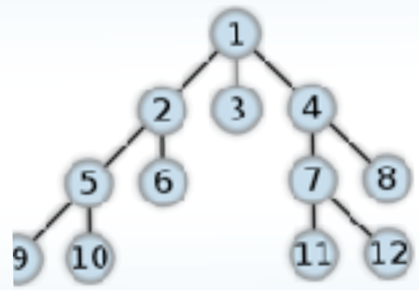
<u>OUTPUT:</u> Knotenmenge $Y \subseteq V$, die von s aus erreichbar ist,

Kantenmenge $T \subseteq E$, die die Erreichbarkeit sicherstellt

1. Sei $R:=\{s\}$, $Y:=\{s\}$, $T:=\emptyset$
2. WHILE ($R \neq \emptyset$) DO {
   - 2.1. wähle Element $v \in R$
   - 2.2. IF (es gibt kein $w \in V\setminus Y$ mit $e=\{v,w\} \in E$) THEN
     - 2.2.1. $R:=R\setminus\{v\}$
   - 2.3. ELSE {
     - 2.3.1. wähle ein $w \in V\setminus R$ mit $e=\{v,w\} \in E$;
     - 2.3.2. setze $R := R \cup \{w\}$, $Y := Y \cup \{w\}$, $T := T \cup \{e\}$;

     }

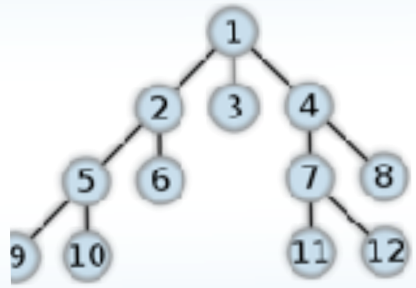
   }



Kapitel 3.4: Wartenschlange und Stapel

Algorithmen und Datenstrukturen
WS 2020/21

Prof. Dr. Sándor Fekete



Kapitel 3.5: Tiefensuche und Breitensuche

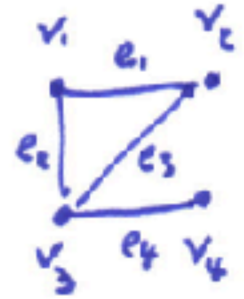
Algorithmen und Datenstrukturen
WS 2020/21

Prof. Dr. Sándor Fekete

3.6 Datenstrukturen für Graphen

Wie beschreibt man einen Graphen?

(1) Inzidenzmatrix



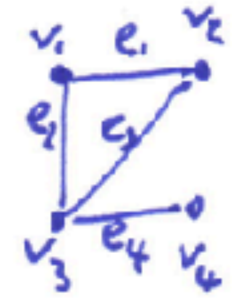
$$\begin{array}{c|cccc} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ \hline v_1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ v_2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ v_3 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ v_4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

(„inzident": zusammentreffend)

Also: $A \in \{0,1\}^{n \times m}$ mit $a_{v,e} := \begin{cases} 1 & \text{für } v \in e \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Größe: nm für einen Graphen mit n Knoten, m Kanten. (Viele Nullen!)

(2) Adjazenzmatrix



$$\begin{array}{c|cccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \hline v_1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ v_2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ v_3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ v_4 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

(„adjazent": verbunden)

3.7 WACHSTUM VON FUNKTIONEN

Im letzten Abschnitt haben wir Funktionen abgeschätzt und auf die „wesentlichen" Bestandteile reduziert, um Größenordnungen und Wachstumsverhalten zu beschreiben. Ein bisschen formaler:

DEFINITION 3.9 (Θ-Notation)

Seien $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ Funktionen.

Dann gilt

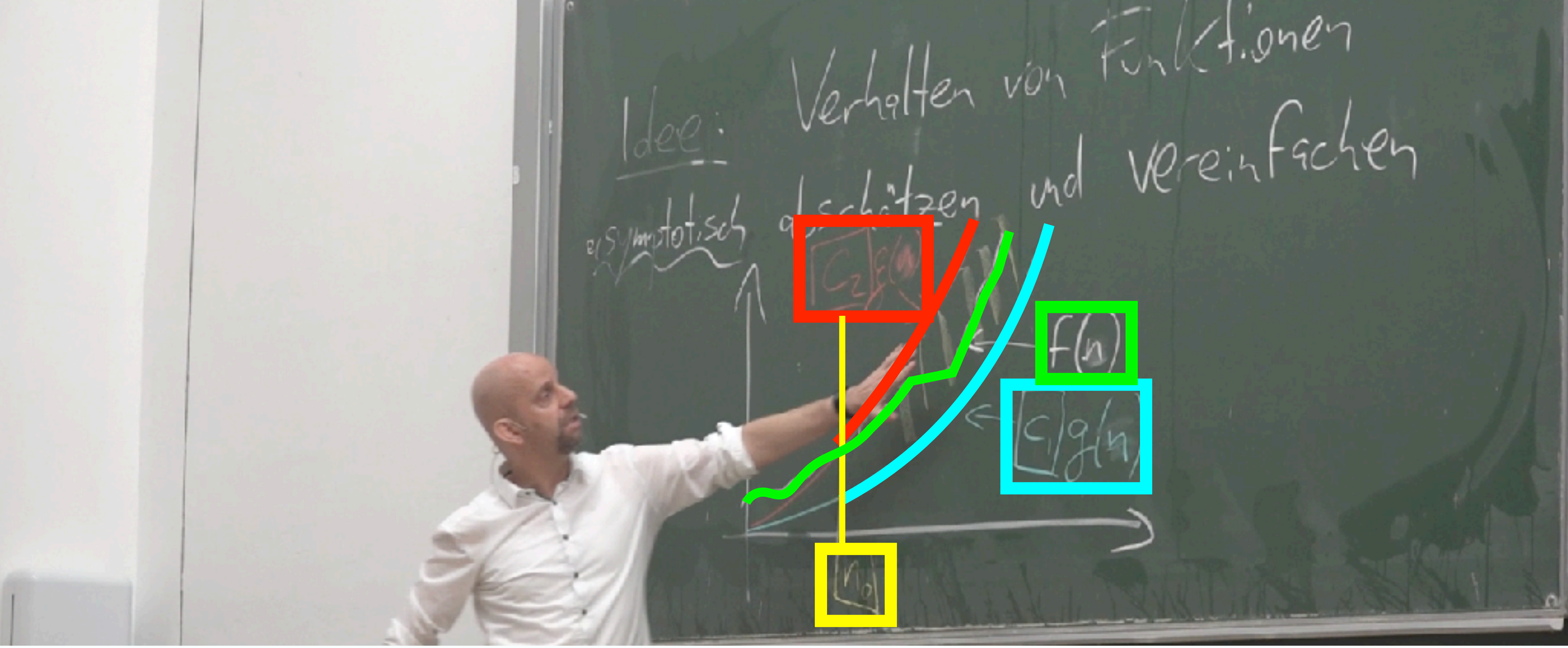
$f \in \Theta(g) :\Leftrightarrow$ Es gibt positive Konstanten c_1, c_2, n_0 mit $0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)$ für alle $n \geq n_0$.

Man sagt: f wächst asymptotisch in derselben Größenordnung wie g.

Beispiele:

$$2n^2 - 1 \in \Theta(n^2)$$

$$\frac{n^3}{1000} + n^2 + n \log n \in \Theta(n^3)$$



DEFINITION 3.9 (Θ-Notation)

Seien $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ Funktionen.

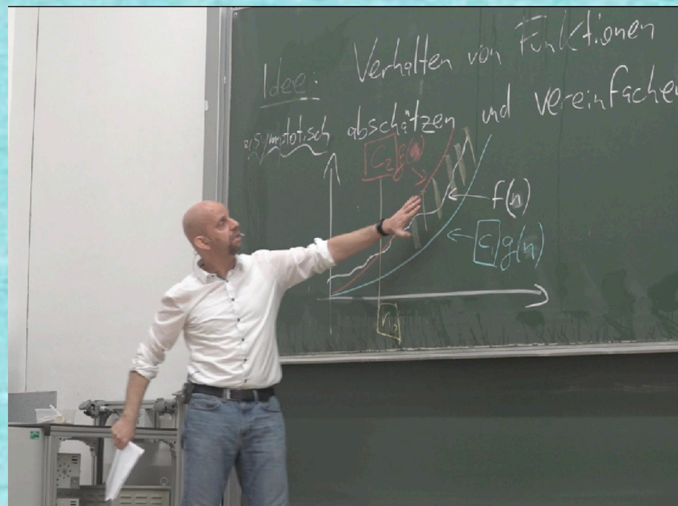
Dann gilt

$f \in \Theta(g) :\Leftrightarrow$ Es gibt positive Konstanten c_1 c_2 n_0 mit

$0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)$ für alle $n \geq n_0$

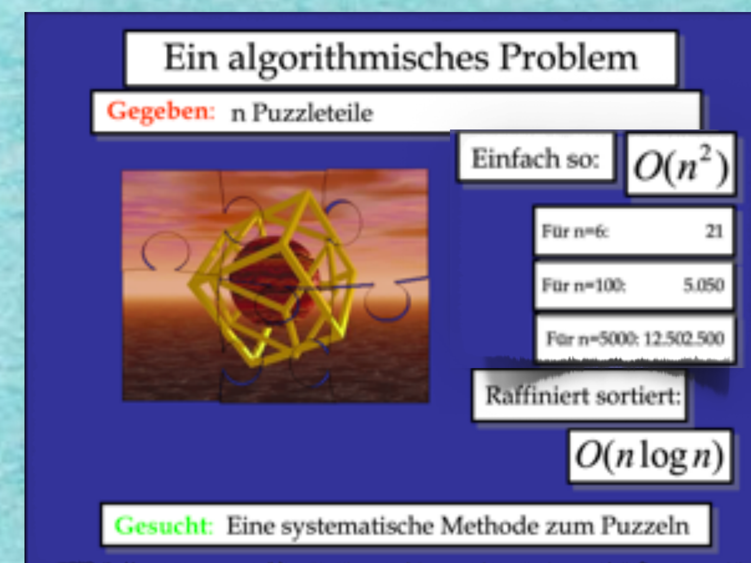
Man sagt: f wächst asymptotisch in derselben Größenordnung wie g.

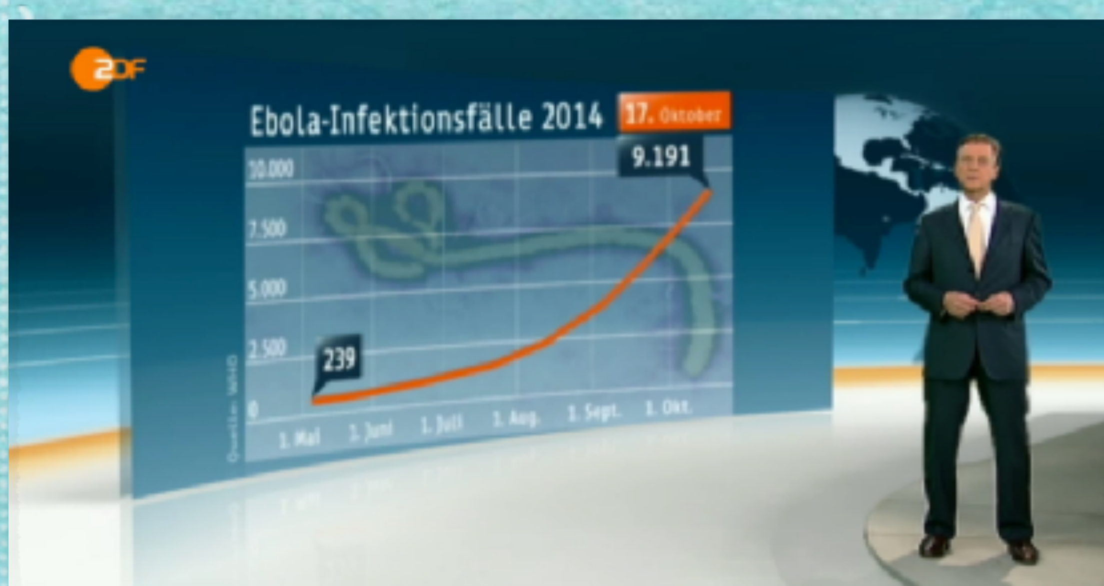
Wofür ist das gut?



$$\log_2 \left\lfloor \left(2n + 4m + n(\lfloor \log_2 n \rfloor + 1) + 2m(\lfloor \log_2 n \rfloor + 1) \right) \right\rfloor + 1$$

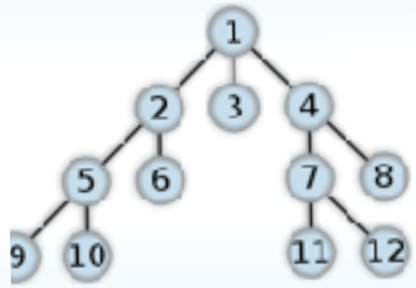
$$\Theta(m \log n)$$





$$\Theta(n^2) \qquad (2n)^2 = 4 \cdot n^2$$

$$\Theta(2^n) \qquad 2^{2n} = 2^n \cdot 2^n$$

Kapitel 3.8: Laufzeit von DFS und BFS

Algorithmen und Datenstrukturen
WS 2020/21

Prof. Dr. Sándor Fekete

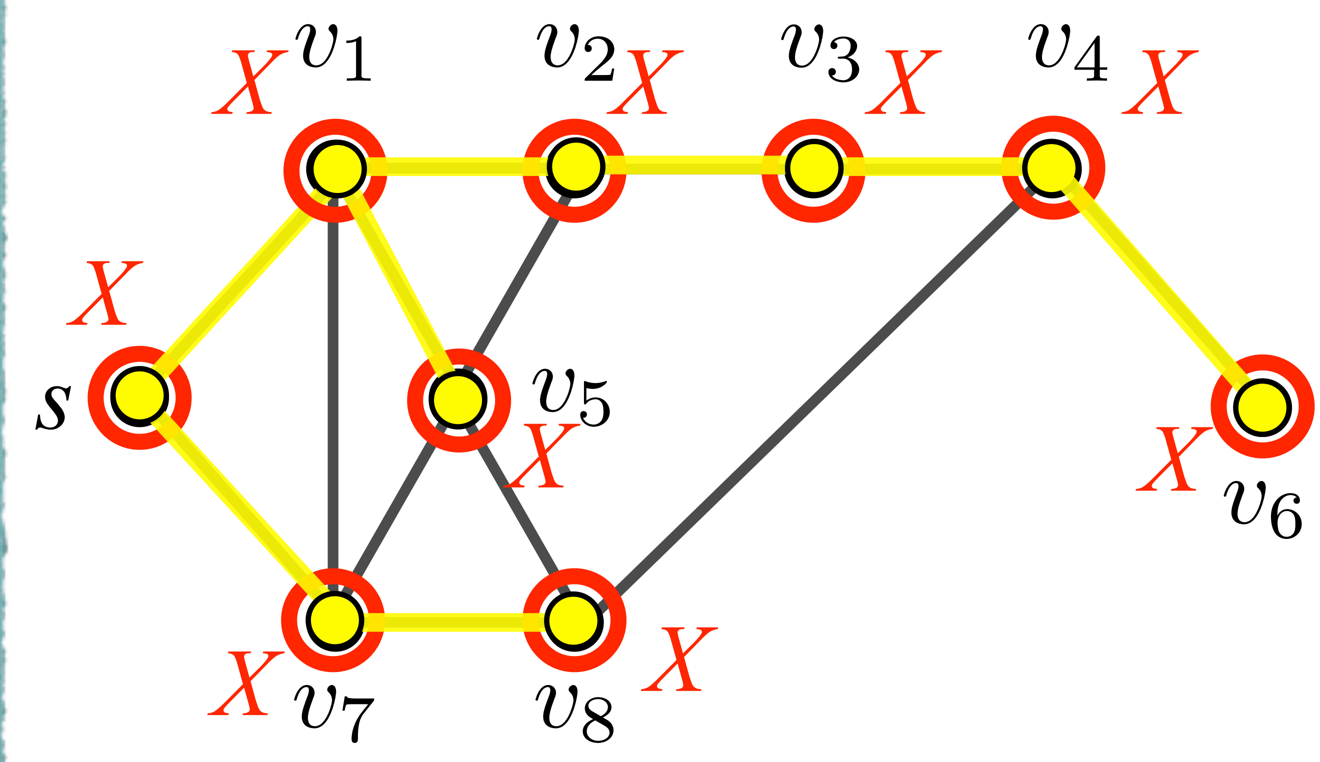
Algorithmus 3.7

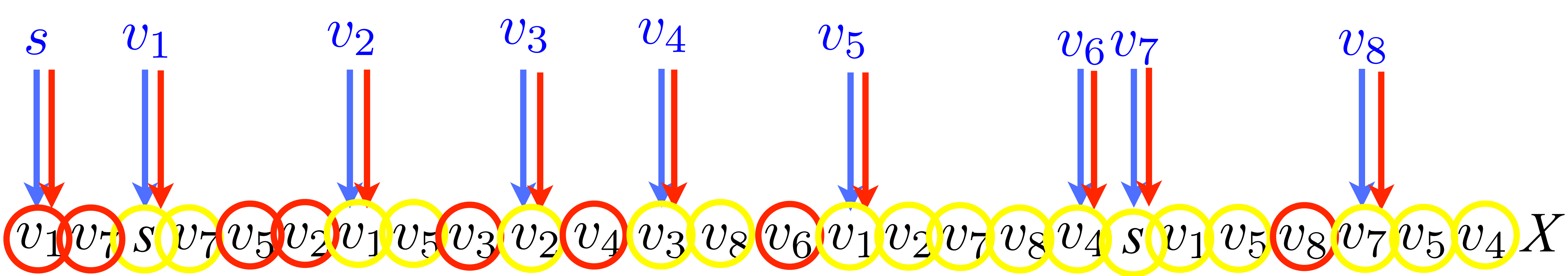
INPUT: Graph $G = (V,E)$, Kncten s

OUTPUT: Knotenmenge $Y \subseteq V$, die von s aus erreichbar ist,

Kantenmenge $T \subseteq E$, die die Erreichbarkeit sicherstellt

```
   Sei R:={s}, Y:={s}, T:=∅
2. WHILE (R≠∅) DO {
     2.1. Wähle v∈R
     2.2. IF (es gibt kein w∈V\Y mit e={v,w}∈E) THEN
          2.2.1. R:=R\{v}
     2.3. ELSE {
          2.3.1. Wähle ein w∈V\Y mit e={v,w}∈E
          2.3.2. Setze R := R ∪ {w}, Y := Y ∪ {w}, T := T ∪ {e}
          }
   }
3. STOP
```



Satz 3.13

Der Graphen-Scan-Algorithmus 3.7 lässt sich so implementieren, dass die Laufzeit $O(n+m)$ ist.

Algorithmus 3.7

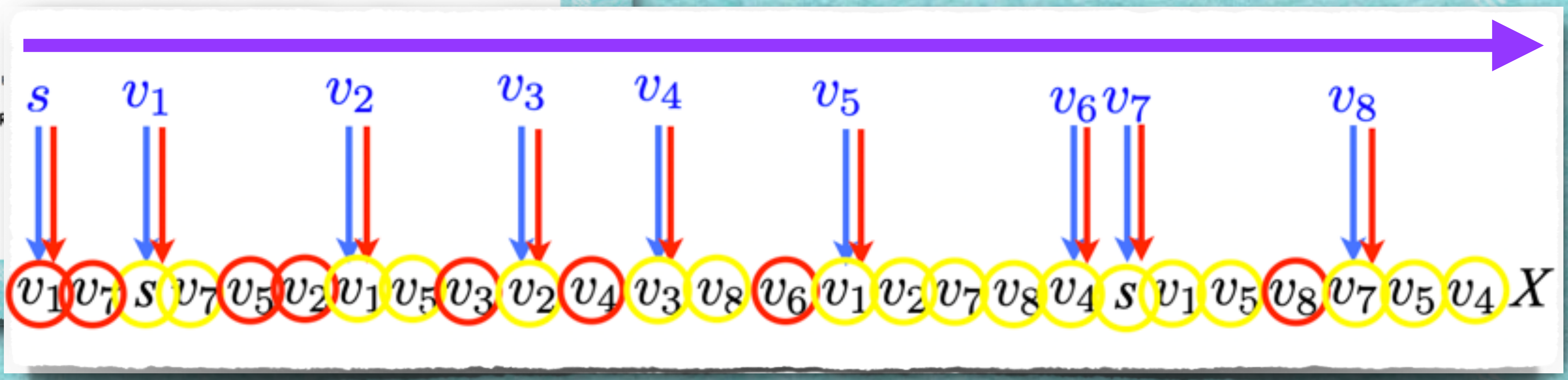
INPUT:	Graph $G=(V,E)$, Knoten s
OUTPUT:	Knotenmenge $Y \subseteq V$, die von s aus erreichbar ist,
	Kantenmenge $T \subseteq E$, die die Erreichbarkeit sicherstellt

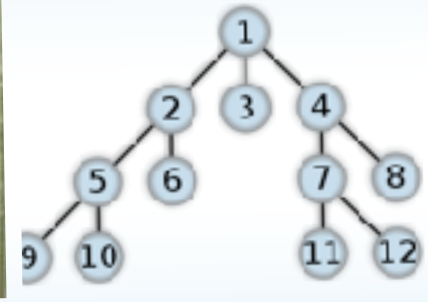
1. Sei $R:=\{s\}$, $Y:=\{s\}$, $T:=\emptyset$
2. WHILE ($R\neq\emptyset$) DO {
   - 2.1. Wähle $v \in R$
   - 2.2. IF (es gibt kein $w \in V\setminus Y$ mit $e=\{v,w\}\in E$) THEN
     - 2.2.1. $R:=R\setminus\{v\}$
   - 2.3. ELSE {
     - 2.3.1. Wähle ein w
     - 2.3.2. Setze R := R

     }

   }
3. STOP

Adjazenzliste!





