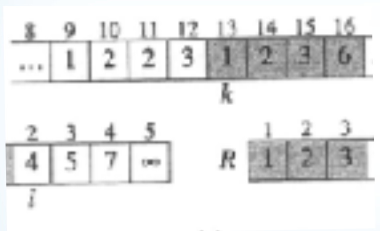
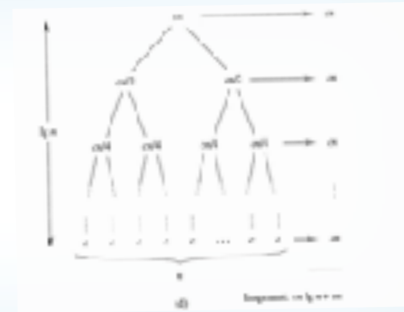




Kapitel 5.7: Mediane

Algorithmen und Datenstrukturen
WS 2020/21

Prof. Dr. Sándor Fekete

5.7.1 Standortprobleme

5.7.1 Standortprobleme

Amazon HQ2

5.7.1 Standortprobleme

Amazon HQ2

Making Sen$e Nov 30, 2017 6:14 PM EST

Amazon's call for proposals for a second corporate headquarters earlier this year set off a national bidding war between cities from Albuquerque and Detroit to Atlanta and Boston.

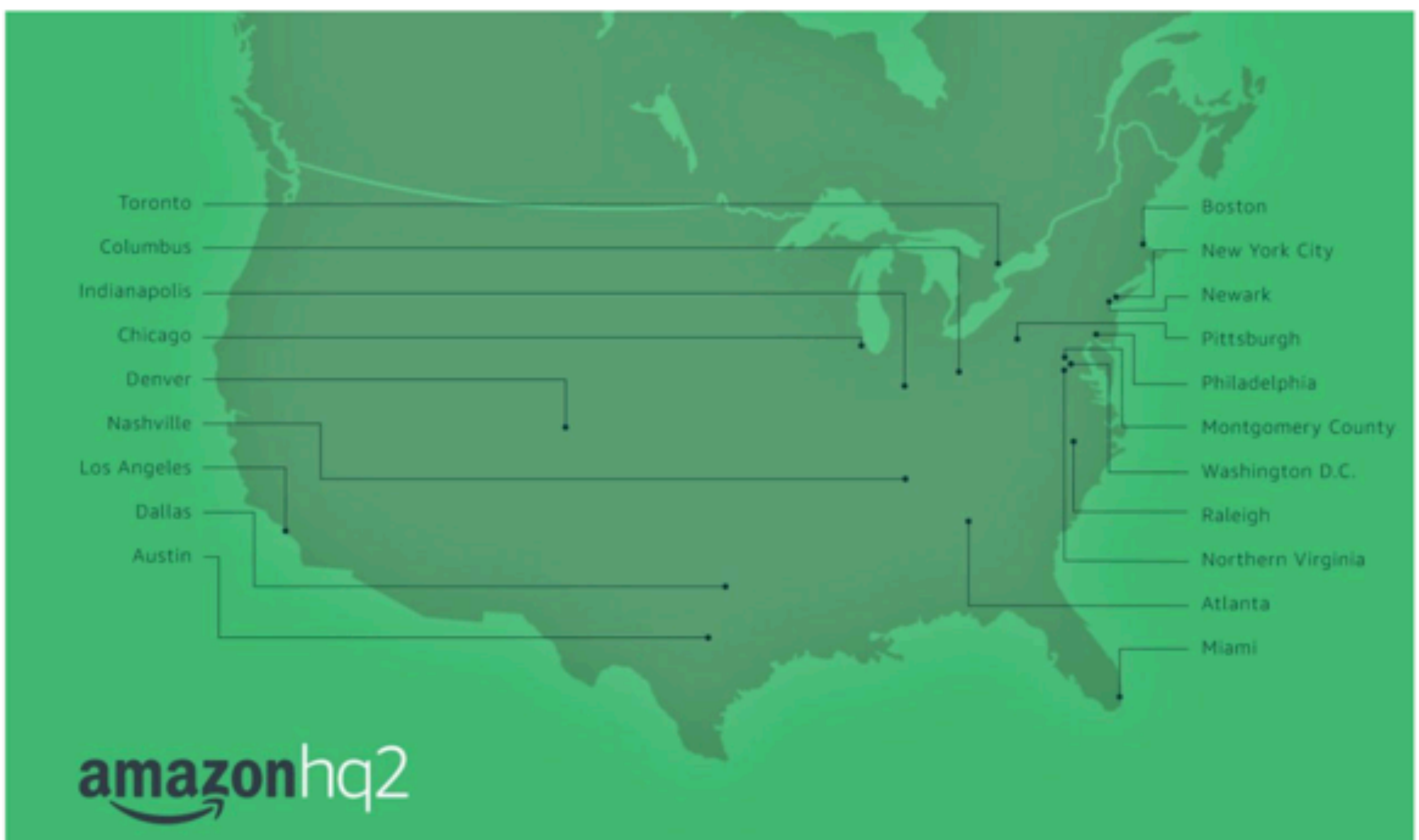
The tech giant plans to invest $5 billion to build and run the new facility — which will be similar in size to its sprawling 40,000-employee Seattle headquarters — and has promised the project will create 50,000 high-paying jobs in the 10 to 15 years after the facility opens.