Kapitel 3.9: Eigenschaften von DFS und BFS

Algorithmen und Datenstrukturen
WS 2020/21

Prof. Dr. Sándor Fekete

3.9 DFS vs. BFS

Einfach gesagt:

- ***DFS ist eine bestmögliche individuelle Suchstrategie mit lokaler Information.***
- ***BFS ist eine bestmögliche kooperative Suchstrategie mit globaler Information.***

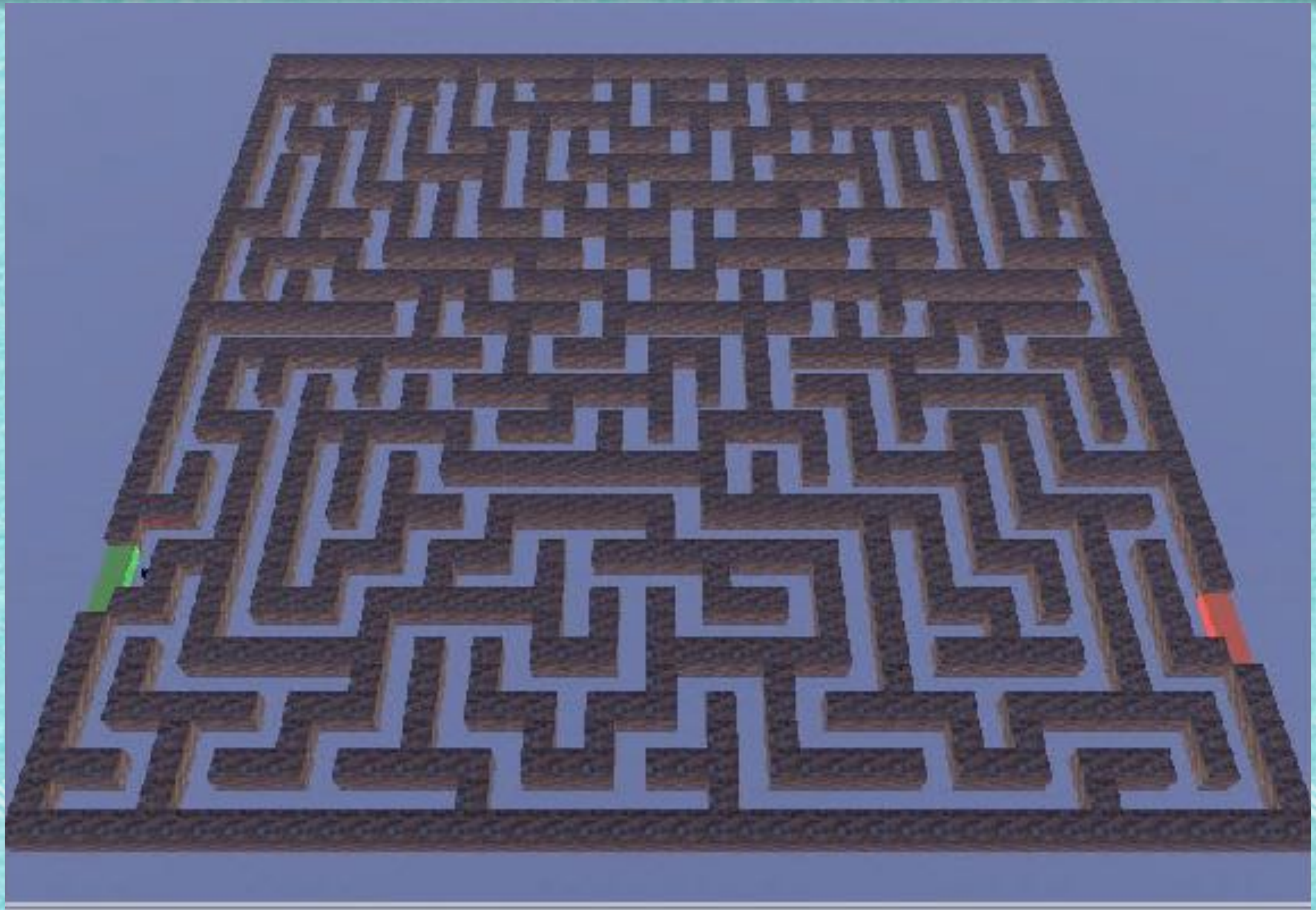
Konkret:

- ***DFS ist gut geeignet für die Suche nach einem Ausweg aus einem Labyrinth.***
- ***BFS ist gut geeignet für die Suche nach kürzesten Wegen in einem Graphen.***

Satz 3.16 (Lokale Suche mit DFS)

(1) DFS findet in jedem zusammenhängenden Graphen mit n Knoten einen Weg der Länge höchstens 2n-1, der alle Knoten besucht.

(2) Für jede lokale Suchstrategie gibt es einen Graphen mit n Knoten, so dass der letzte Knoten erst nach einer Weglänge von 2n-1 besucht wird.



Auf die Schnelle mit der Welle

A. LOS bei „NULL“

B. Bis „ANGEKOMMEN!“:

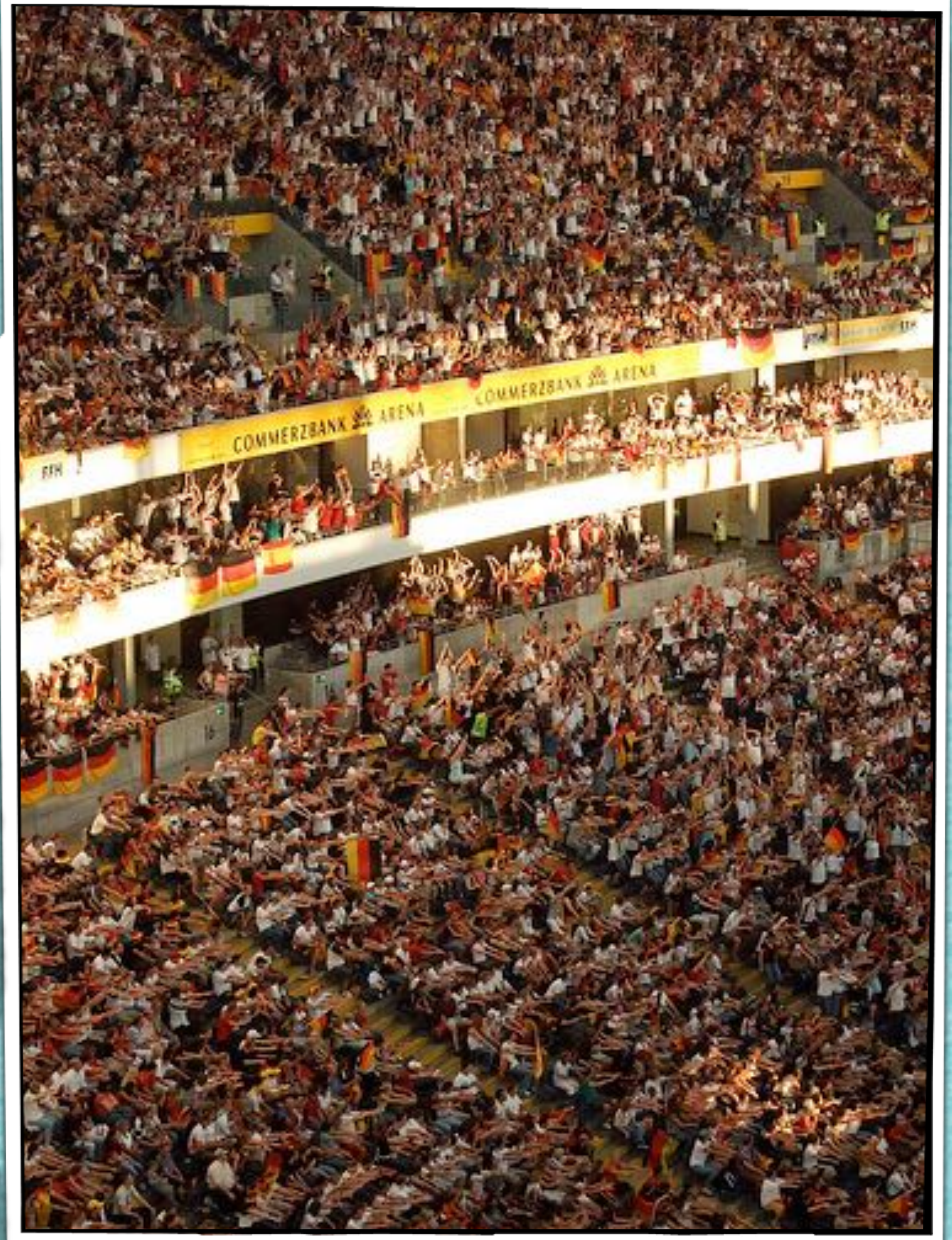
- Solange du noch nicht aufgestanden warst:
  - Wenn ein oder mehrere direkte Nachbarn aufstehen:
    1. Einen dieser Nachbarn merken
    2. In der nächsten Runde:

       2.1. aufstehen

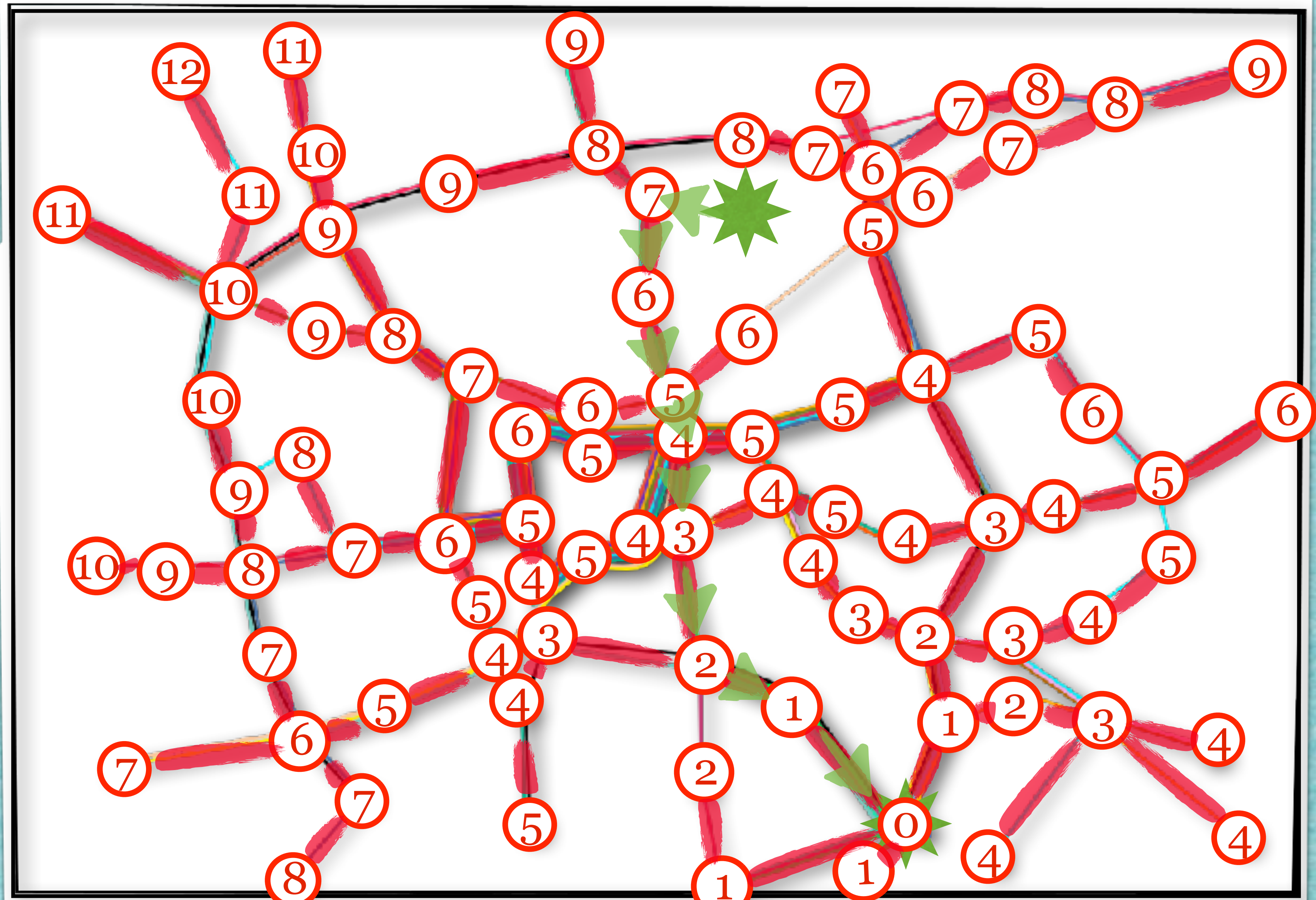
       2.2. Zahl merken
    3. In der übernächsten Runde hinsetzen

C. Nach „ANGEKOMMEN!“:

- Auf gemerkten Nachbarn zeigen



Wellenreiten in Graphen

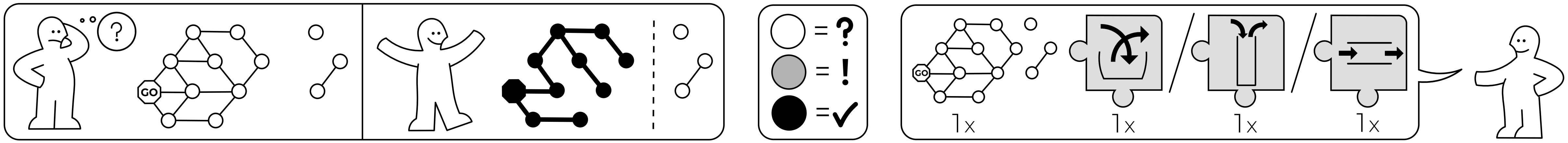


Breitensuche

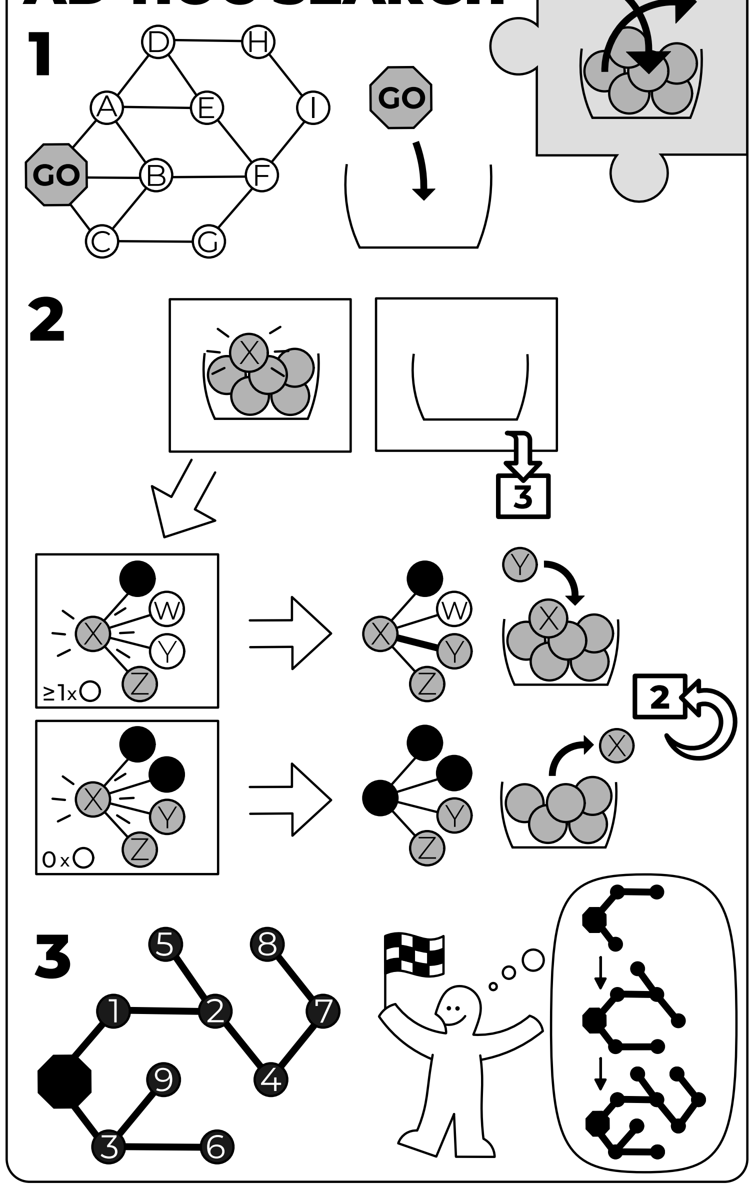
GRÅPH SKÄN

idea-instructions.com/graph-scan/

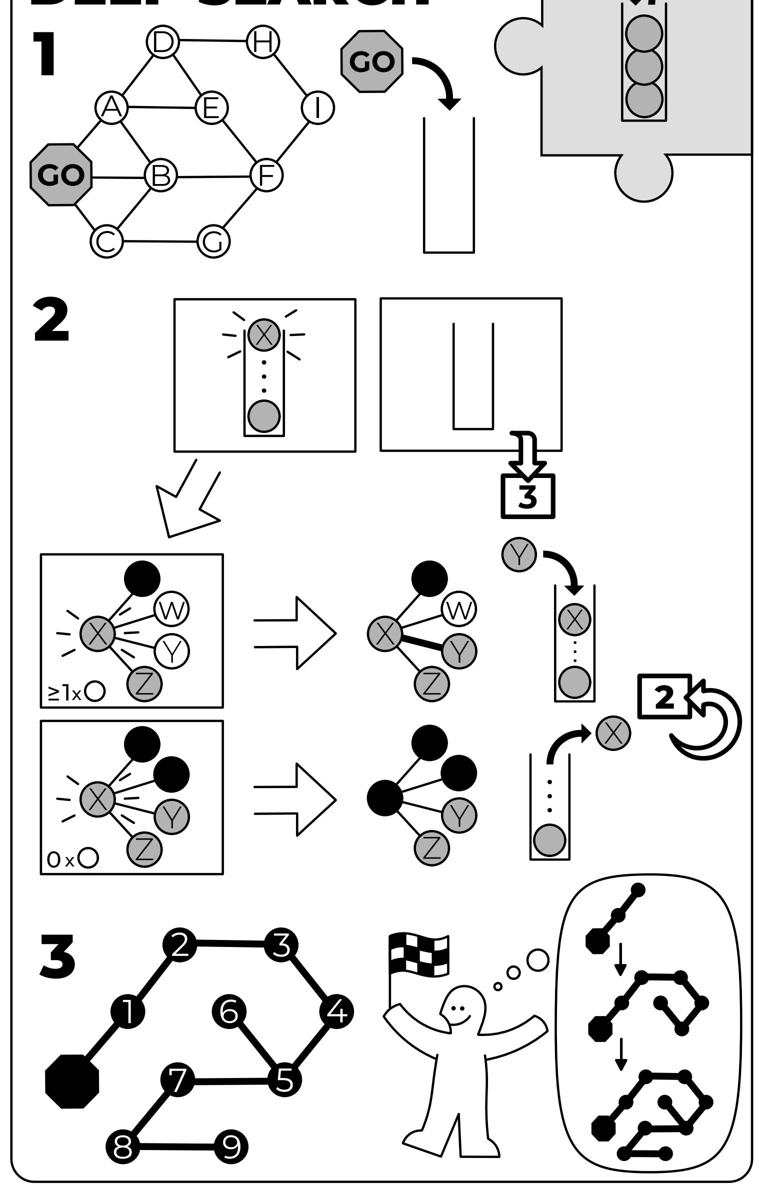
IDEA



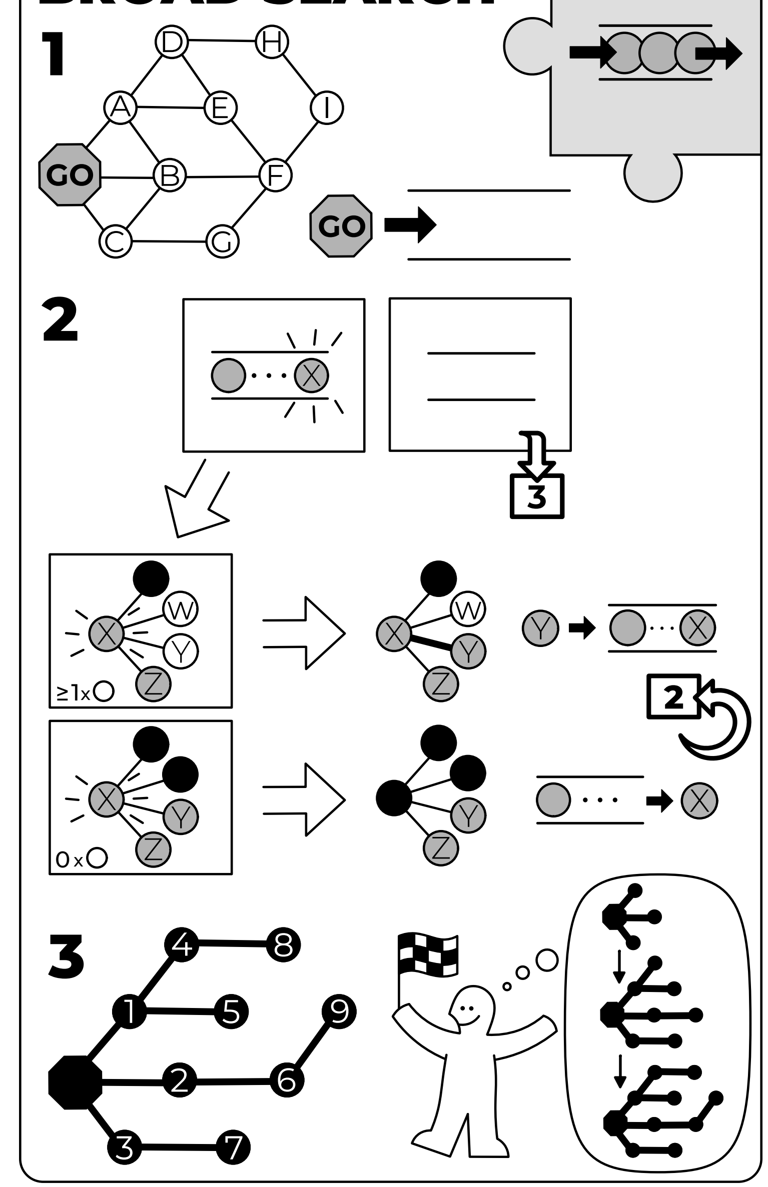
AD-HOC SEARCH



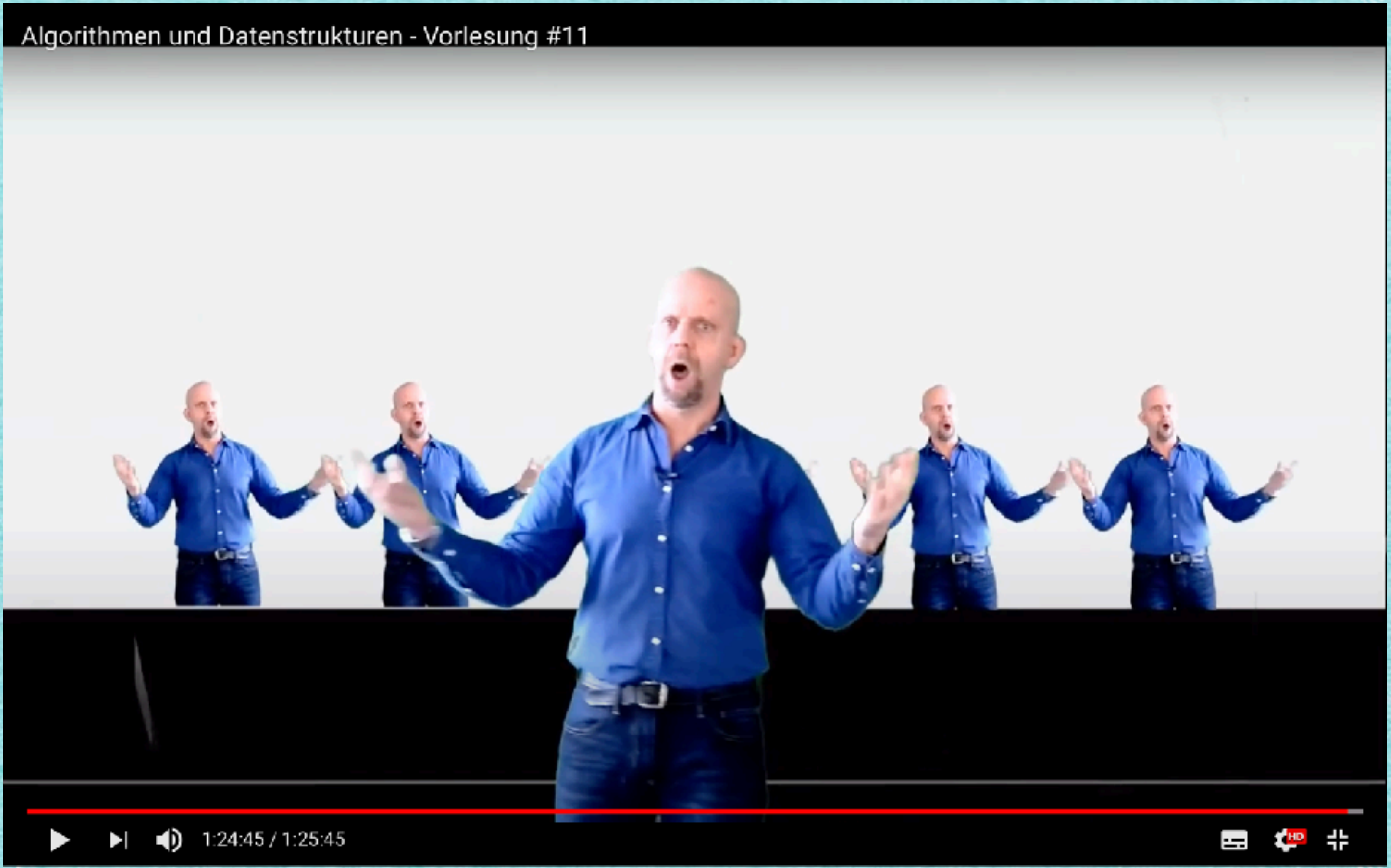
DEEP SEARCH

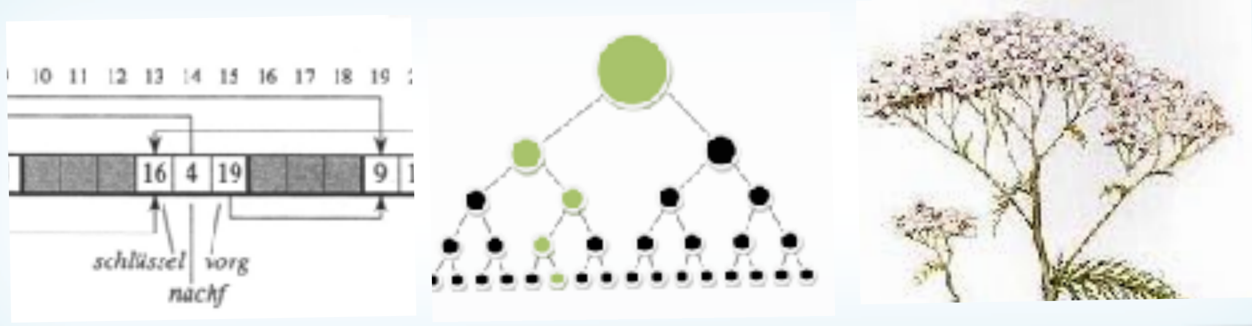


BROAD SEARCH



Zusammenfassung Kapitel 3!





Kapitel 4:
Dynamische Datenstrukturen

Algorithmen und Datenstrukturen
WS 2020/21

Prof. Dr. Sándor Fekete

4.1 Grundoperationen

Langsam:

- ***O(n):*** ***lineare Zeit***

  Alle Objekte anschauen

Sehr schnell:

- ***O(1):*** ***konstante Zeit***

  Immer gleich schnell, egal wie groß S ist.

Schnell:

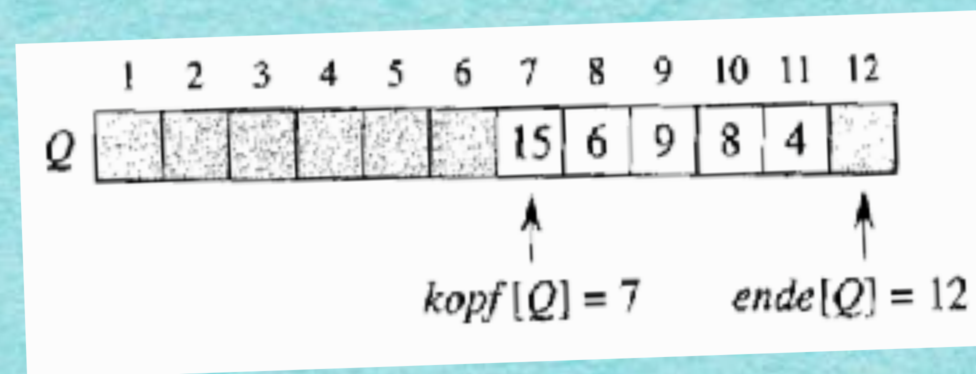
- ***O(log n):*** ***logarithmische Zeit***

  Wiederholtes Halbieren

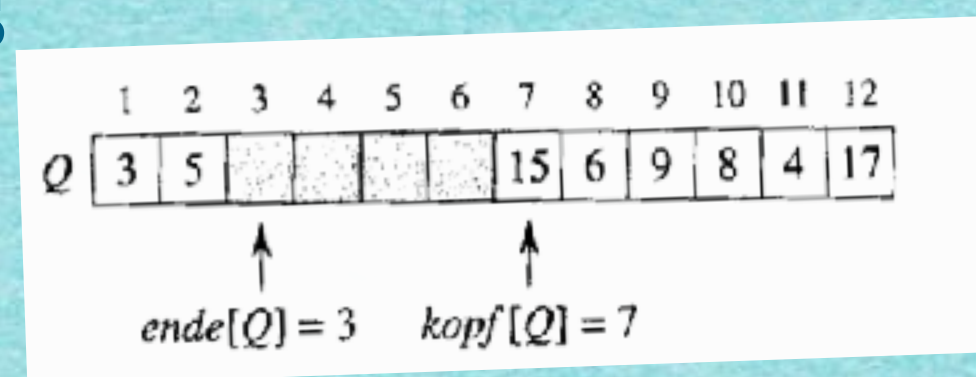
4.2 Stapel und Warteschlange

OUT

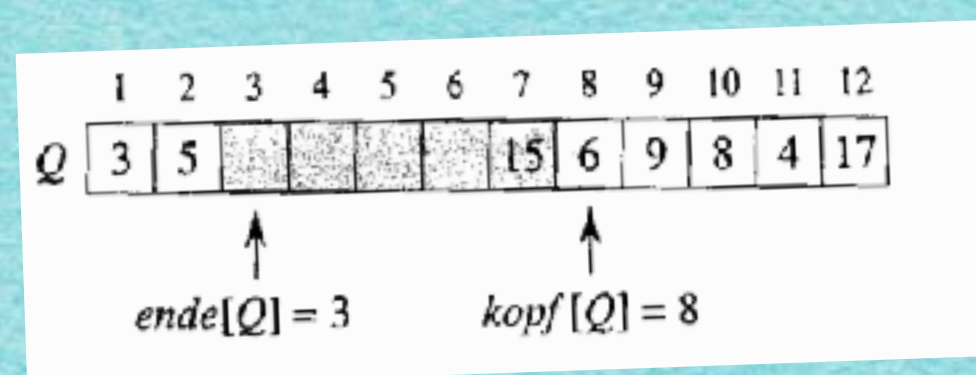
IN



Enqueue: 17, 3, 5



Dequeue:



4.3 Verkettete Listen

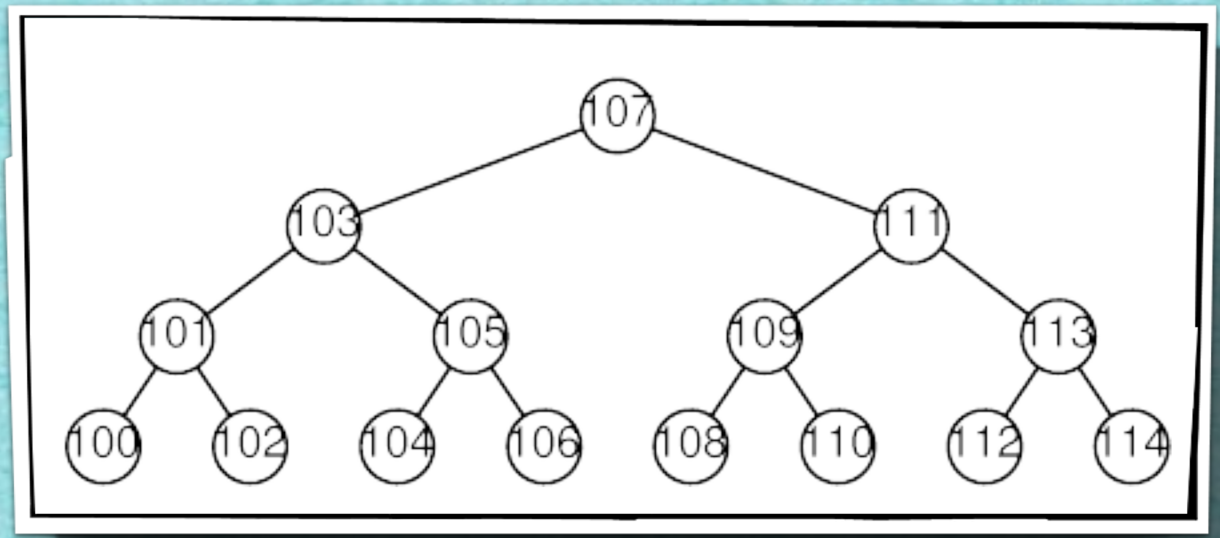
<u>Idee:</u>

Ordne Objekte nicht explizit in aufeinanderfolgenden Speicherzellen an, sondern gib jeweils Vorgänger und Nachfolger an.

4.4 Binäre Suche

Aufgabenstellung:

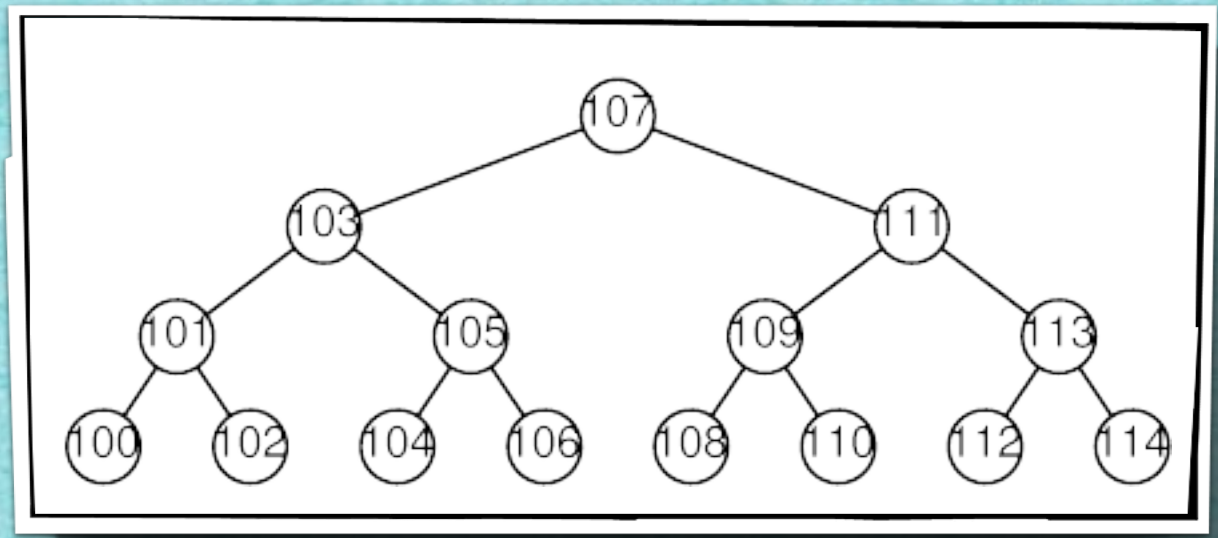
- ***Rate eine Zahl zwischen 100 und 114!***



4.5 Binäre Suchbäume

Ideen:

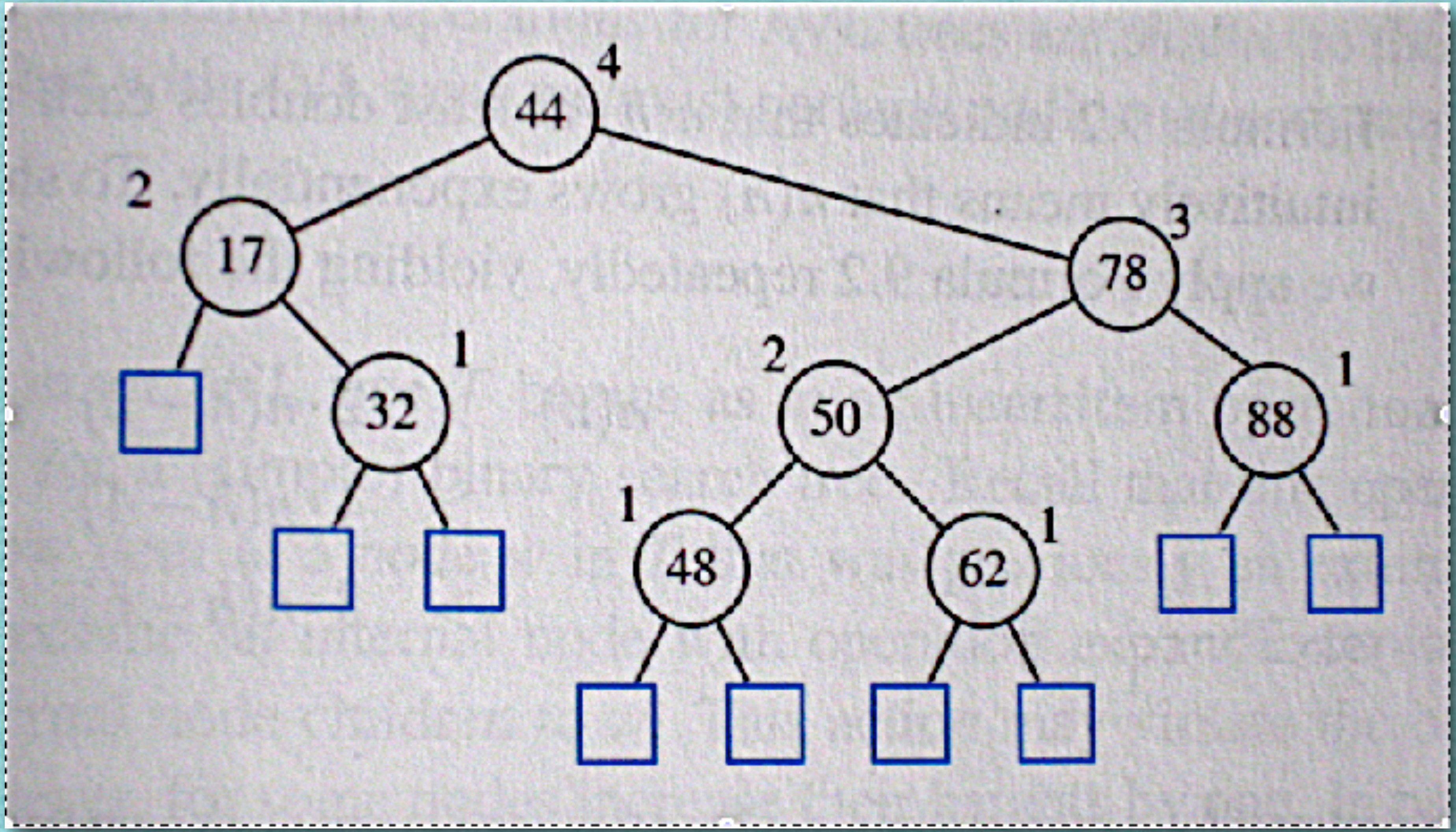
- ***Strukturiere Daten wie im möglichen Ablauf einer binären Suche!***
- ***Erziele logarithmische Zeiten!***

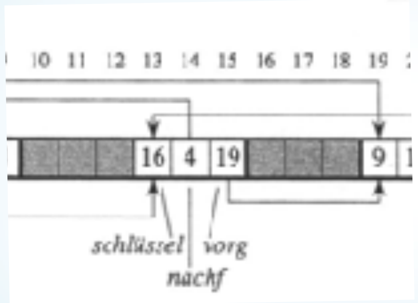


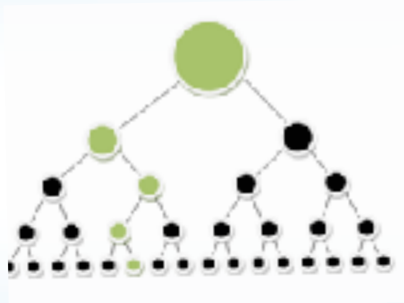
Definition 4.7

(1) Ein binärer Suchbaum ist höhenbalanciert, wenn sich für jeden inneren Konten v die Höhe der beiden Kinder von v um höchstens 1 unterscheidet.

(2) Ein höhenbalancierter Suchbaum heißt auch AVL-Baum.





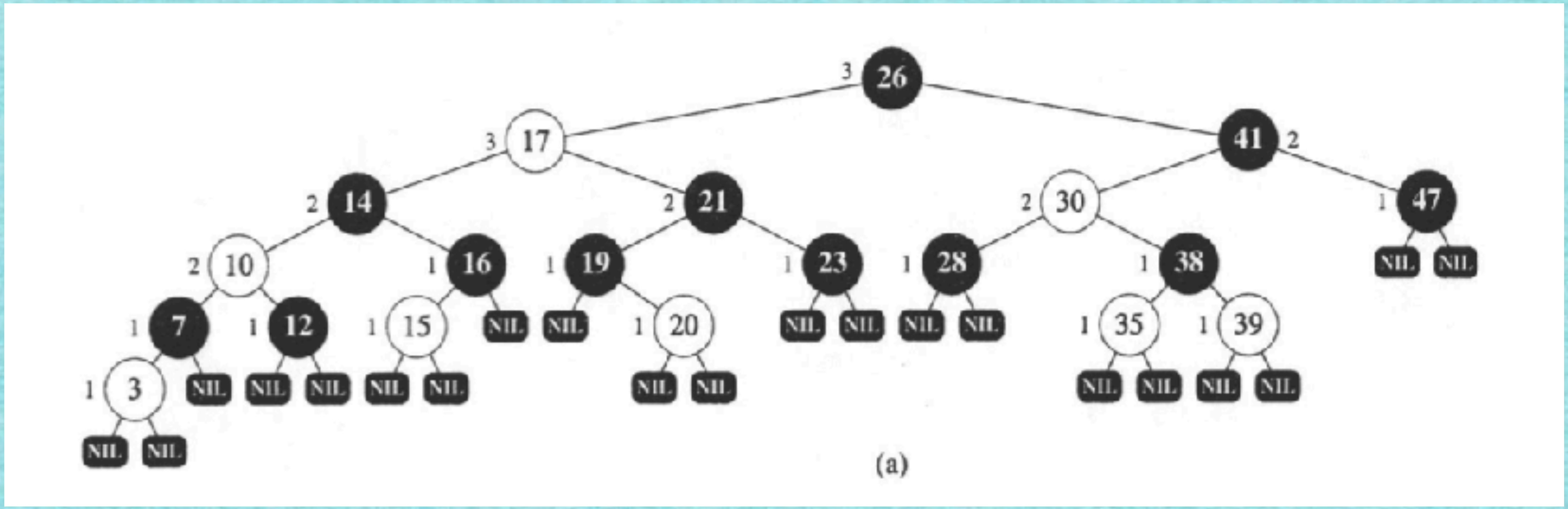



Kapitel 4.8-4.11: Andere dynamische Datenstrukturen

Algorithmen und Datenstrukturen WS 2020/21

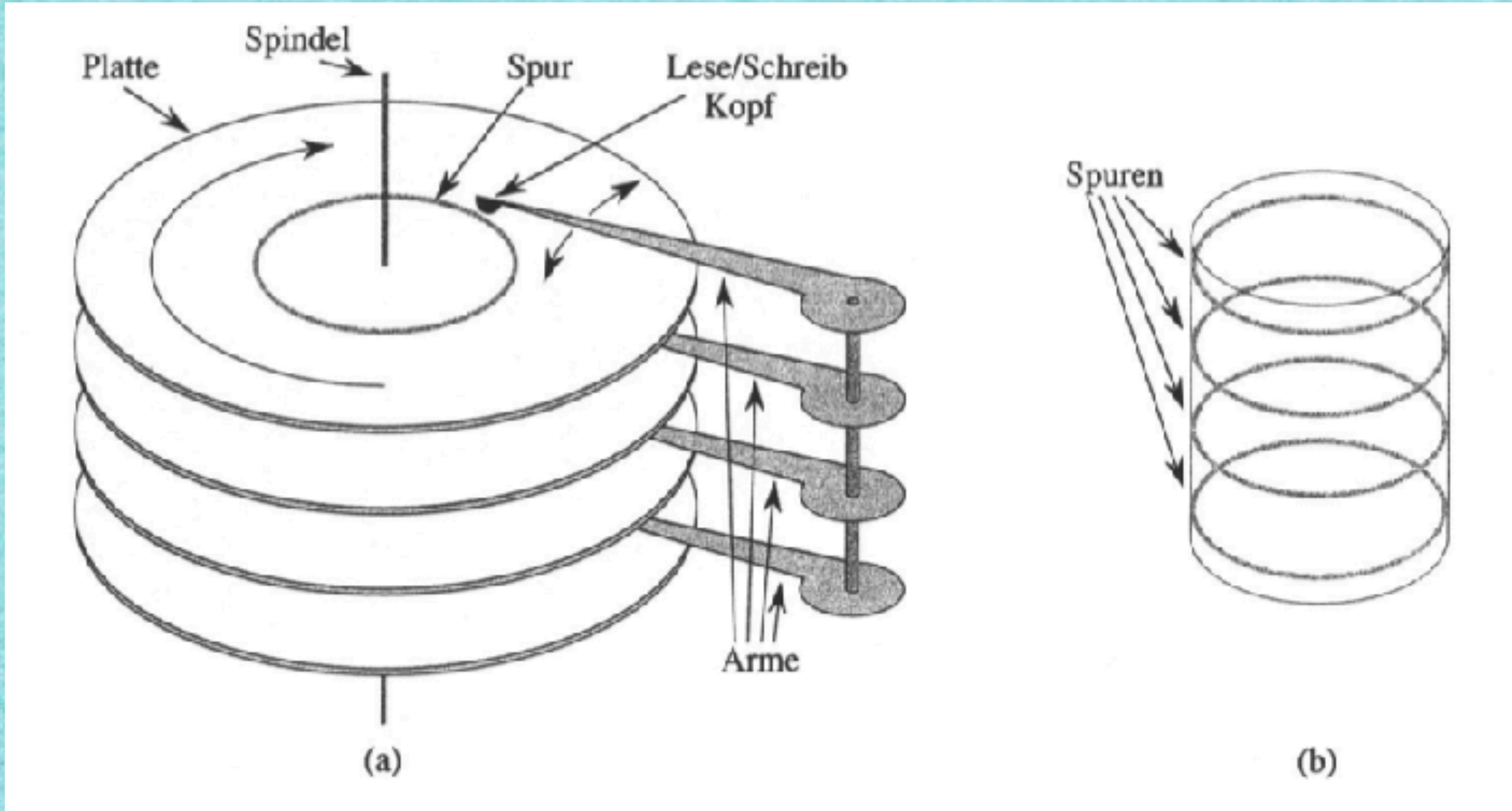
Prof. Dr. Sándor Fekete

4.8 Rot-Schwarz-Bäume



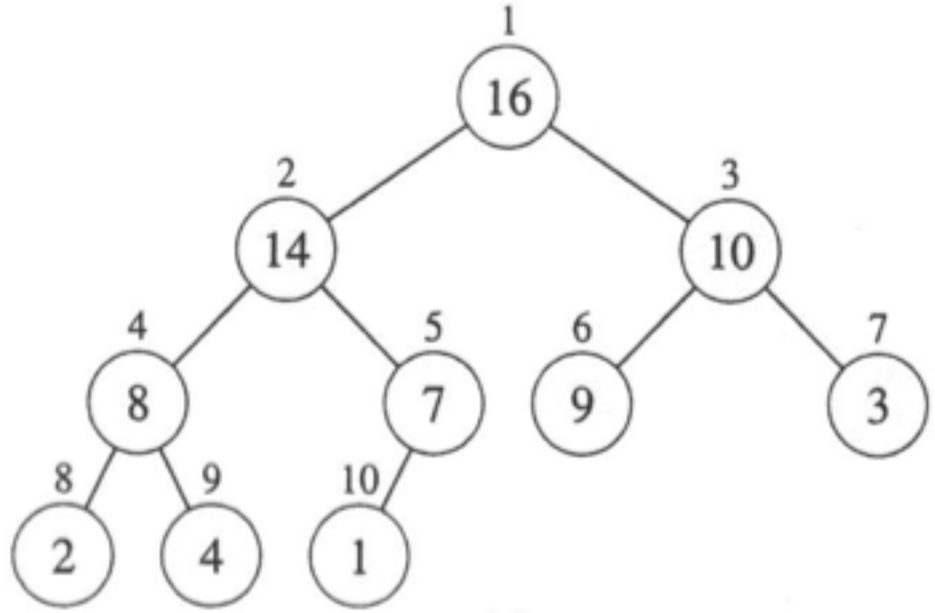
Idee: Verwende "Farben", um den Baum vertikal zu strukturieren und zu balancieren!