5.7.1 Standortprobleme

Amazon narrows HQ2 search to 20
next phase in contest for $5B econ

BY TODD BISHOP on January 18, 2018 at 6:08 am

30 Comments | Share 2.1k | Tweet | Share 1.5k | Reddit | Email



An Amazon graphic identifies the 20 cities that will move to the next phase of its HQ2 search.

earlier this year set off
pit to Atlanta and

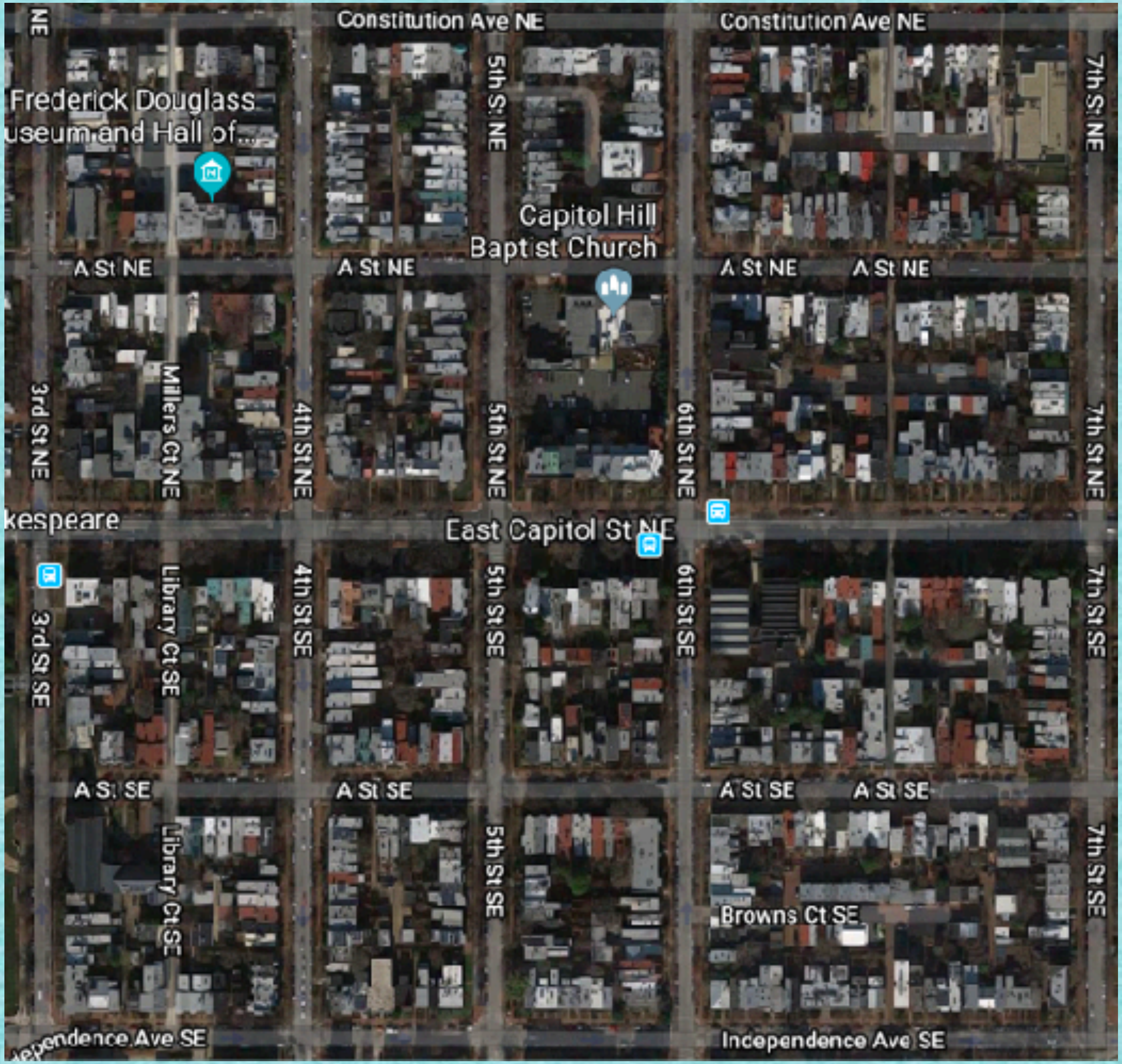
acility — which will be
ters — and has
to 15 years after the