4.9 B-Bäume



Kontext: Speicherhierarchien mit unterschiedlich schnellen Zugriffszeiten

4.10 Heaps



(a)

Idee: Ordne Baum so, dass
größere Elemente immer oben stehen!

4.11 Andere Strukturen

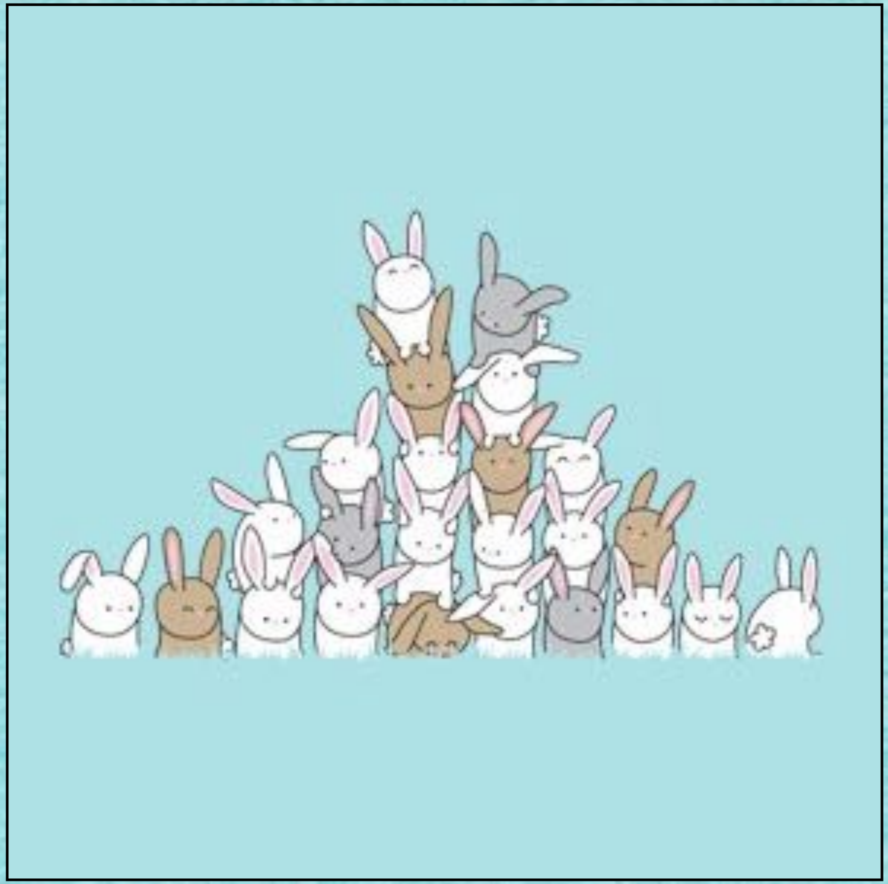
4.11.1 Fibonacci-Heaps:
Heap-Struktur mit sehr schneller *amortisierter* Zugriffszeit.

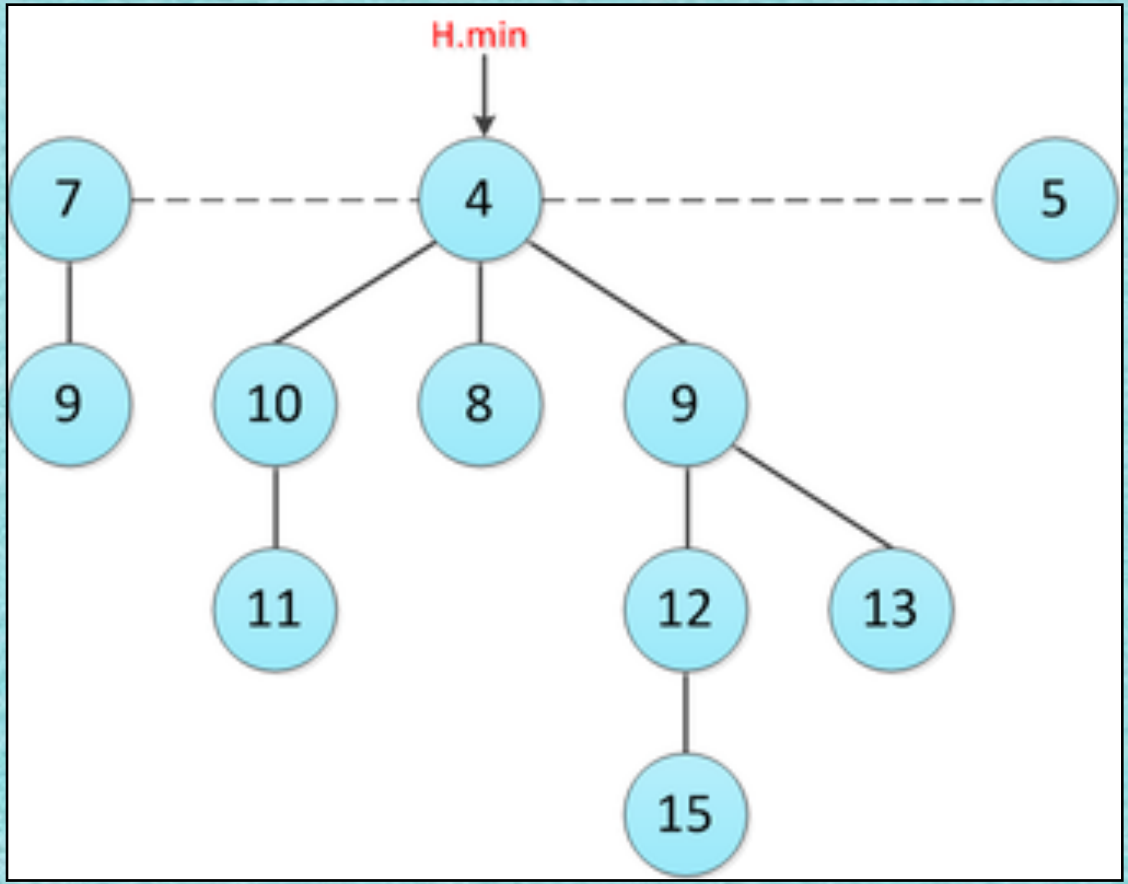
Common Operations	*Effect*	Unsorted Linked List	Self-balancing binary search tree	Binary heap	Binomial heap	Fibonacci heap
insert(data,key)	Adds *data* to the queue, tagged with *key*	O(1)	O(log n)	O(log n)	O(og n)	O(1)
findMin() -> key,data	Returns *key,data* corresponding to min-value *key*	O(n)	O(log n) or O(1) (**)	O(1)	O(og n)[4]	O(1)[1]
deleteMin()	Deletes *data* corresponding to min-value *key*	O(n)	O(log n)	O(log n)	O(og n)	O(log n)*
delete(node)	Deletes *data* corresponding to given *key*, given a pointer to the node being deleted	O(1)	O(log n)	O(log n)	O(og n)	O(log n)*
decreaseKey(node)	Decreases the *key* of a node, given a pointer to the node being modified	O(1)	O(log n)	O(log n)	O(og n)	O(1)*
merge(heap1,heap2) -> heap3	Merges two heaps into a third	O(1)	O(m log(n+m))	O(m + n)	O(og n)***	O(1)

(*)Amortized time
(**)With trivial modification to store an additional pointer to the minimum element
(***)Where n is the size of the larger heap

4.11 Andere Strukturen

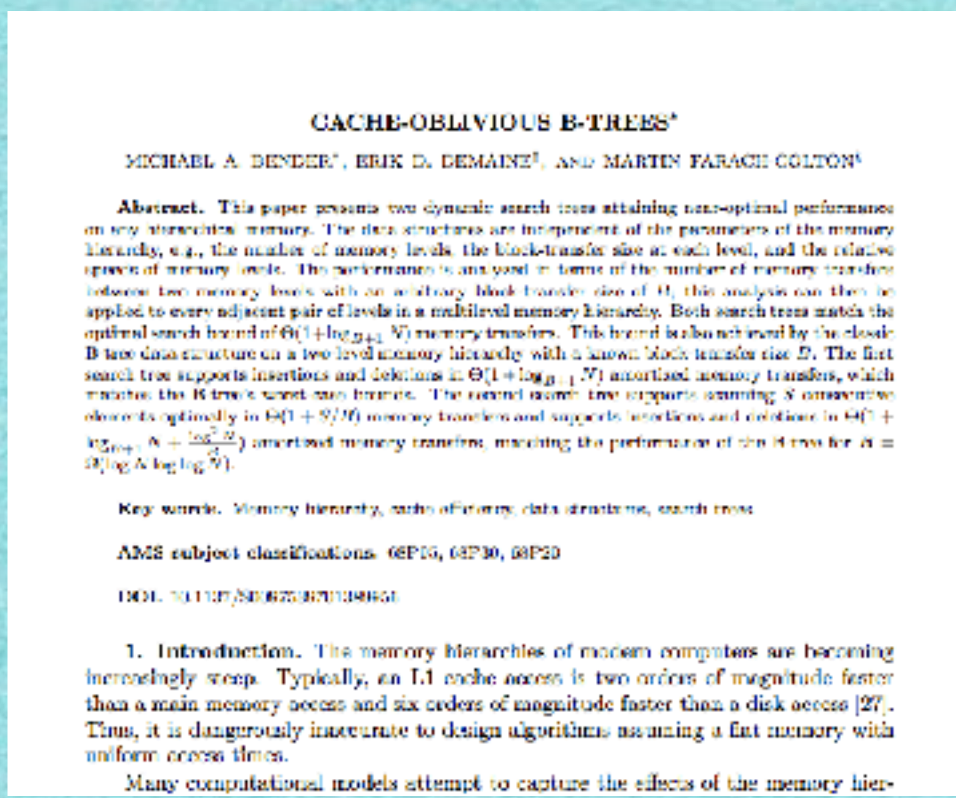
4.11.1 Fibonacci-Heaps:
Heap-Struktur mit sehr schneller *amortisierter* Zugriffszeit.





4.11 Andere Strukturen

4.11.2 Cache-Oblivious B-Trees:
Umgang mit großen Datenmengen bei unbekannter Cache-Größe



CACHE-OBLIVIOUS B-TREES*

MICHAEL A. BENDER*, ERIK D. DEMAINE†, AND MARTIN FARACH-COLTON‡

Abstract. This paper presents two dynamic search trees attaining near-optimal performance on any hierarchical memory. The data structures are independent of the parameters of the memory hierarchy, e.g., the number of memory levels, the block-transfer size at each level, and the relative speeds of memory levels. The performance is analyzed in terms of the number of memory transfers between two memory levels with an arbitrary block-transfer size of B; this analysis can then be applied to every adjacent pair of levels in a multilevel memory hierarchy. Both search trees match the optimal search bound of $\Theta(1+\log_{B+1} N)$ memory transfers. This bound is also achieved by the classic B-tree data structure on a two-level memory hierarchy with a known block-transfer size B. The first search tree supports insertions and deletions in $\Theta(1+\log_{B+1} N)$ amortized memory transfers, which matches the B-tree's worst-case bounds. The second search tree supports scanning S consecutive elements optimally in $\Theta(1+S/B)$ memory transfers and supports insertions and deletions in $\Theta(1+\log_{B+1} N+\frac{\log^2 N}{B})$ amortized memory transfers, matching the performance of the B-tree for $B=\Omega(\log N \log\log N)$.

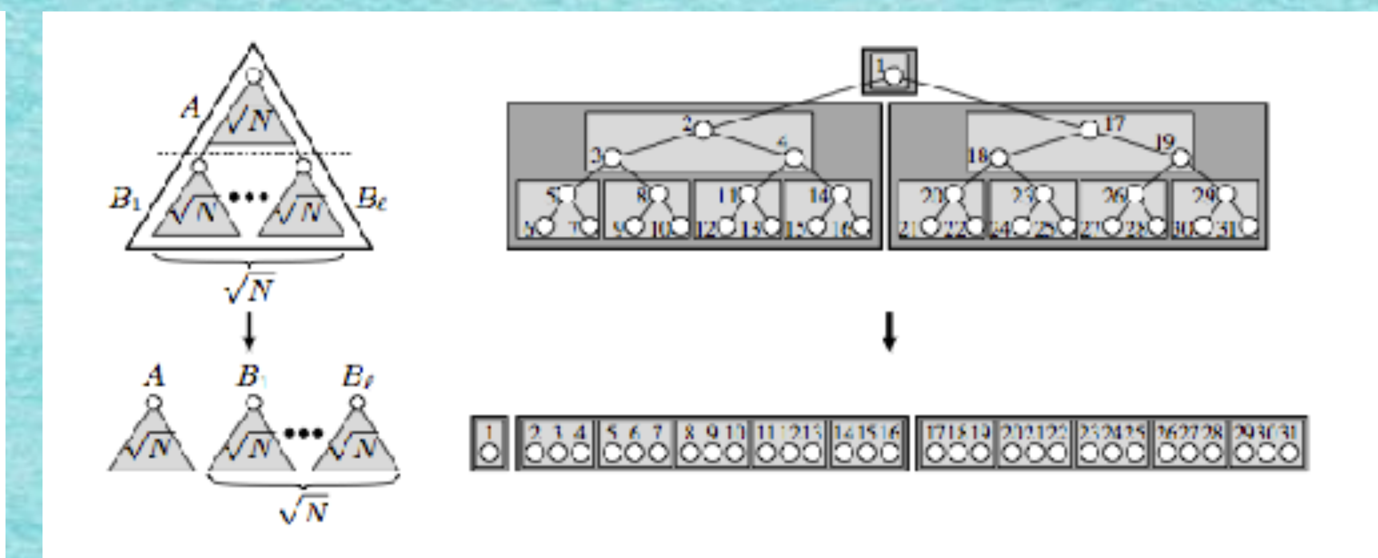
Key words. Memory hierarchy, cache efficiency, data structures, search trees

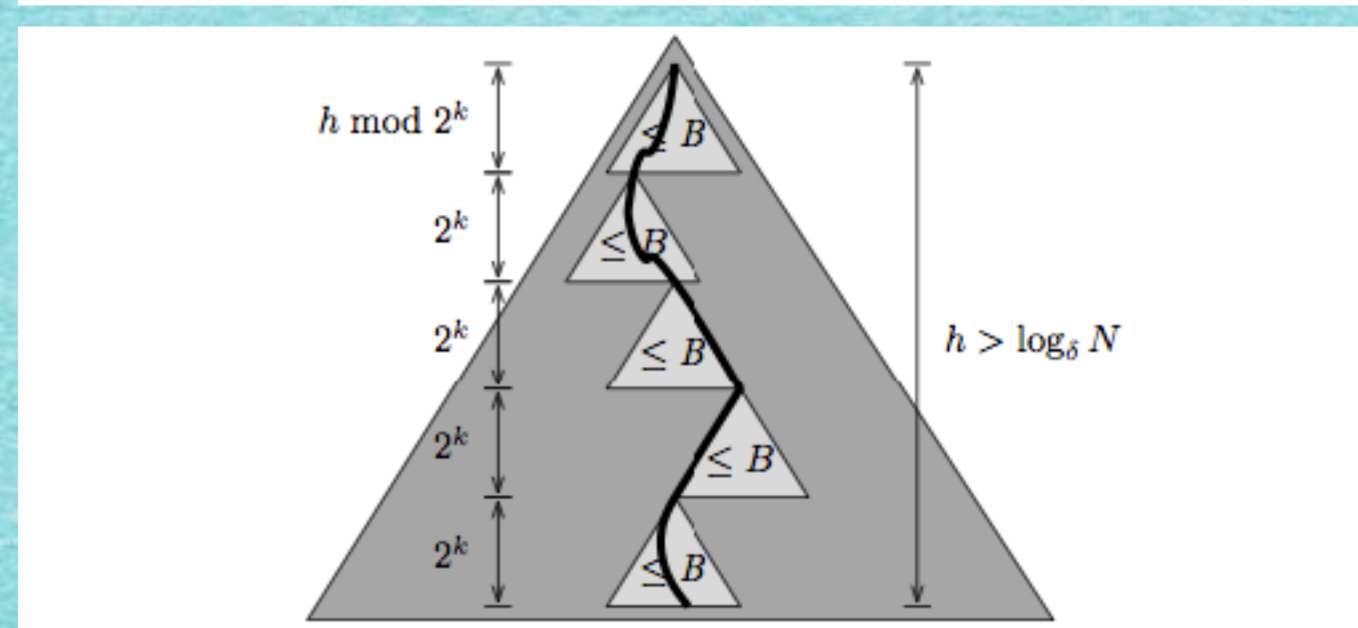
AMS subject classifications. 68P05, 68P30, 68P20

DOI. [illegible]

1. Introduction. The memory hierarchies of modern computers are becoming increasingly steep. Typically, an L1 cache access is two orders of magnitude faster than a main memory access and six orders of magnitude faster than a disk access [27]. Thus, it is dangerously inaccurate to design algorithms assuming a flat memory with uniform access times.

Many computational models attempt to capture the effects of the memory hier-



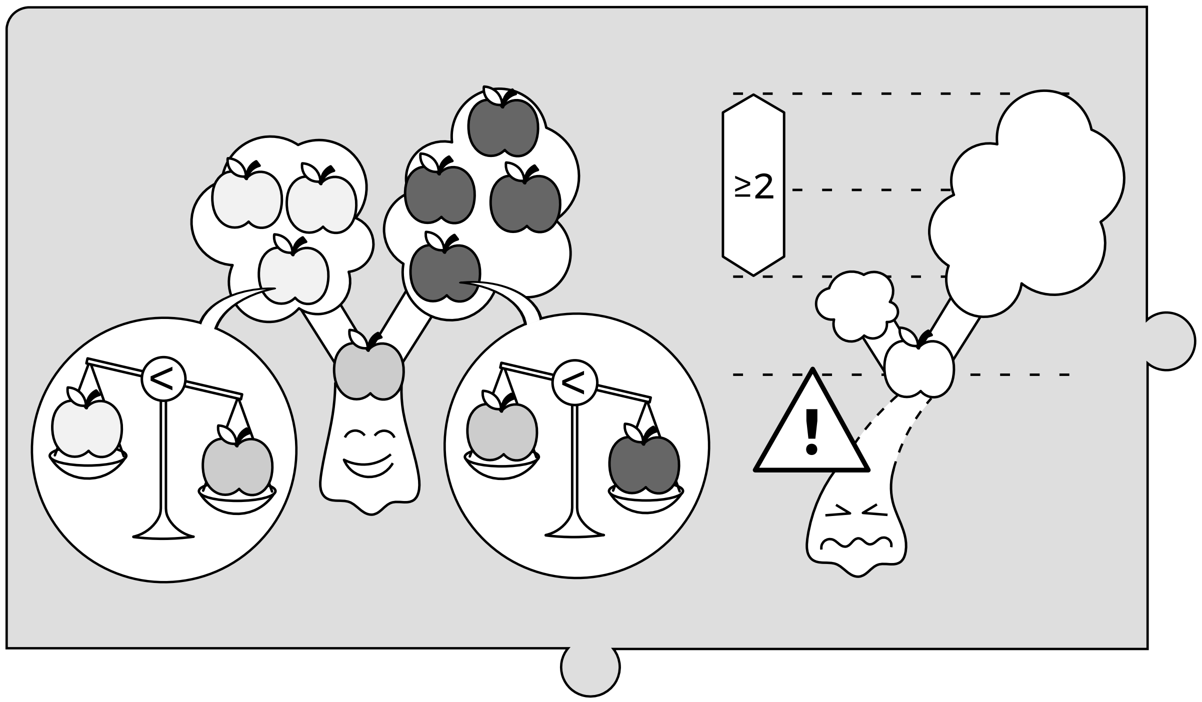


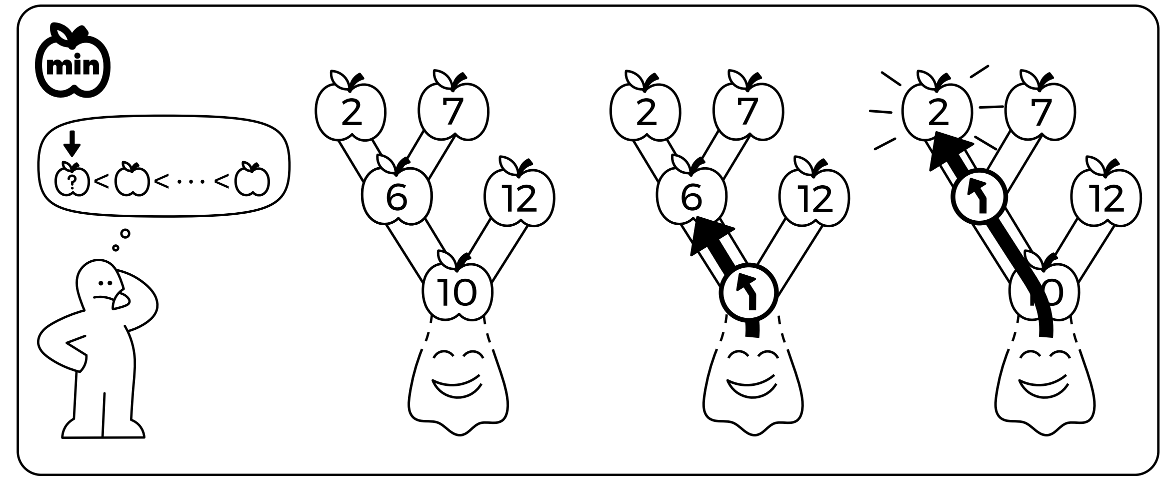
4.7 Fibonacci-Zahlen

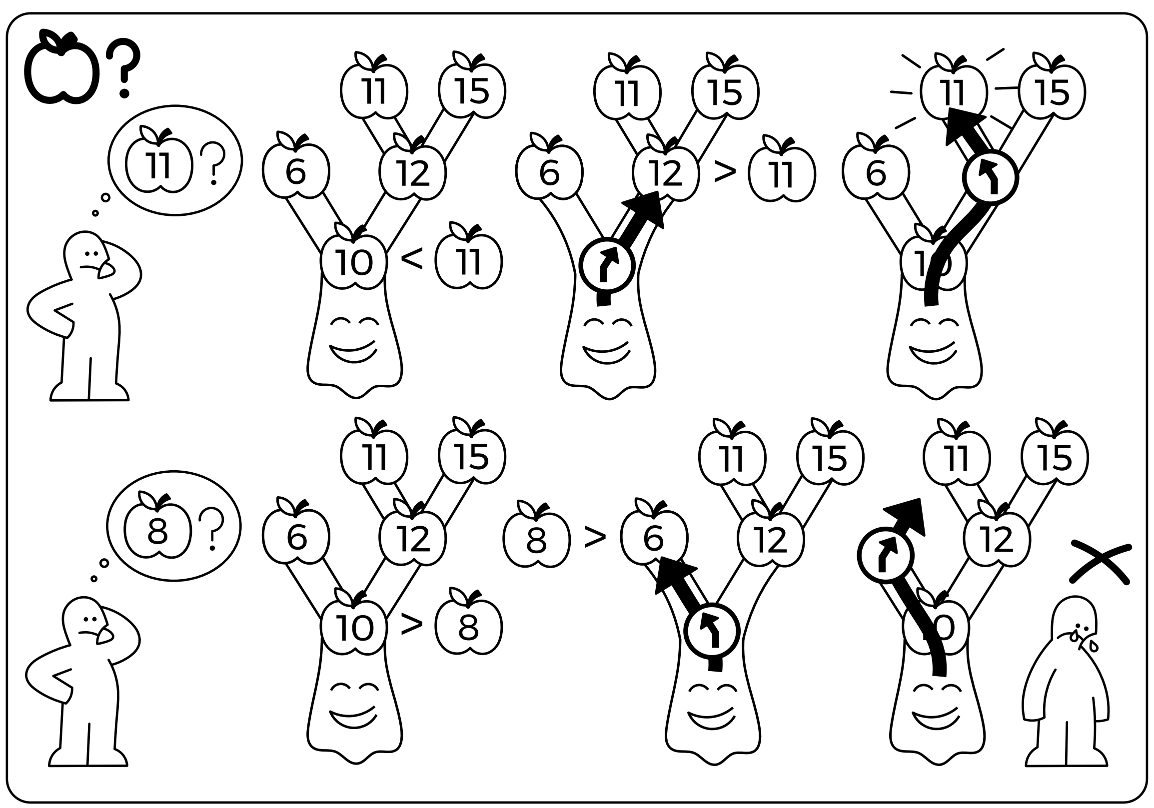
Leonardo da Pisa,
gen. Fibonacci
1180-1241

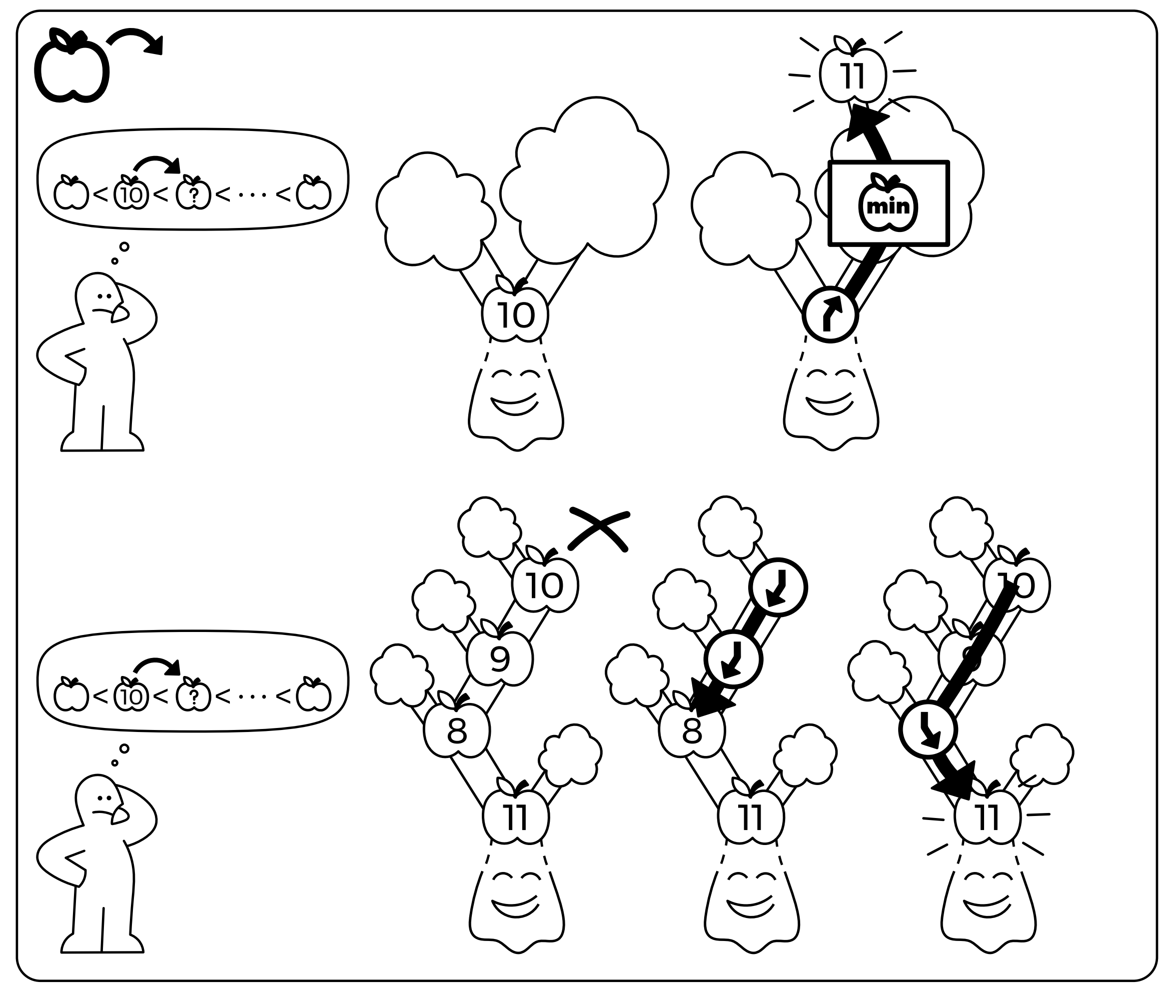
BÄLÄNCE TREE 1/2

idea-instructions.com/avl-tree/





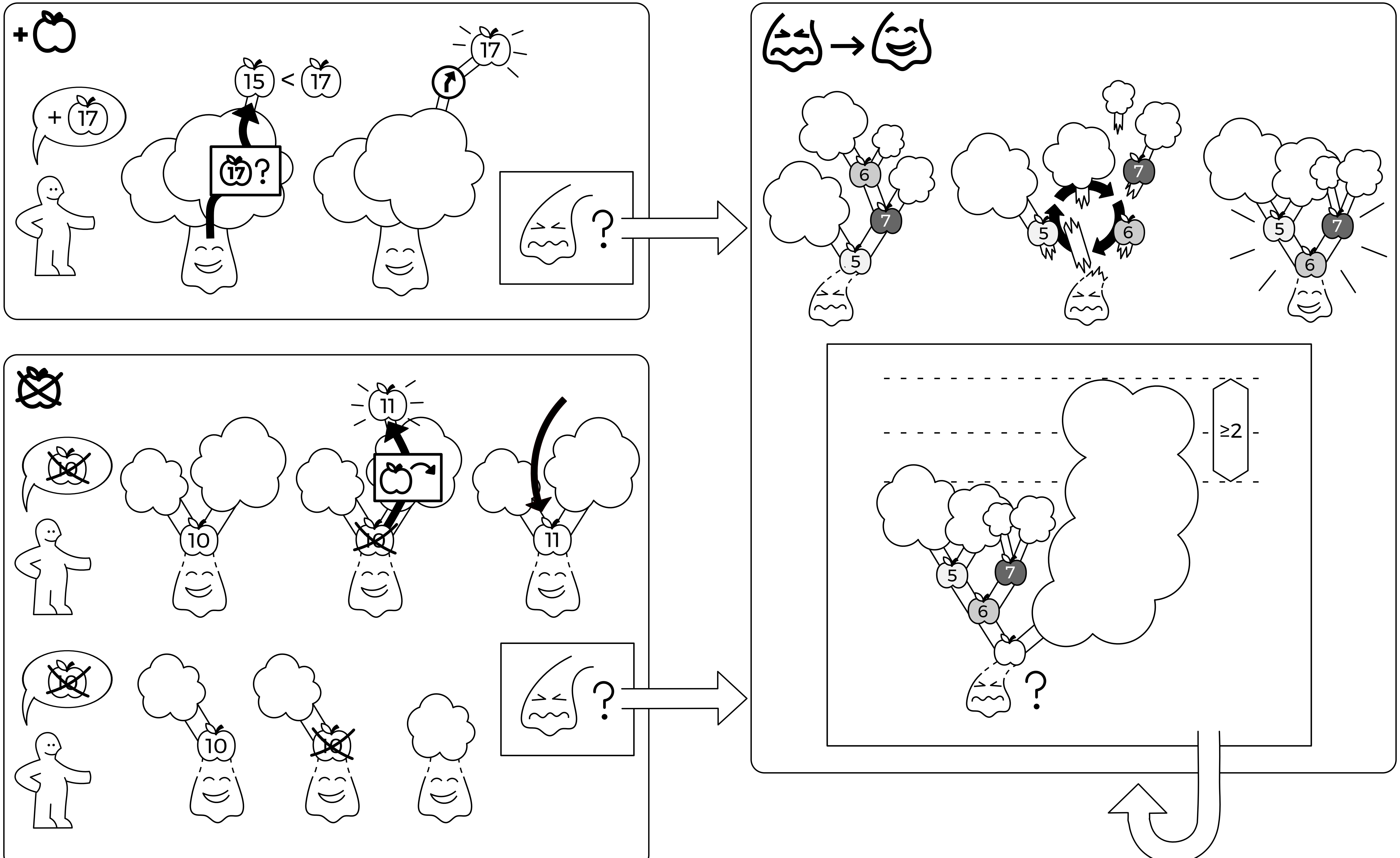




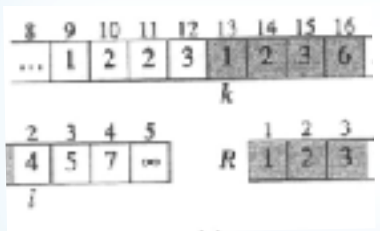
BÄLÄNCE TREE 2/2

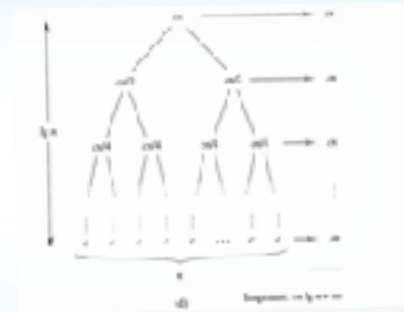
idea-instructions.com/avl-tree/

IDEA



Zusammenfassung Kapitel 4!





Kapitel 5: Sortieren

Algorithmen und Datenstrukturen
WS 2020/21

Prof. Dr. Sándor Fekete

Sortieren von Objekten

Gegeben: n Objekte unterschiedlicher Größe

23 17 13 19 33 28 15

Zahl der Vergleiche:

Gesucht: Eine Sortierung nach Größe

Sortieren von Objekten

Gegeben: n Objekte unterschiedlicher Größe

13 15 17 19 23 28 33

Zahl der Vergleiche:

Gesucht: Eine Sortierung nach Größe

Sortieren von Objekten

Gegeben: n Objekte unterschiedlicher Größe

13 15 17 19 23 28 33

Zahl der Vergleiche: $O(n^2)$

Gesucht: Eine Sortierung nach Größe

Sortieren von Objekten

Gegeben: n Objekte unterschiedlicher Größe

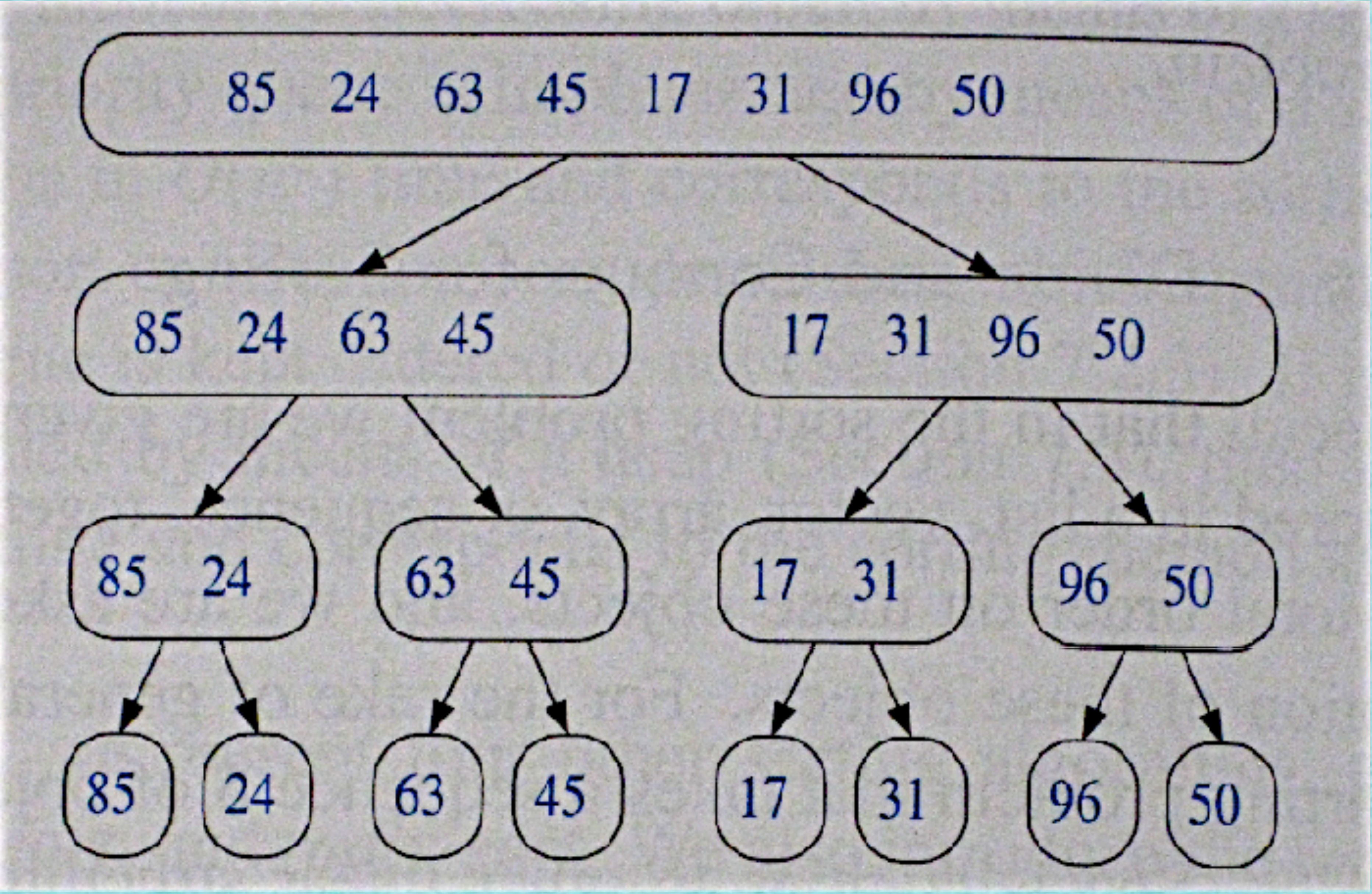
13 15 17 19 23 28 33

Zahl der Vergleiche: $O(n^2)$

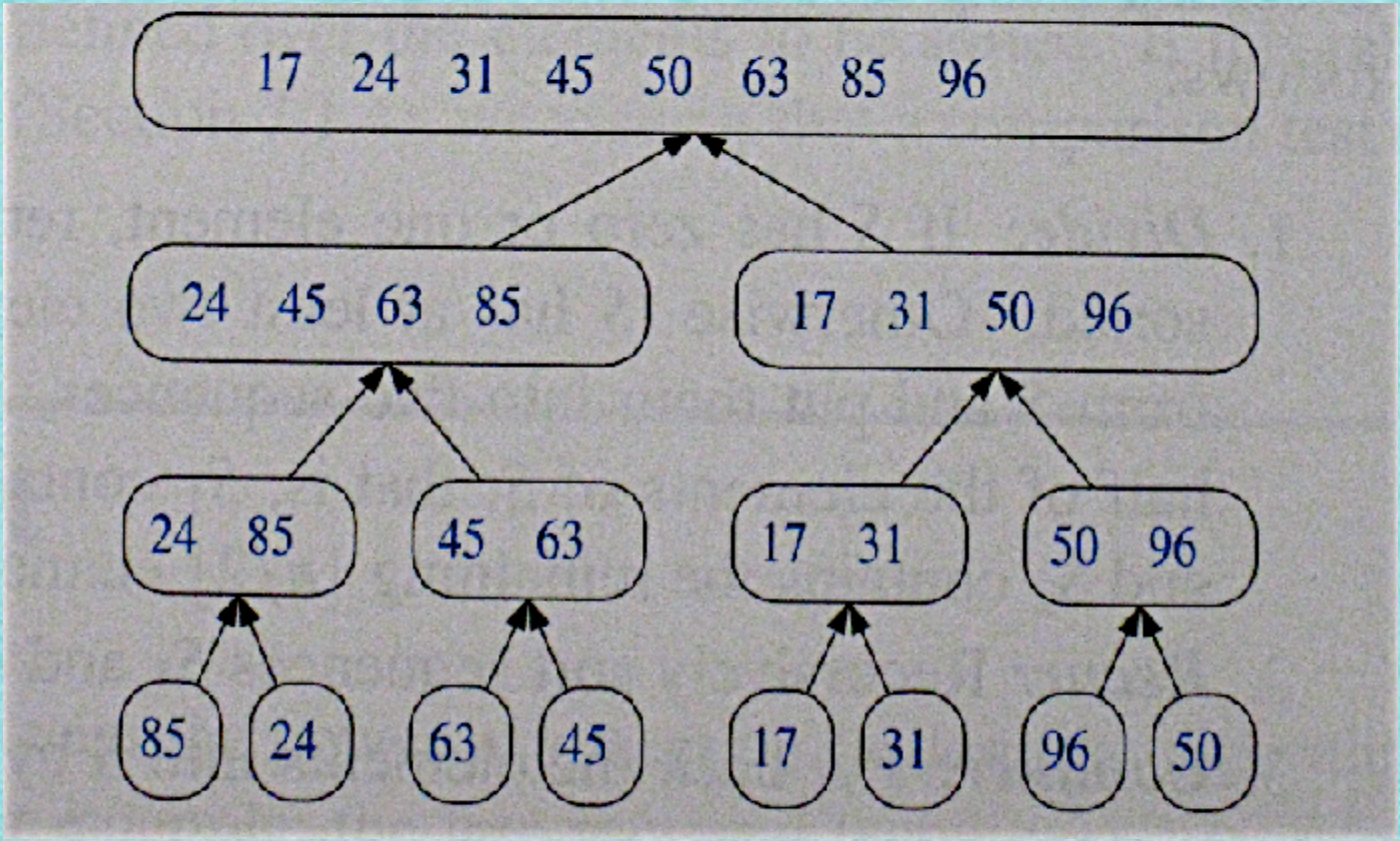
Gesucht: Eine Sortierung nach Größe

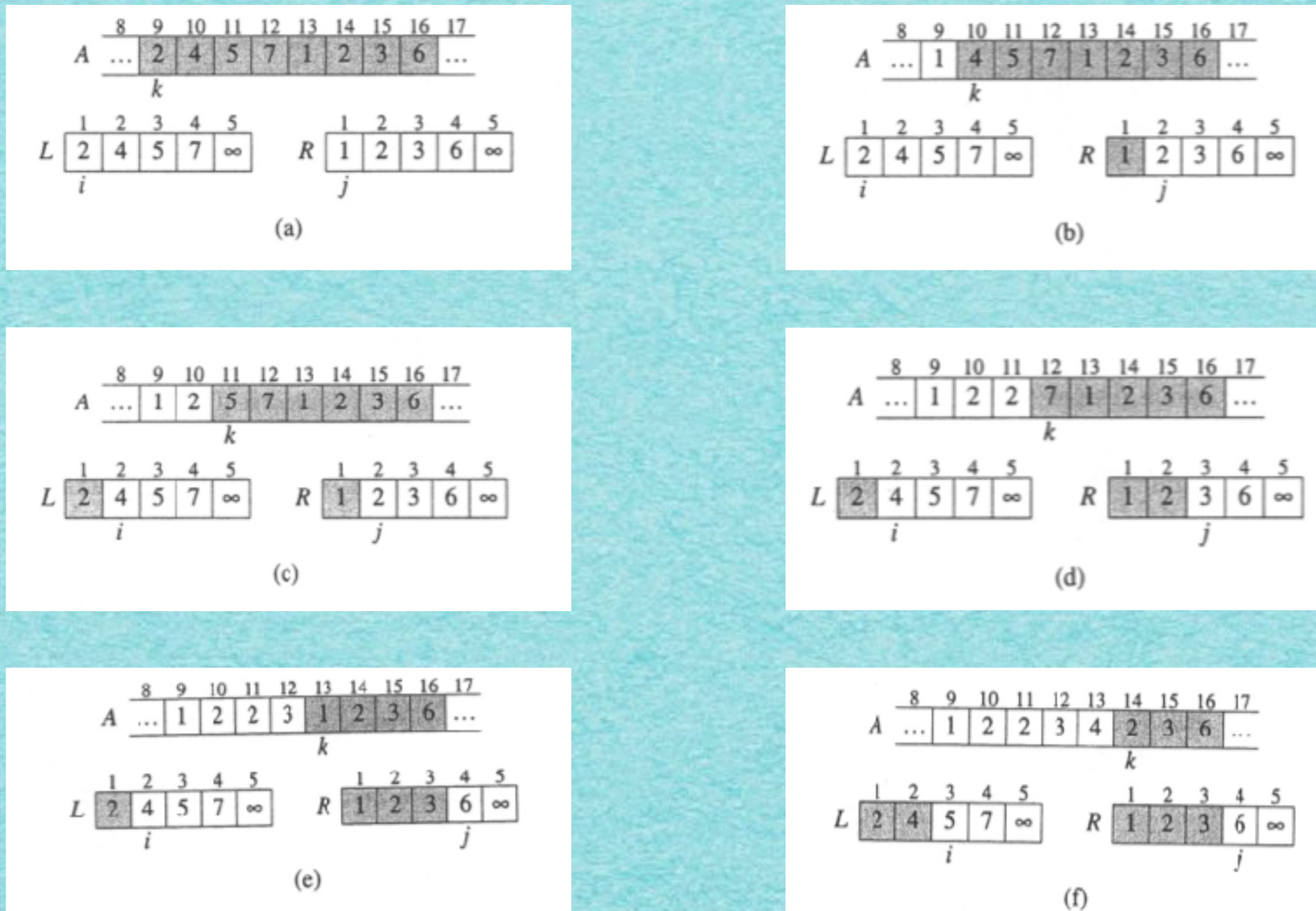
„Geht‘s nicht noch etwas schneller?“

5.2 Mergesort



5.2 Mergesort





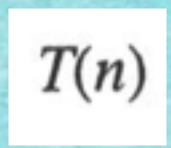
8 9 10 11 12 13 14 15 16 17
A … 2 4 5 7 1 2 3 6 …
k
1 2 3 4 5
L 2 4 5 7 ∞
i
R 1 2 3 6 ∞
j
(a)
A … 1 4 5 7 1 2 3 6 …
L 2 4 5 7 ∞
R 1 2 3 6 ∞
(b)
A … 1 2 5 7 1 2 3 6 …
L 2 4 5 7 ∞
R 1 2 3 6 ∞
(c)
A … 1 2 2 7 1 2 3 6 …
L 2 4 5 7 ∞
R 1 2 3 6 ∞
(d)
A … 1 2 2 3 1 2 3 6 …
L 2 4 5 7 ∞
R 1 2 3 6 ∞
(e)
A … 1 2 2 3 4 2 3 6 …
L 2 4 5 7 ∞
R 1 2 3 6 ∞
(f)