5.7.1 Standortprobleme

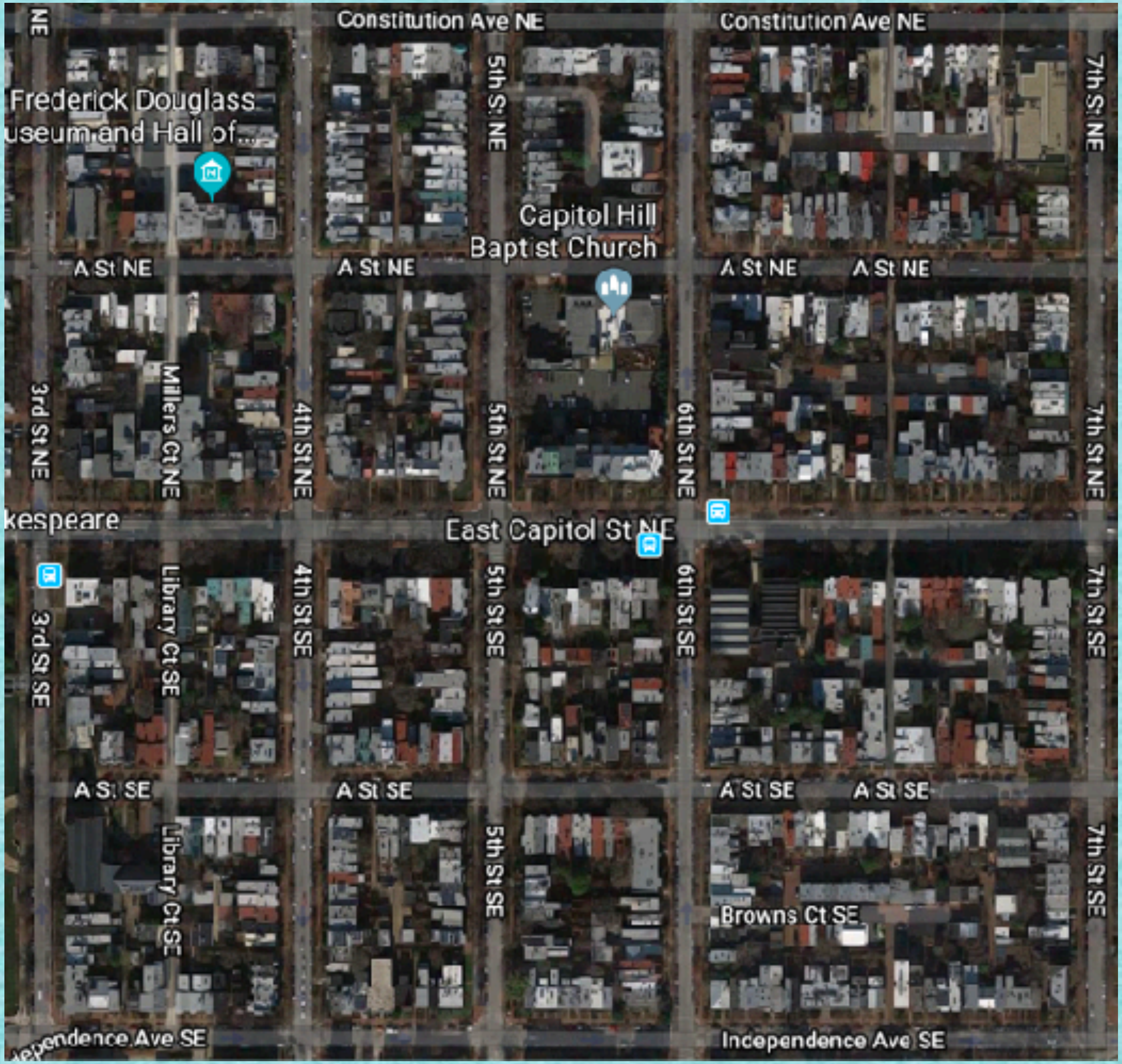
5.7.1 Standortprobleme

5.7.1 Standortprobleme

5.7.1 Standortprobleme

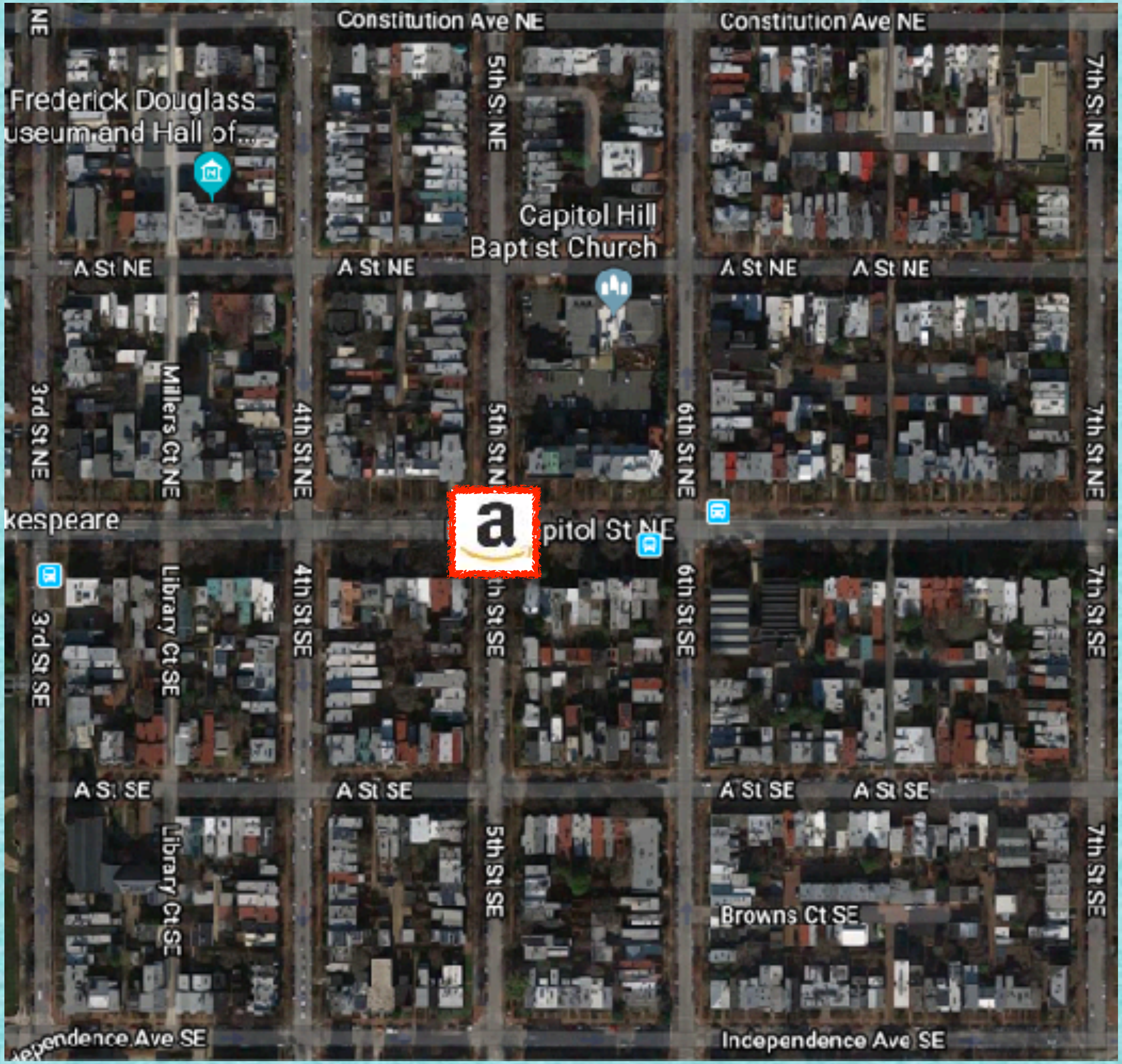