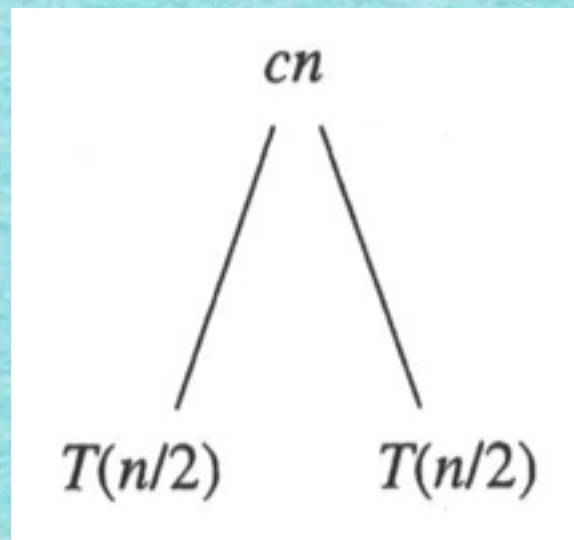
5.2.3 Laufzeit von Mergesort

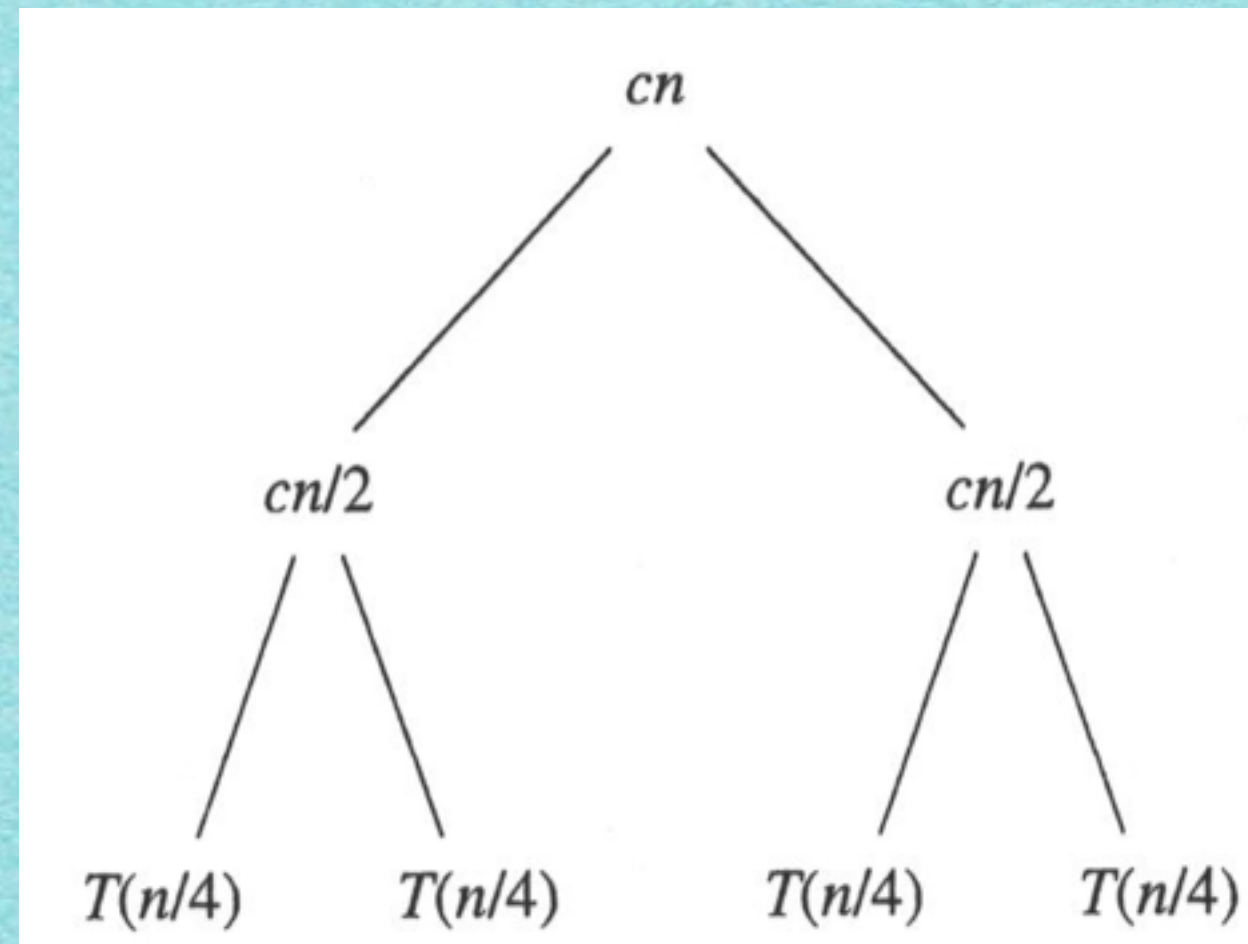
Wie viele Schritte benötigt Merge-Sort für einen Array der Länge n?

$$T(n)$$

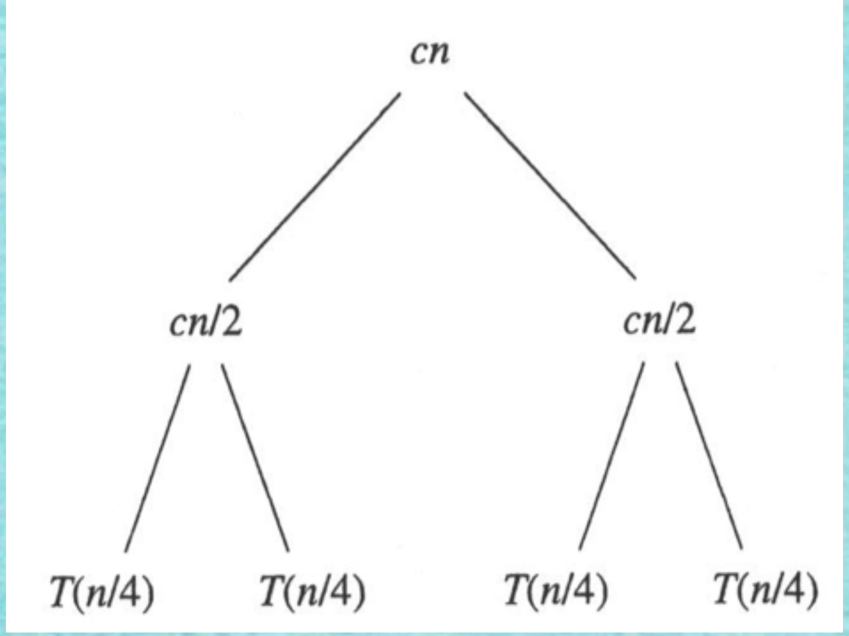
5.1.3 Laufzeit von Mergesort

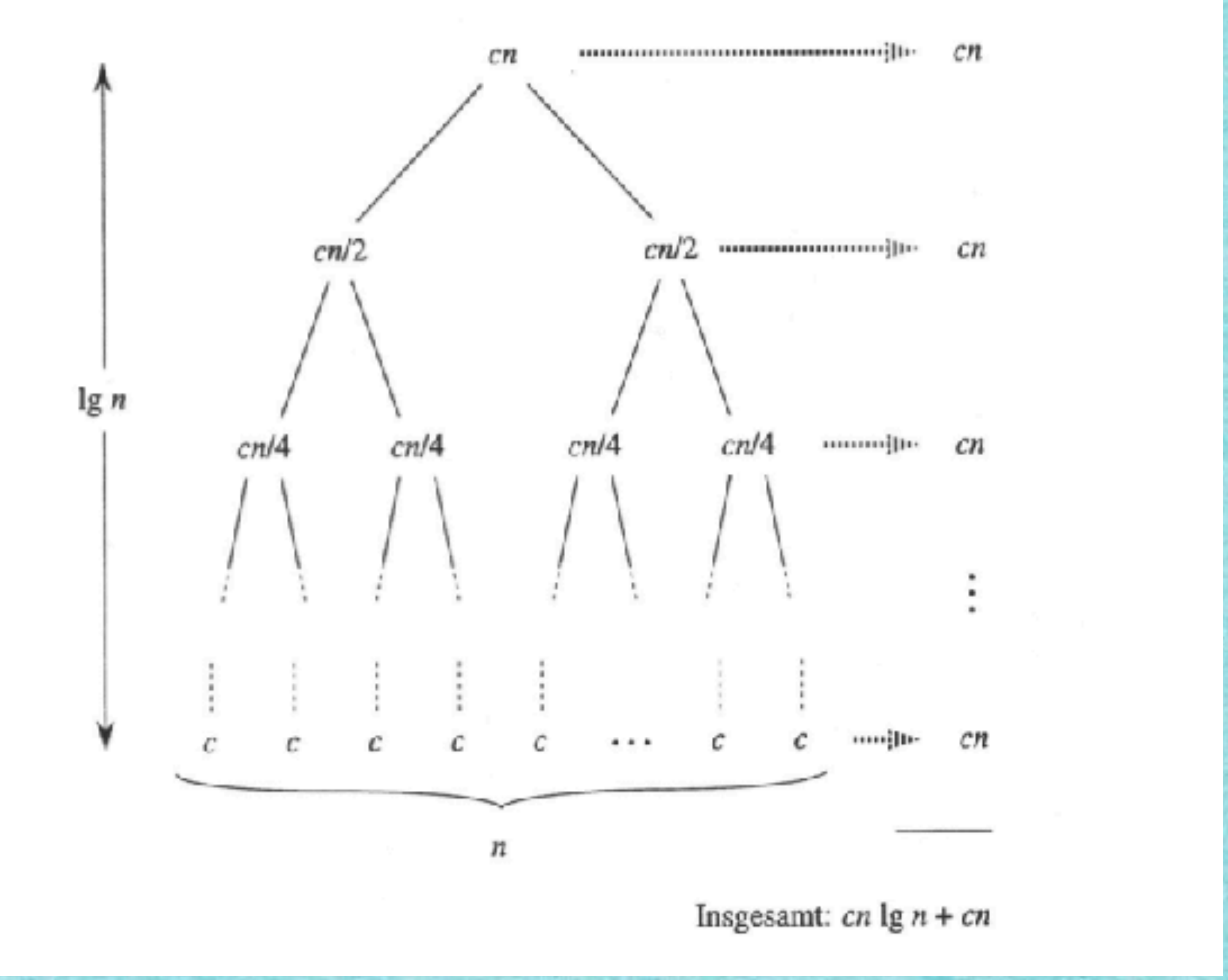






5.2.3 Laufzeit von Mergesort



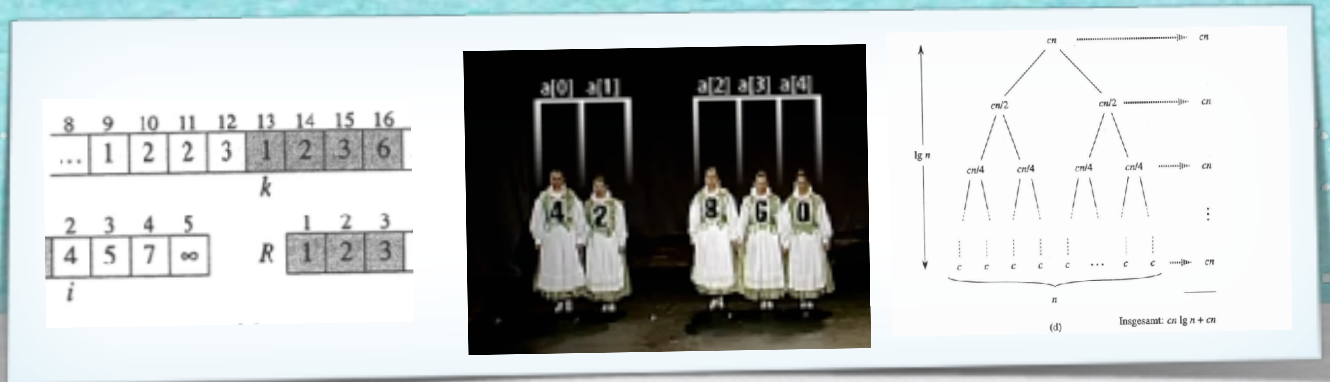


<u>Satz 5.7 (Komplexität von Mergesort)</u>
Für einen n-elementigen Array A hat Mergesort eine Laufzeit von O(n log n).

Satz 5.6. *Für n Objekte $x_1, \ldots, x_n$*

benötigt man zum Sortieren mindestens $\Omega(n \log(n))$,

wenn man die Objekte nur paarweise vergleichen kann.



Kapitel 5.3: Behandeln von Rekursionen

Algorithmen und Datenstrukturen WS 2020/21

Prof. Dr. Sándor Fekete

5.3.1 Substitutionsmethode

5.3 Behandeln von Rekursionen

35

Welche Möglichkeiten gibt es, Rekursionsgleichungen zu lösen?

5.3.1 Substitutionsmethode

Wie gesehen!

(1) Rate eine Lösung.

(2) Beweise die Richtigkeit per Vollständiger Induktion.

Das haben wir im Beweis von Satz 5.7 angewendet.

Schwierigkeit: Gute Lösung finden!
(In der Regel ist man an einer möglichst genauen Lösung interessiert – das kann schwer bis unmöglich sein!)

Oft kann man aber Abschätzungen gewinnen, z.B.

$$T(n) \in \Omega(n)$$
$$T(n) \in O(n^2)$$

5.3.2 Erzeugende Funktionen

5.3.2 Erzeugende Funktionen

Man kann Rekursionen auch oft lösen, indem man sie in einen abstrakt-formalen Kontext einbettet und die dafür bekannten Rechenregeln anwendet.

Dafür betrachten wir

(36)

DEFINITION 5.8 (Erzeugende Funktion)

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Zahlenfolge mit $a_n \in \mathbb{R}$.

Dann heißt $\quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$

die (gewöhnliche) erzeugende Funktion von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Beispiel

(a) $\quad a_n = 2a_{n-1}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$

$a_0 = 1$

$a_1 = 2, \quad a_2 = 4, \quad a_3 = 8$

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\varphi^n - \bar{\varphi}^n \right)$$

bzw. (ganz explizit!)

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

5.3.3 Master-Theorem: Lineare Rekursionen

5.3.3 Master-Theorem: Lineare Rekursionen

<u>Satz 5.9</u> (Master-Theorem)

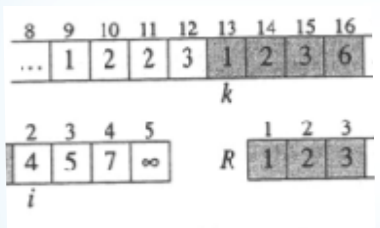
Sei $T: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit

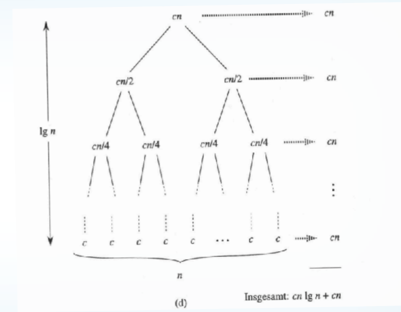
$$T(n) = \sum_{i=1}^{m} T(\alpha_i \cdot n) + \Theta(n^k),$$

wobei $\alpha_i \in \mathbb{R} : 0 < \alpha_i < 1$, $m \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{R}$.

Dann gilt

$$T(n) \in \begin{cases} \Theta(n^k) & \text{für } \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^k < 1 \\ \Theta(n^k \log n) & \text{für } \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^k = 1 \\ \Theta(n^c) \text{ mit } \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^c = 1 & \text{für } \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^k > 1 \end{cases}$$





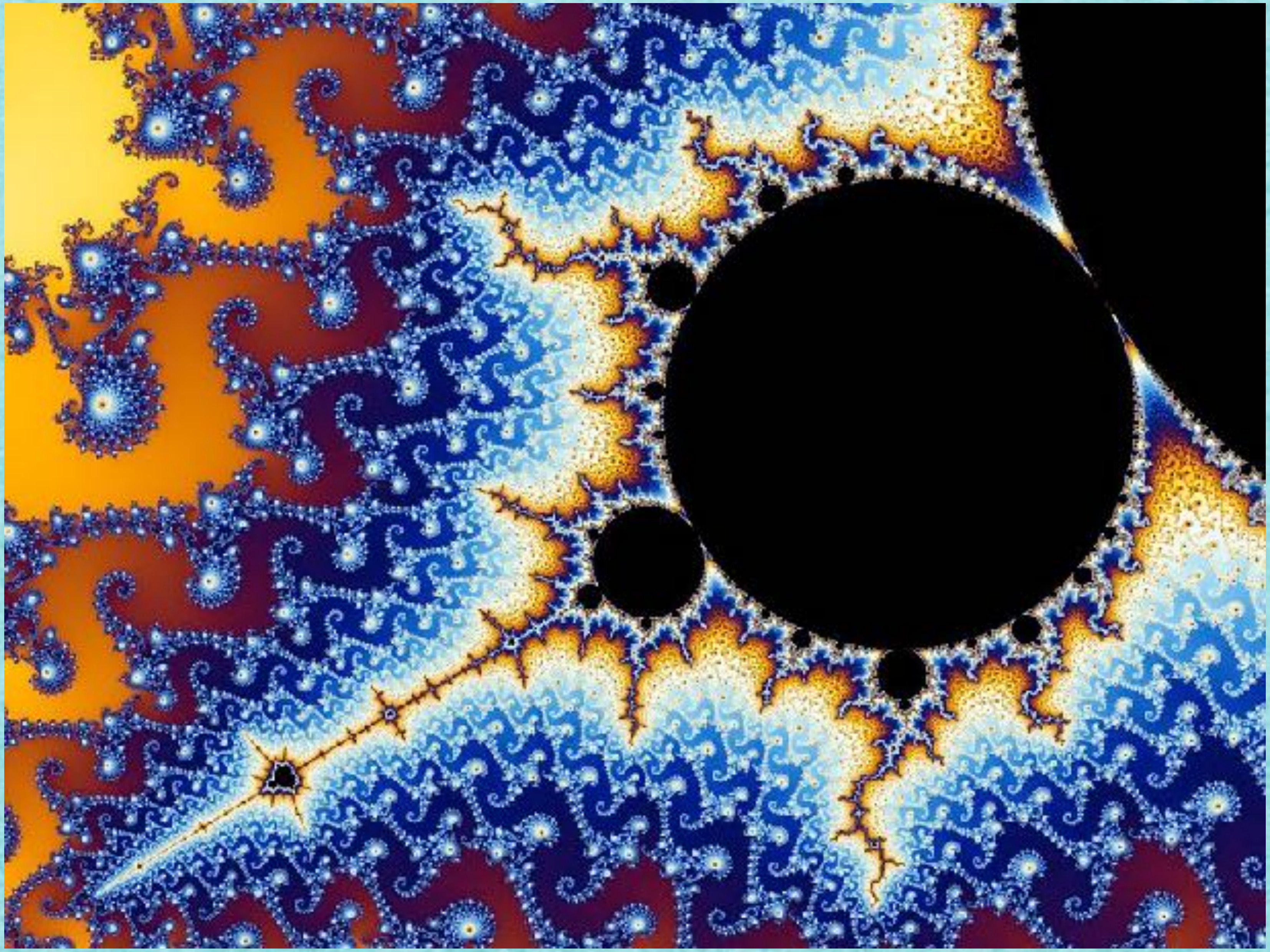
Kapitel 5.5: Nichtlineare Rekursionen

Algorithmen und Datenstrukturen
WS 2020/21

Prof. Dr. Sándor Fekete

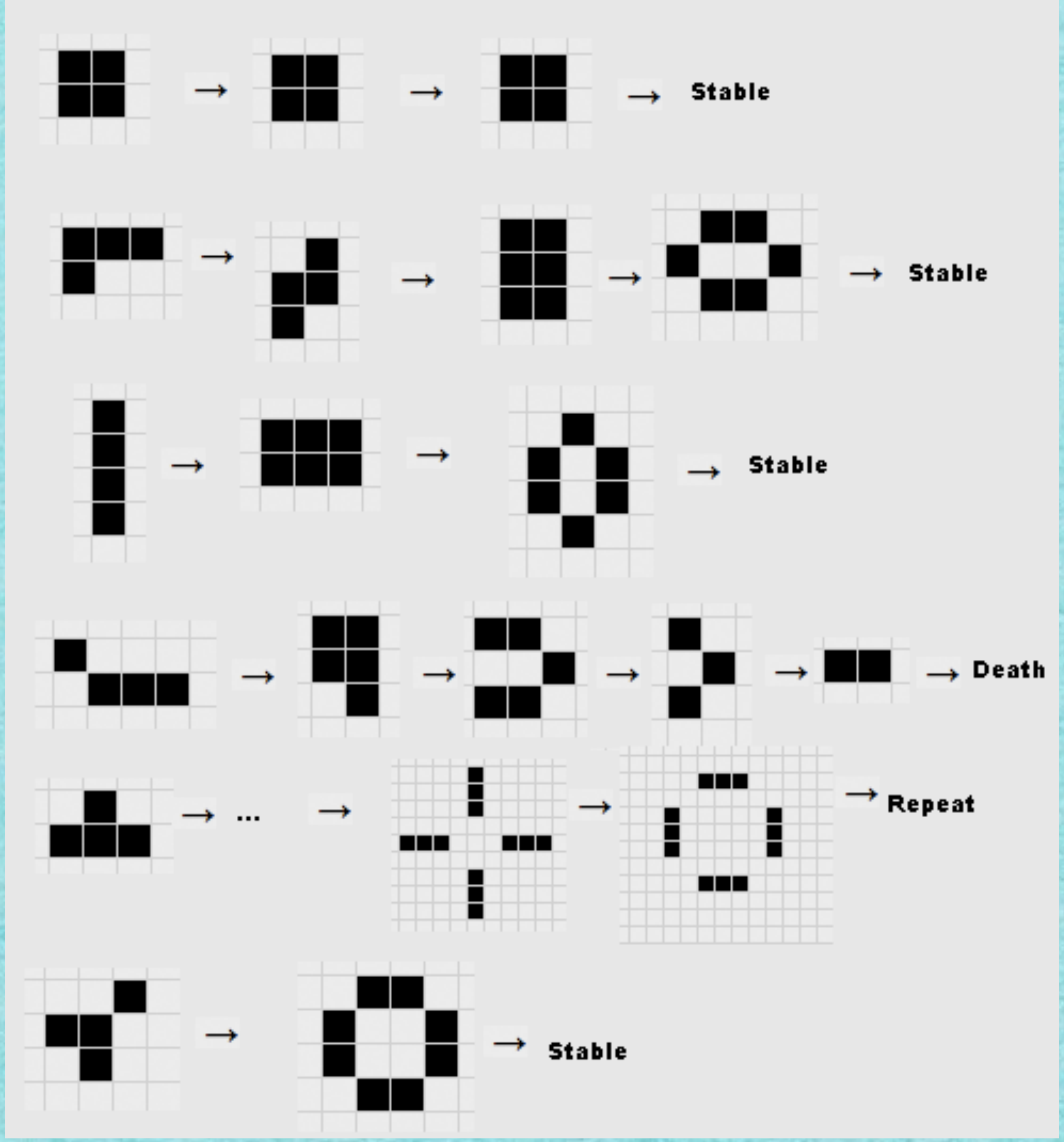
54.2 Die Mandelbrotmenge

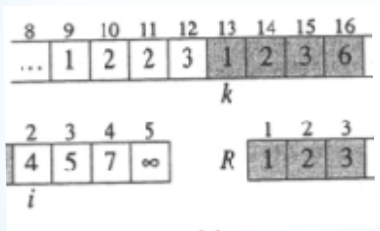
Ausschnitt:

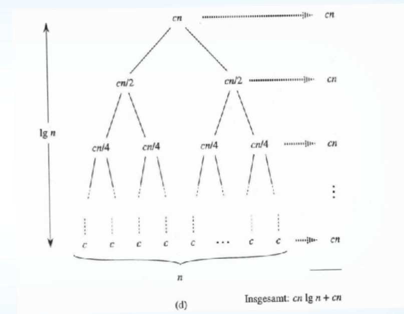


-> Filme!