5.7.1 Standortprobleme



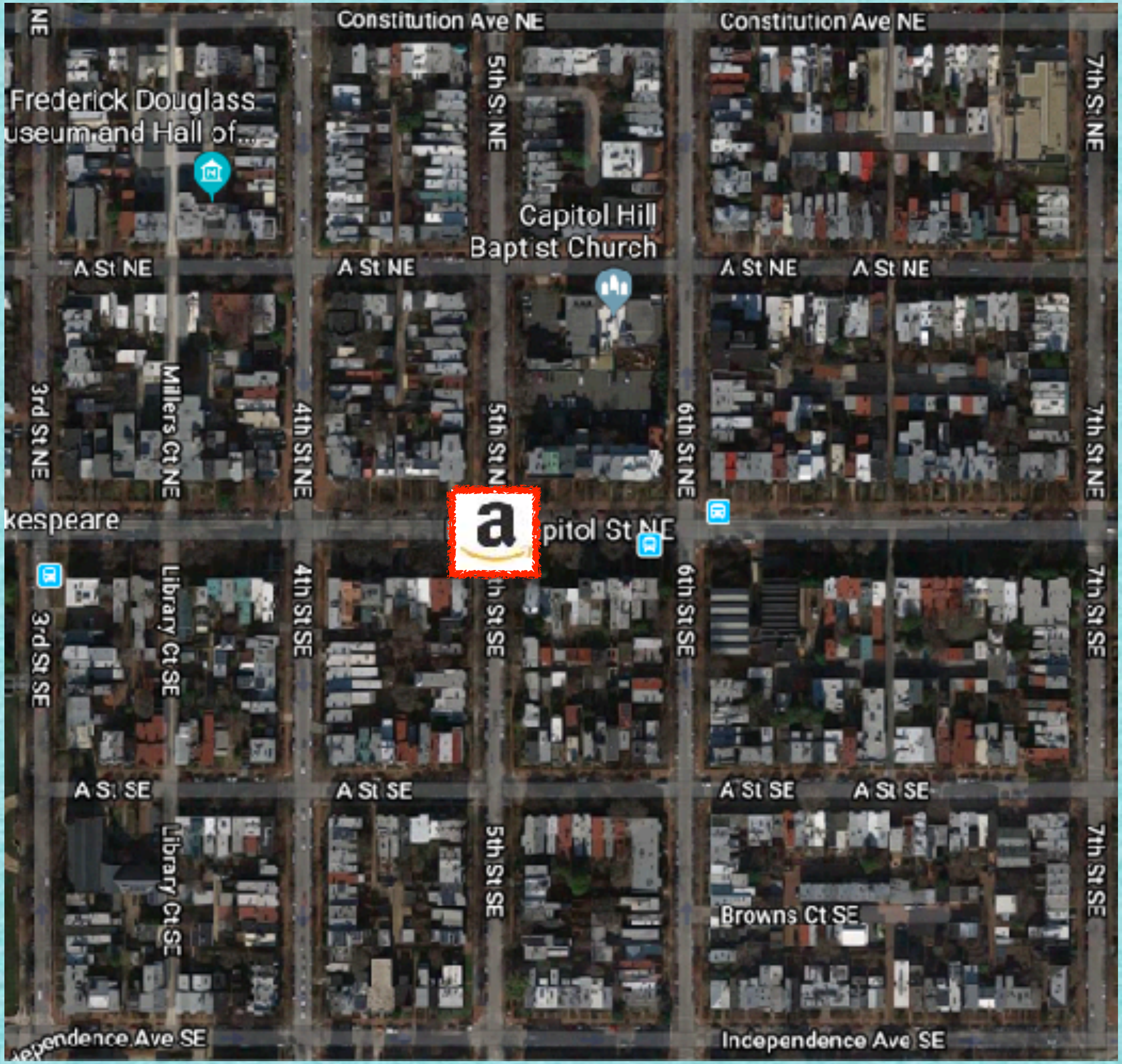
Was ist der optimale Standort?

5.7.1 Standortprobleme



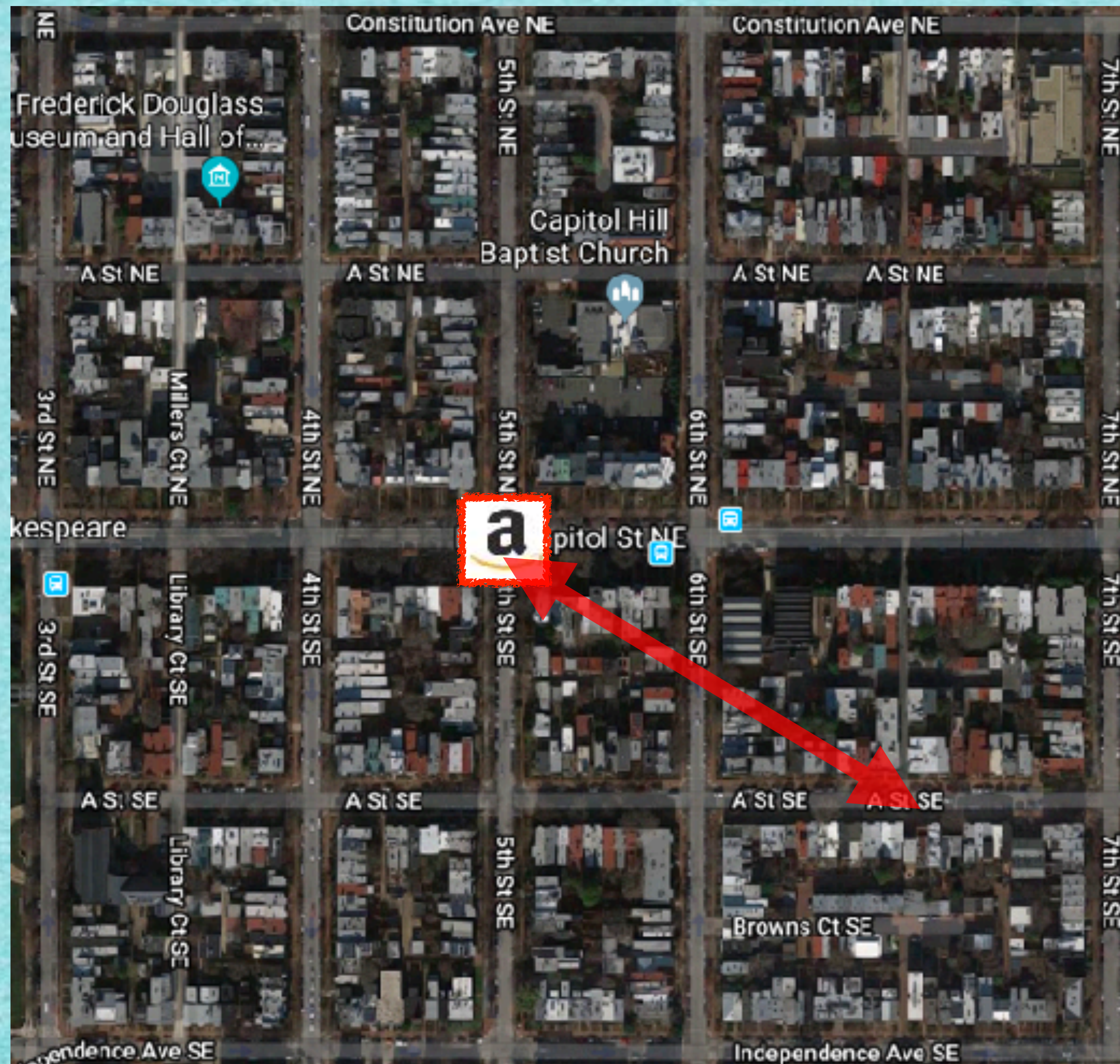
Was ist der optimale Standort?