5.4.4 Zelluläre Automaten







Kapitel 5.5: Quicksort

Algorithmen und Datenstrukturen
WS 2020/21

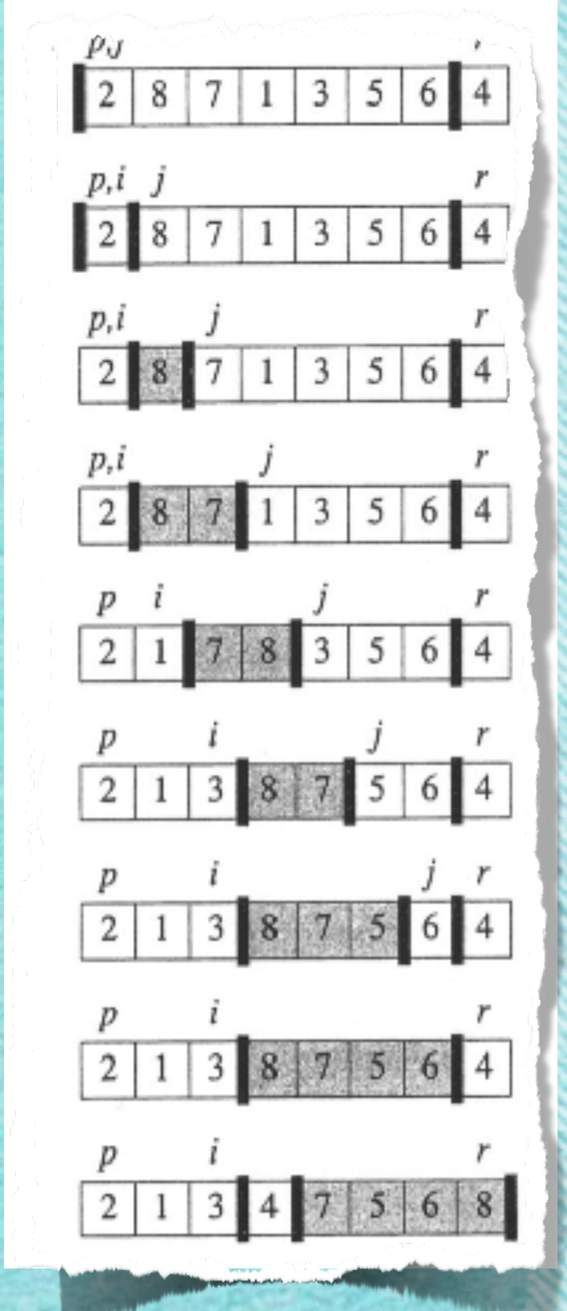
Prof. Dr. Sándor Fekete

Subroutine 5.1 2

INPUT:	Subarray von A=[1,...,n], d.h. A[p,...,r]
OUTPUT:	Zwei Subarrays A[p,...,q-1] und A[q+1,...,r] mit A[i]≤A[q] und A[q]<A[j] für i=p,...,q-1 und j=q+1,...,r

PARTITION(A, p, r)

$x \leftarrow A[r]$
$i \leftarrow p - 1$
for $j \leftarrow p$ **to** $r - 1$
    do if $A[j] \leq x$
        then $i \leftarrow i + 1$
            vertausche $A[i] \leftrightarrow A[j]$
vertausche $A[i+1] \leftrightarrow A[r]$
return $i + 1$



<u>Satz (Komplexität von Quicksort)</u>
Für einen n-elementigen Array A hat Mergesort eine erwartete Laufzeit von O(n log n).

46

Wir müssen also die Wahrscheinlichkeit bestimmen, dass s_i und s_j verglichen werden.

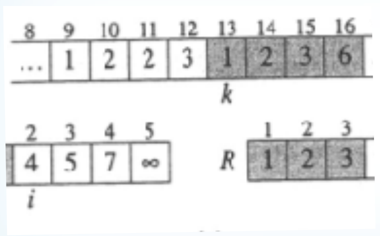
Dafür betrachten wir

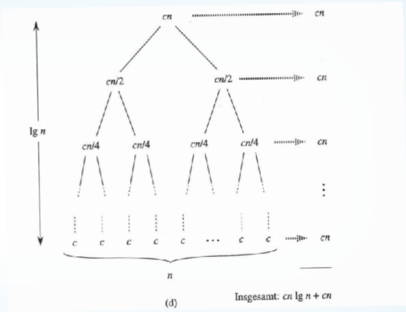
$$S_{ij} := \{ s_i, \dots, s_j \}. \qquad \underline{| s_i | \cdots | s_j |}$$

Dann ist

$$P(s_i \text{ wird mit } s_j \text{ verglichen}) = P(s_i \text{ oder } s_j \text{ ist erster Pivot in } S_{ij}).$$

Denn wird s_i oder s_j gewählt, wird es mit allen anderen verglichen; wird aber zuerst ein Pivot dazwischen gewählt, werden s_i und s_j getrennt und nicht mehr verglichen!





Kapitel 5.7: Mediane

Algorithmen und Datenstrukturen
WS 2020/21

Prof. Dr. Sándor Fekete

[Blum, Floyd, Pratt, Rivest, Tarjan 1973]

Satz 5.23

Der Median für n Zahlen kann in $\mathcal{O}(n)$ berechnet werden.

Beweisidee:

$$X = \{1, 22, 10, 13, 24, 6, 18, 21, 4, 25, 11, 16, 2, 20, 8, 17, 5, 12, 19, 14, 3, 9, 15, 7, 23\}$$

- Gruppiere die Zahlen in Fünfergruppen.

1	6	11	17	3
22	18	16	5	9
10	21	2	12	15
13	4	20	19	7
24	25	8	14	23

$\boxed{\mathcal{O}(n)}$

- Sortiere die Fünfergruppen.

1	4	2	5	3
10	6	8	12	7
13	18	11	14	9
22	21	16	17	15
24	25	20	19	23

$\boxed{\mathcal{O}(n)}$

Beweisidee (Forts.):

- Berechne den Median der Mediane.

1	4	2	5	3
10	6	8	12	7
13	18	11	14	9
22	21	16	17	15
24	25	20	19	23

$$\boxed{T(\frac{n}{5})}$$

- Verwende den Median der Mediane als Pivot, um die Menge zu reduzieren.

≥ n/4 Zahlen

≥ n/4 Zahlen

3	2	1	5	4
7	8	10	12	6
9	11	13	14	18
15	16	22	17	21
23	20	24	19	25

$$\boxed{T(\frac{3n}{4})}$$

$$T(n) = \boxed{T(\frac{n}{5})} + \boxed{T(\frac{3n}{4})} + \boxed{\Theta(n)}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i^k = \frac{1}{5} + \frac{3}{4} = \frac{19}{20} < 1.$$

Beweisidee (Forts.):

- Berechne den Median der Mediane.

1	4	2	5	3
10	6	8	12	7
13	18	11	14	9
22	21	16	17	[illegible]
24	25	[illegible]	[illegible]	[illegible]

$$\boxed{T(\frac{n}{5})}$$

- Verwende den Median der M[illegible] [illegible]eren.

$$T(n) \in \Theta(n^k) = \Theta(n)$$

[illegible] Zahlen

[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	6
[illegible]	[illegible]	13	14	18
15	16	22	17	21
23	20	24	19	25

$$\boxed{T(\frac{3n}{4})}$$

$$T(n) = \boxed{T(\frac{n}{5})} + \boxed{T(\frac{3n}{4})} + \boxed{\Theta(n)}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i^k = \frac{1}{5} + \frac{3}{4} = \frac{19}{20} < 1.$$

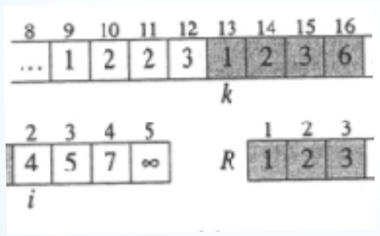
Technische Universität Braunschweig

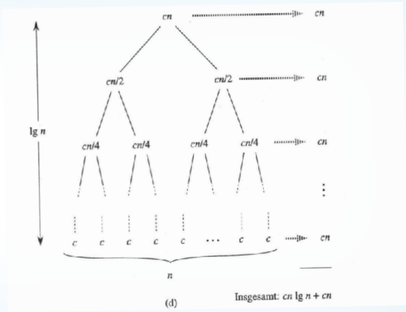
5.6.2 Laufzeit

$$T(n) = T\left(\frac{n}{5}\right) + T\left(\frac{7n}{10}\right) + \Theta(n)$$

FRAGE 5.24

Was passiert, wenn man Dreier- statt Fünfergruppen verwendet?
Was passiert bei Siebenergruppen?





Kapitel 5.8: Sortieren in Linearzeit

Algorithmen und Datenstrukturen
WS 2020/21

Prof. Dr. Sándor Fekete

5.7.1 Countingsort

48

5.7 Sortieren in linearer Zeit

In Satz 5.4 haben wir gezeigt, dass das Sortieren von n Objekten nicht schneller als in $\Omega(n \log n)$ möglich ist - vorausgesetzt, man kann dafür keine Zusatzinformation einsetzen und darf Objekte nur paarweise vergleichen (und ggf. vertauschen).

In vielen Situationen hat man aber zusätzliche Informationen! Das wollen wir hier analysieren.

5.7.1 Countingsort

Im einfachsten Fall sind die n Objekte Zahlen aus dem Bereich $1, \dots, k$.

5.7.2 Radixsort

50

5.7.2 Radixsort

Idee: Sortiere nicht gleich nach den Schlüsselwerten, sondern nach den Ziffern der Schlüssel!

(Früher sehr häufig bei Lochkarten eingesetzt.)

Naiver Ansatz: Sortiere nach größter Ziffer, dann nach zweiter Ziffer, ...

Problem: Entweder benötigt man viele temporäre Zwischenmengen - oder die Vorsortierung geht kaputt!

Besserer Ansatz: Sortiere nach letzter Ziffer, dann nach vorletzter Ziffer, ...

Beispiel:

329		720		720		329
457		355		329		355
657		436		436		436
839	→	457	→	839	→	457
436		657		355		657
720		329		457		720
355		839		657		839

Wichtig: Jeweilige Sortierung darf Reihenfolge gleichwertiger Ziffern nicht verändern!

50

5.7.2 Radixsort

Idee: Sortiere nicht gleich nach den Schlüsselwerten, sondern nach den Ziffern der Schlüssel!

(Früher sehr häufig bei Lochkarten eingesetzt.)

Naiver Ansatz: Sortiere nach größter Ziffer, dann nach zweiter Ziffer, ...

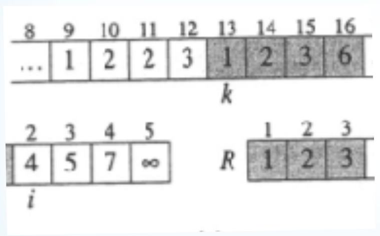
Problem: Entweder benötigt man viele temporäre Zwischenmengen - oder die Vorsortierung geht kaputt!

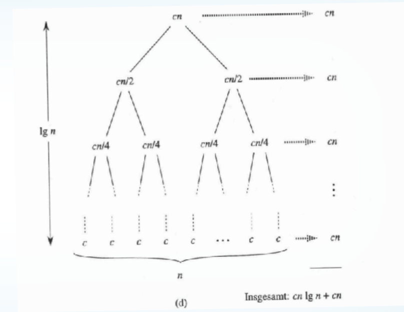
Besserer Ansatz: Sortiere nach letzter Ziffer, dann nach vorletzter Ziffer, ...

Beispiel:

329		720		720		329
457		355		329		355
657		436		436		436
839	→	457	→	839	→	457
436		657		355		657
720		329		457		720
355		839		657		839

Wichtig: Jeweilige Sortierung darf Reihenfolge gleichwertiger Ziffern nicht verändern!

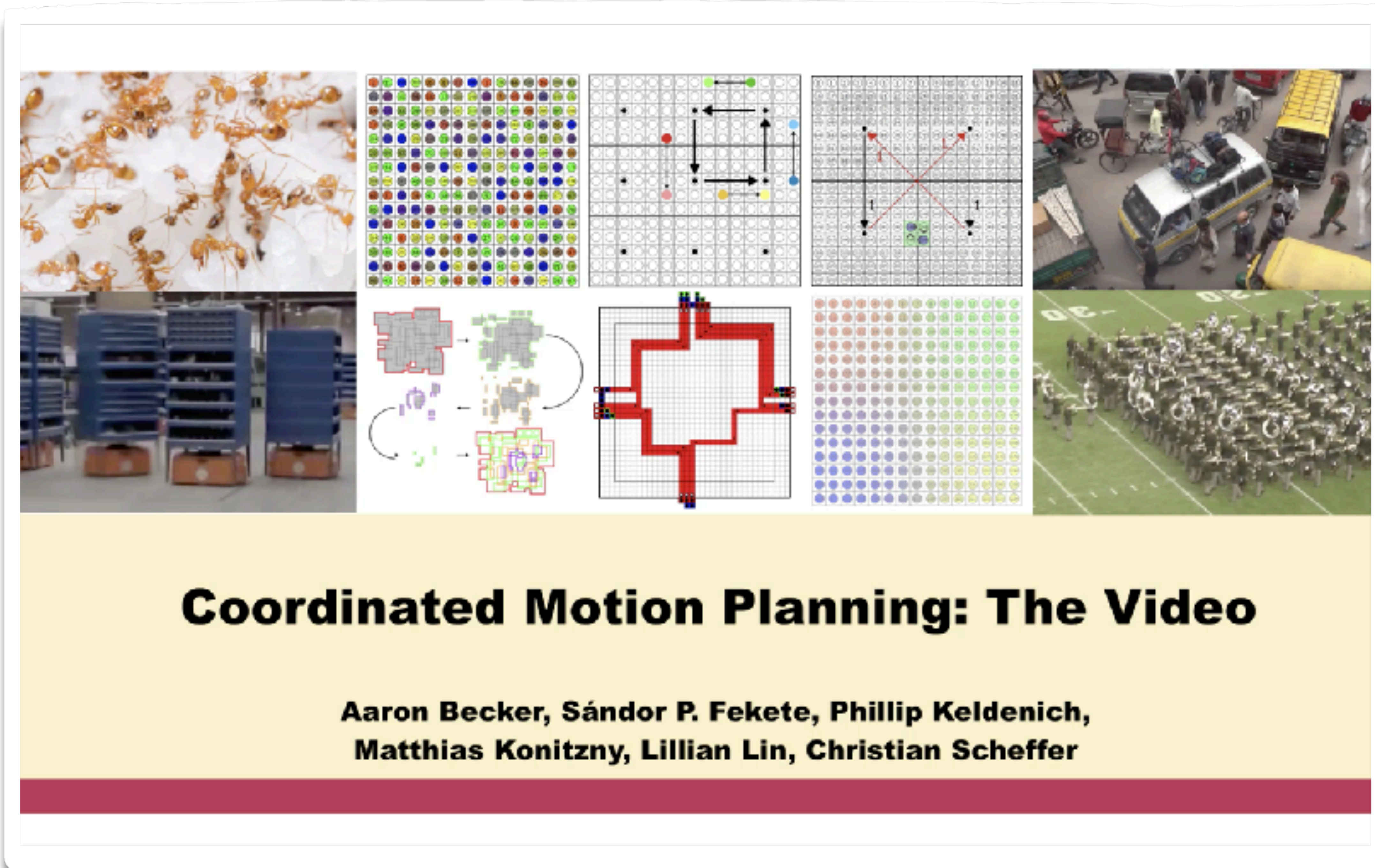


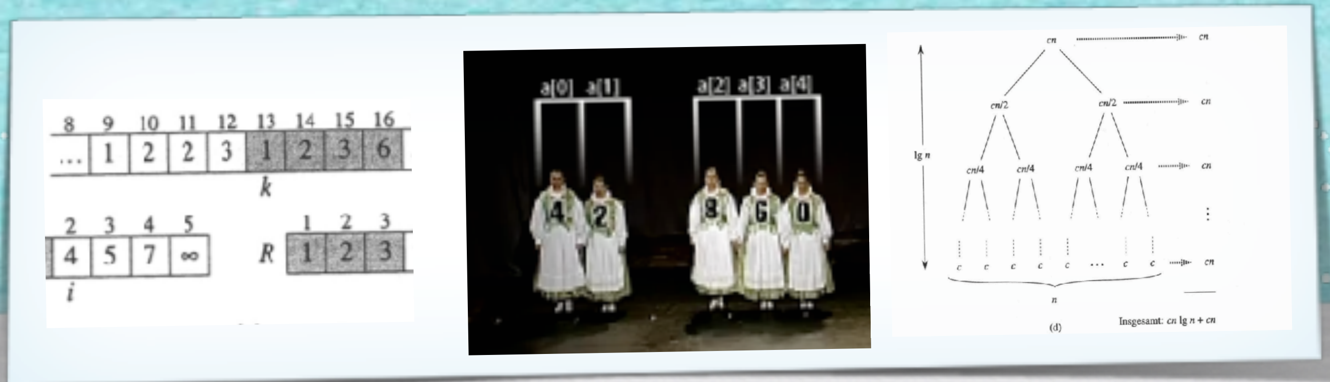


Kapitel 5.9: Paralleles Sortieren

Algorithmen und Datenstrukturen
WS 2020/21

Prof. Dr. Sándor Fekete


Coordinated Motion Planning: The Video
Aaron Becker, Sándor P. Fekete, Phillip Keldenich,
Matthias Konitzny, Lillian Lin, Christian Scheffer

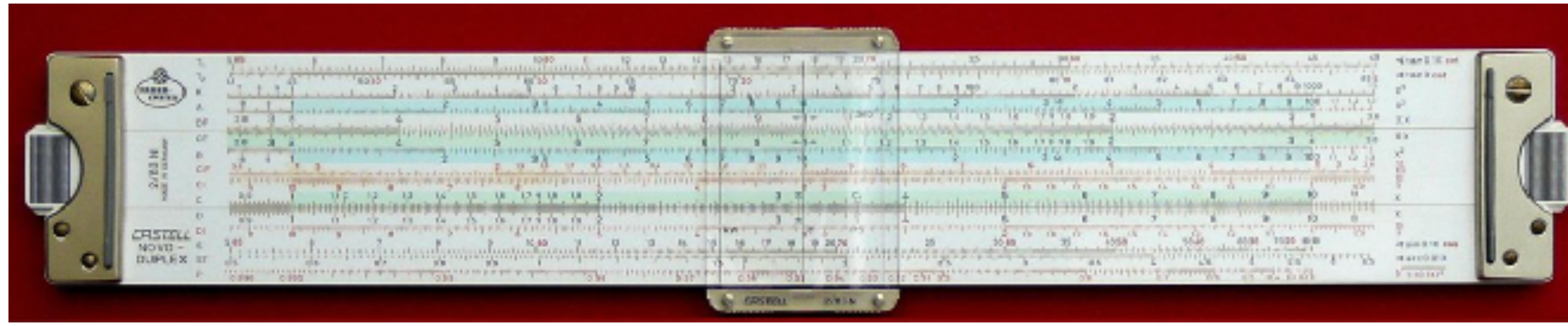


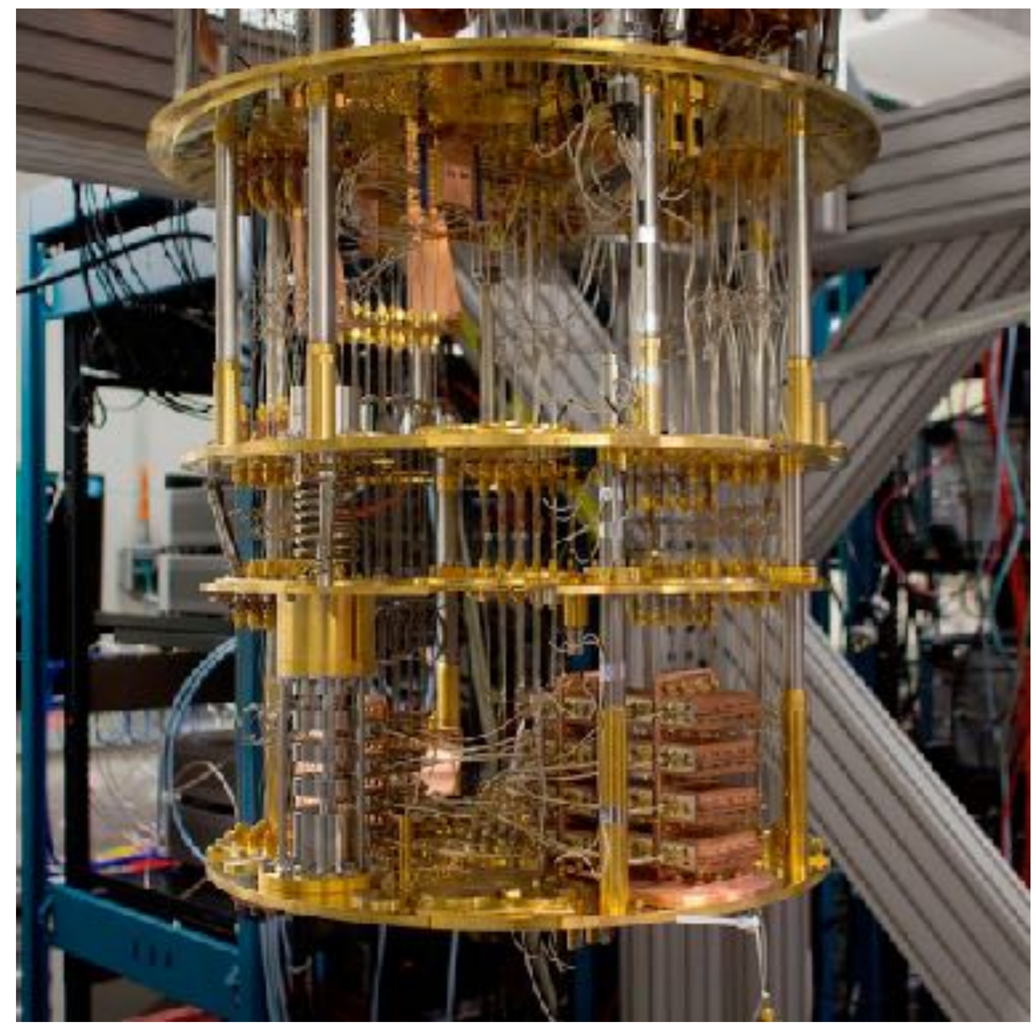
Kapitel 5.10: Analoge Verfahren

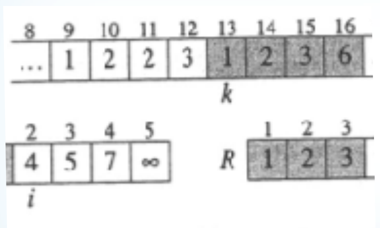
Algorithmen und Datenstrukturen WS 2020/21