5.7.1 Standortprobleme



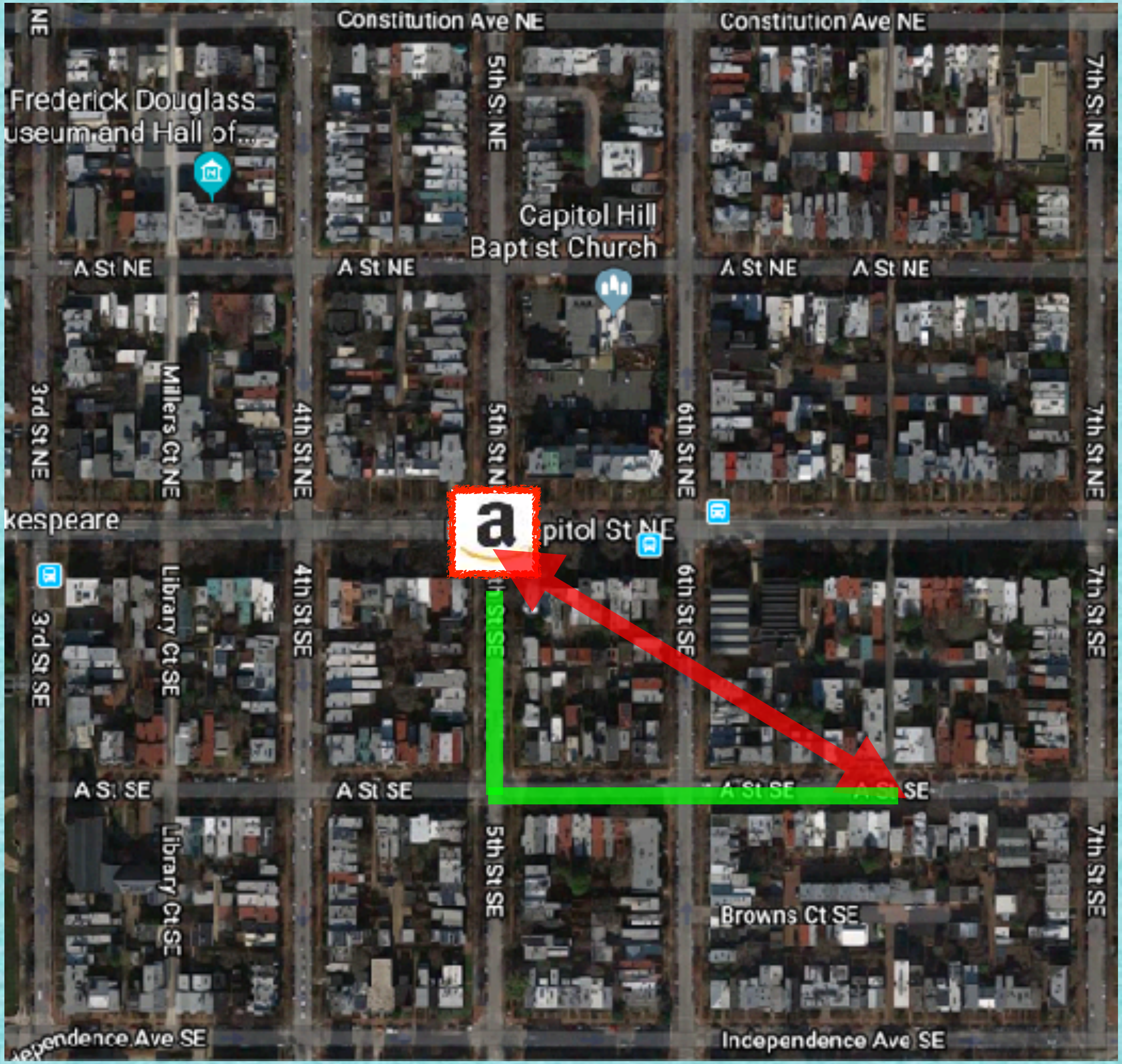
Was ist der optimale Standort?
Minimiere die durchschnittliche Distanz!