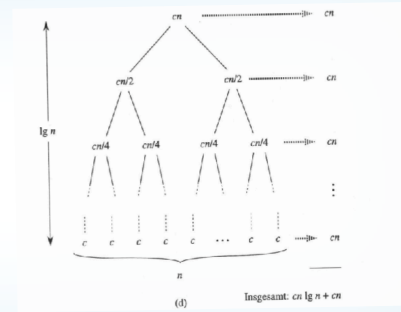
Prof. Dr. Sándor Fekete

Analogrechner









Kapitel 5.11: Unernste Sortierverfahren

Algorithmen und Datenstrukturen WS 2020/21

Prof. Dr. Sándor Fekete

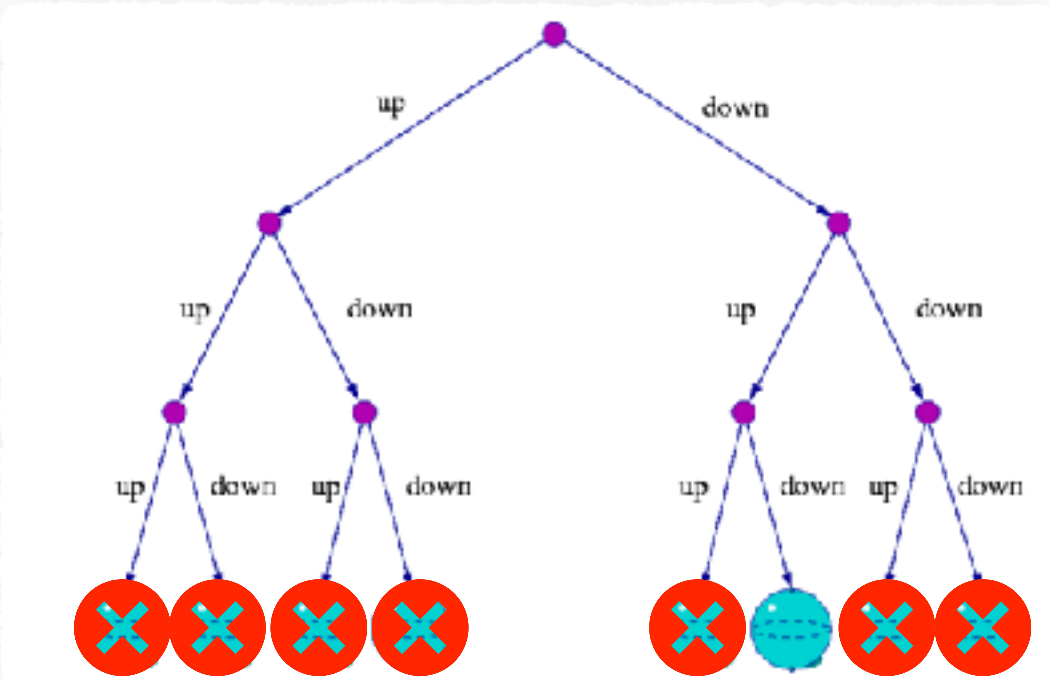
ALGORITHMUS 5.30 (Quantum Bogosort)

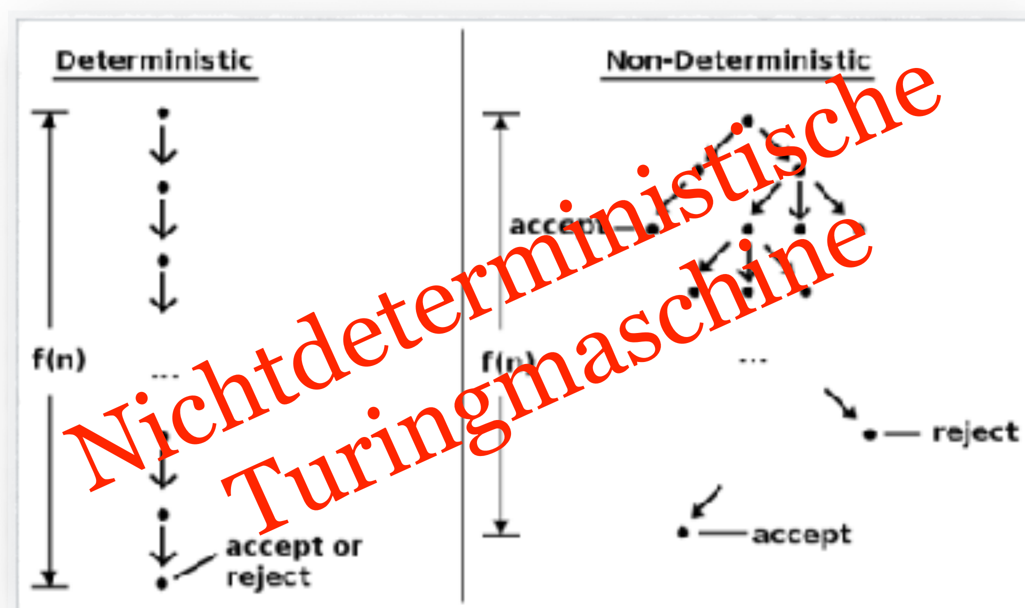
INPUT: n Zahlen $A[1], \dots, A[n]$

OUTPUT: Sortierter Array in geeignetem Universum

1. Permutiere zufällig
2. IF (Permutation unsortiert)

   2.1 Zerstöre Universum



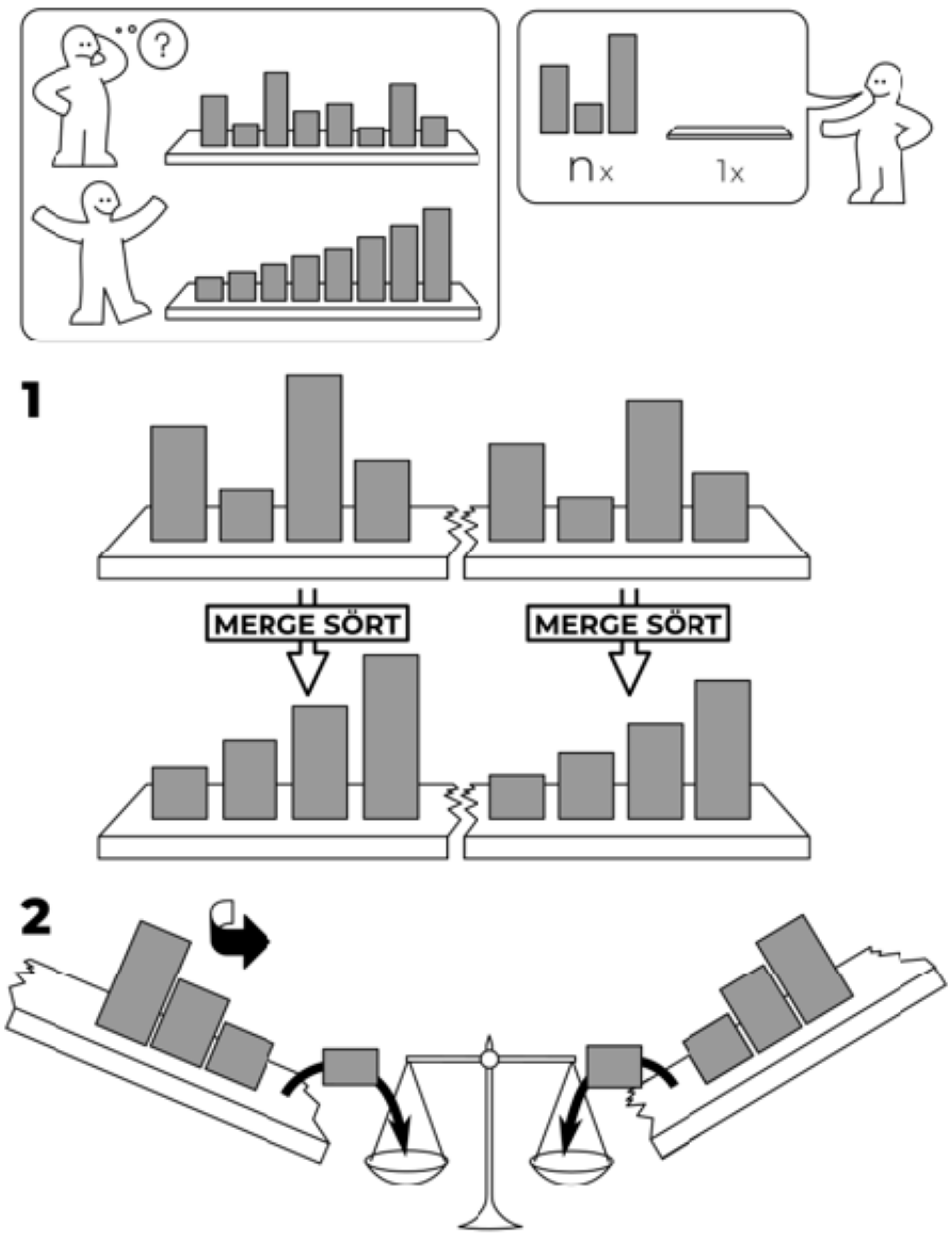


Technische Universität Braunschweig

MERGE SÖRT

idea-instructions.com/merge-sort/

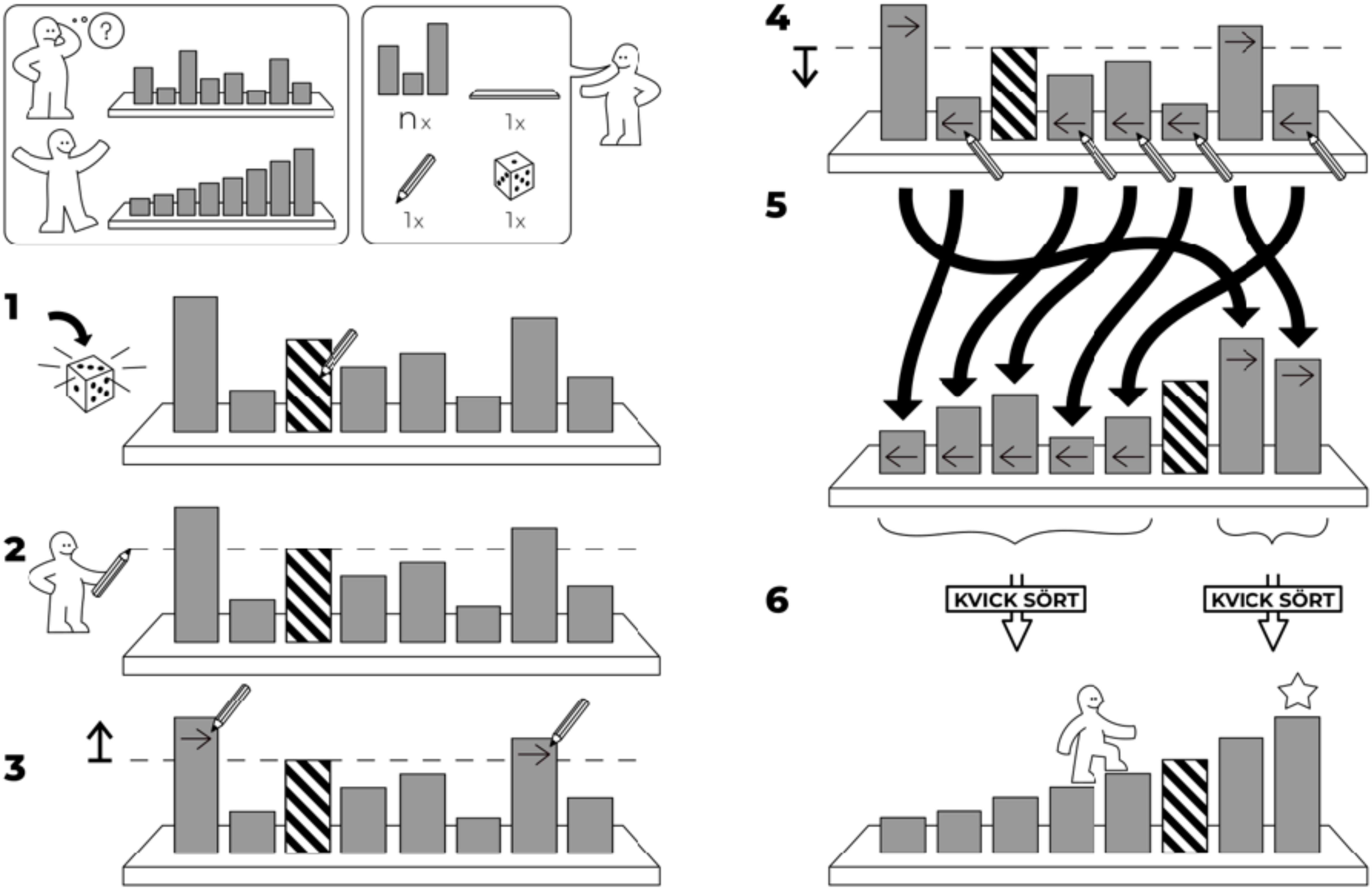
IDEA



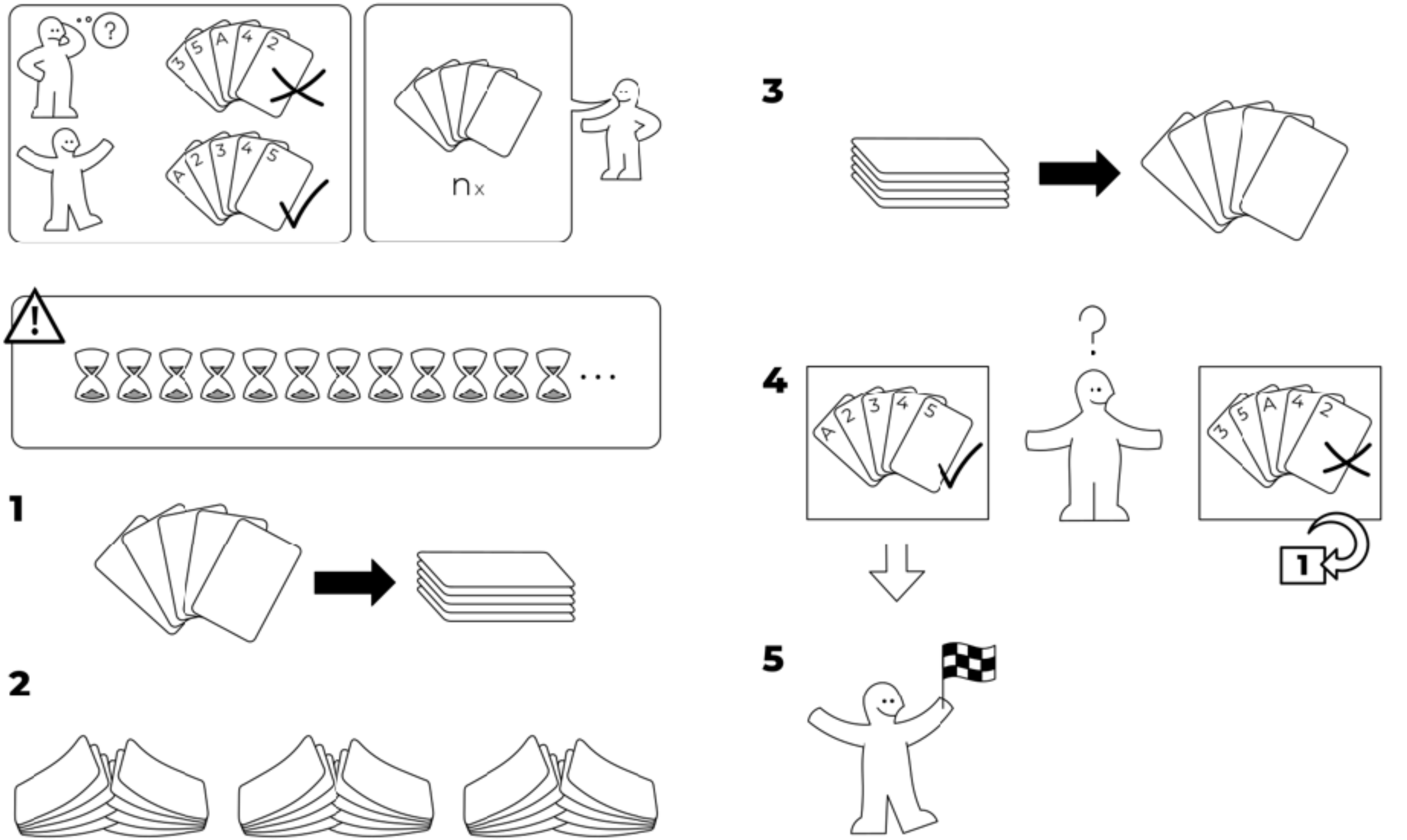
KVICK SÖRT

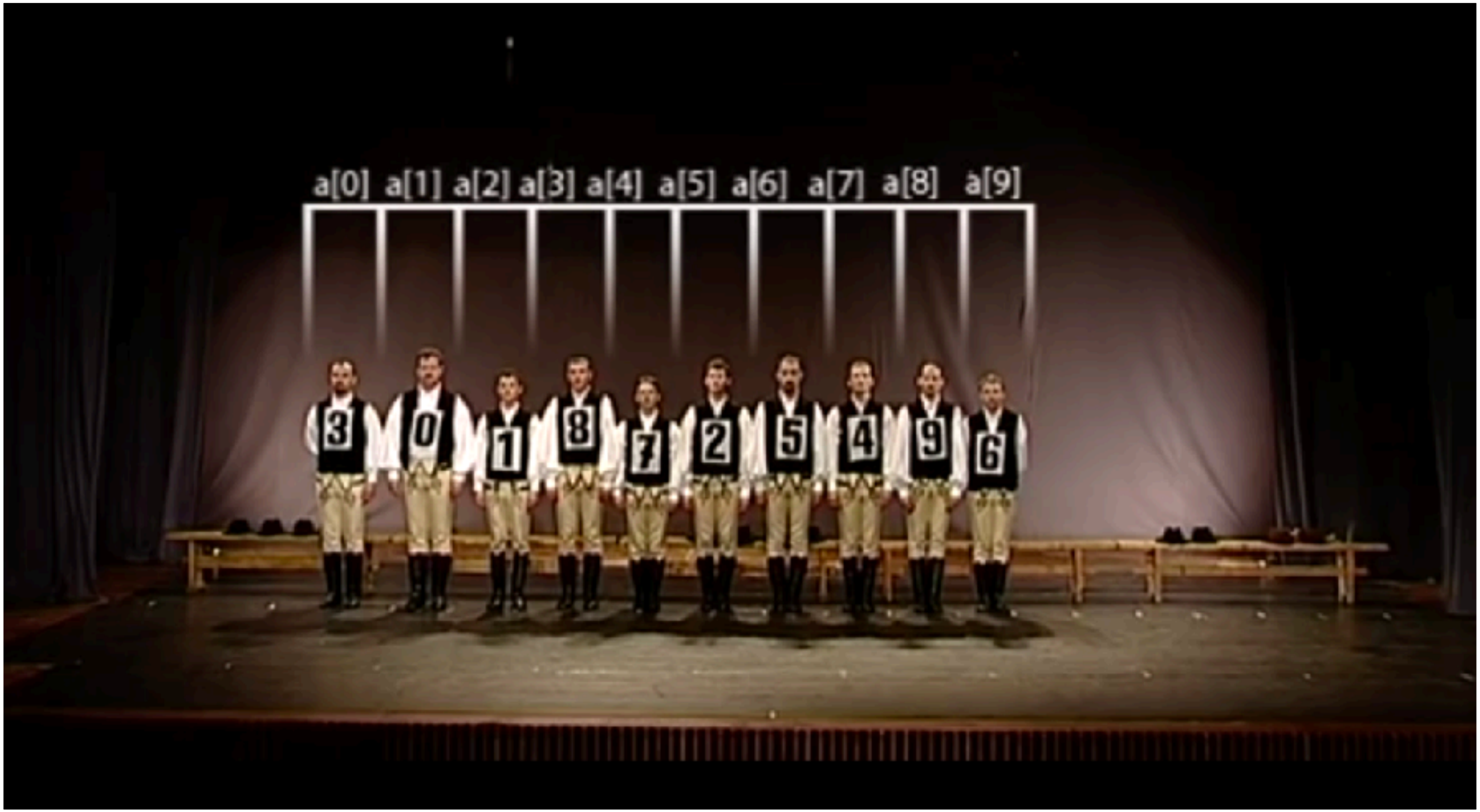
idea-instructions.com/quick-sort/

IDEA



BOGO SÖRT




a[0] a[1] a[2] a[3] a[4] a[5] a[6] a[7] a[8] a[9]
3 0 1 8 7 2 5 4 9 6

Die Wette!

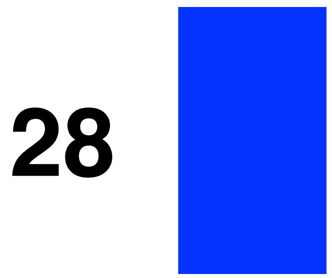
Technische Universität Braunschweig

Die Wette!

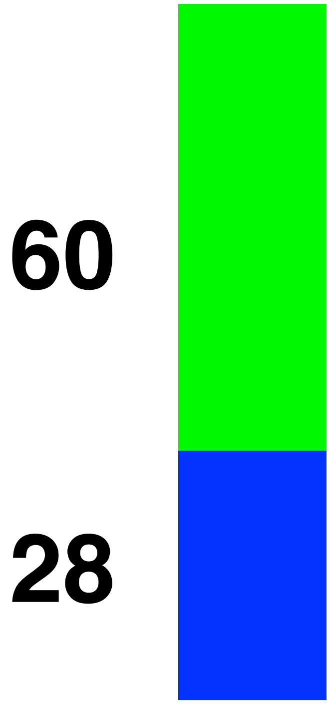
Die Wette!

Technische Universität Braunschweig

Die Wette!

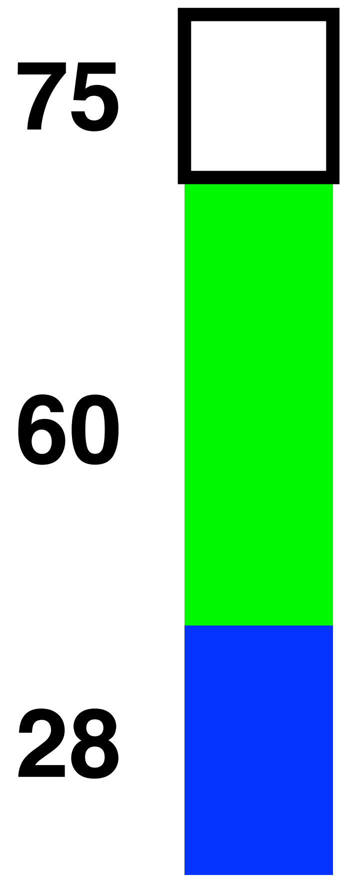


Die Wette!

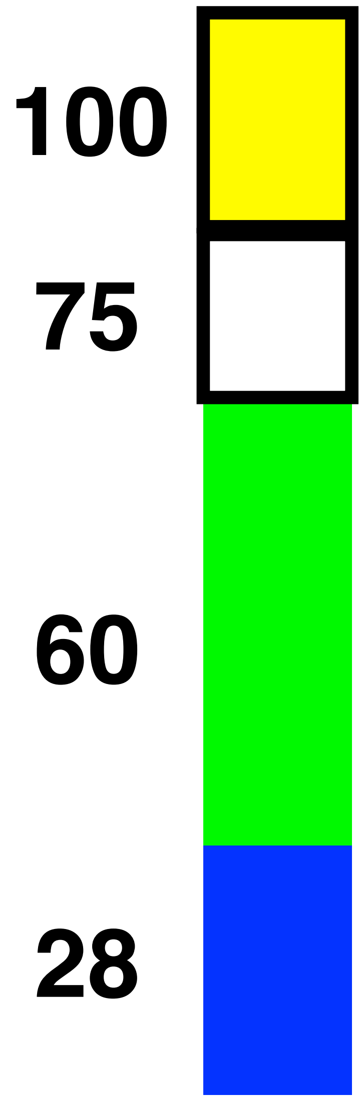


Technische Universität Braunschweig

Die Wette!



Die Wette!



Technische
Universität
Braunschweig

Vielen Dank!

Vielen Dank!

s.fekete@tu-bs.de