5.7.1 Standortprobleme



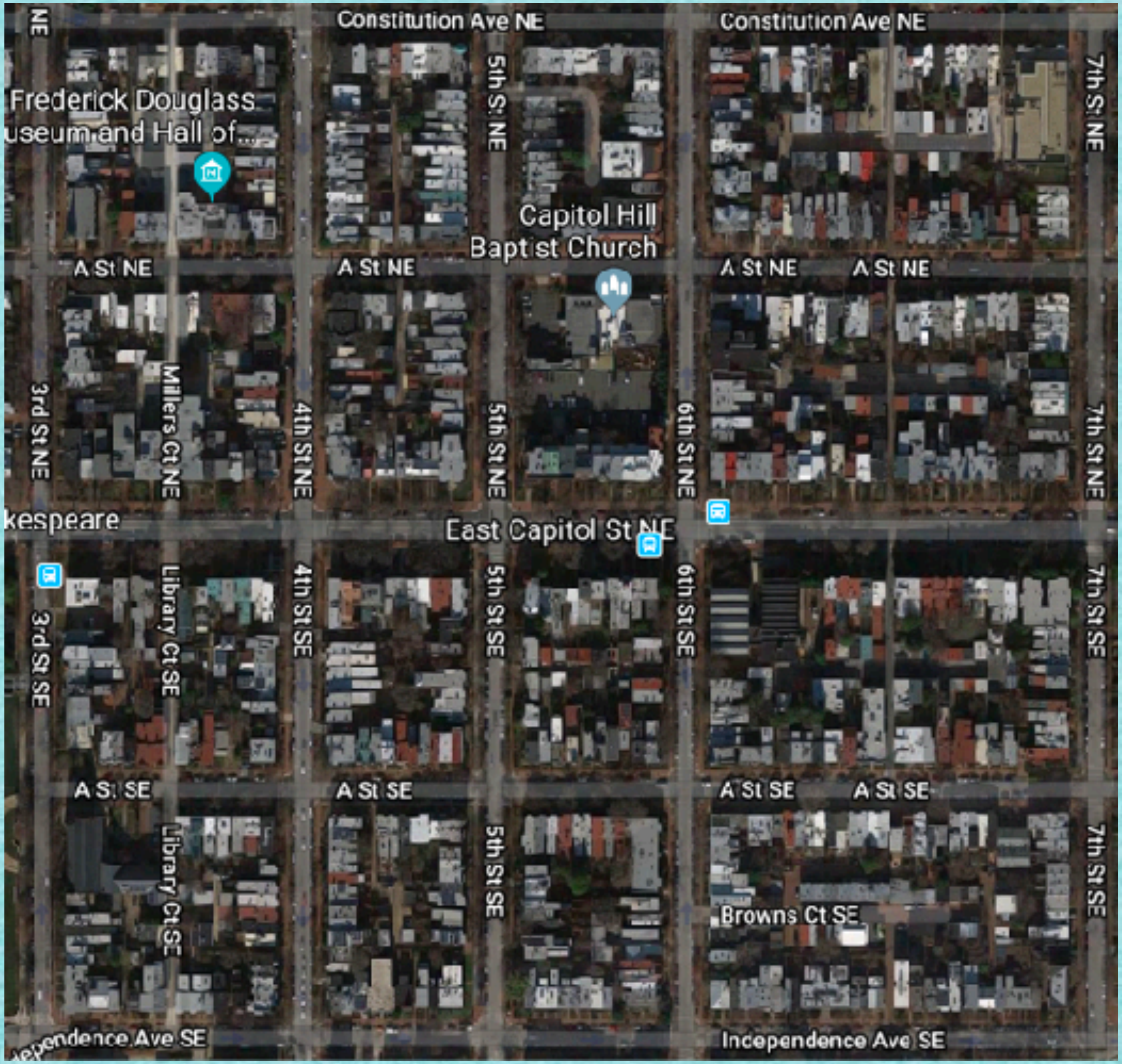
Was ist der optimale Standort?
Minimiere die durchschnittliche Distanz!

5.7.1 Standortprobleme

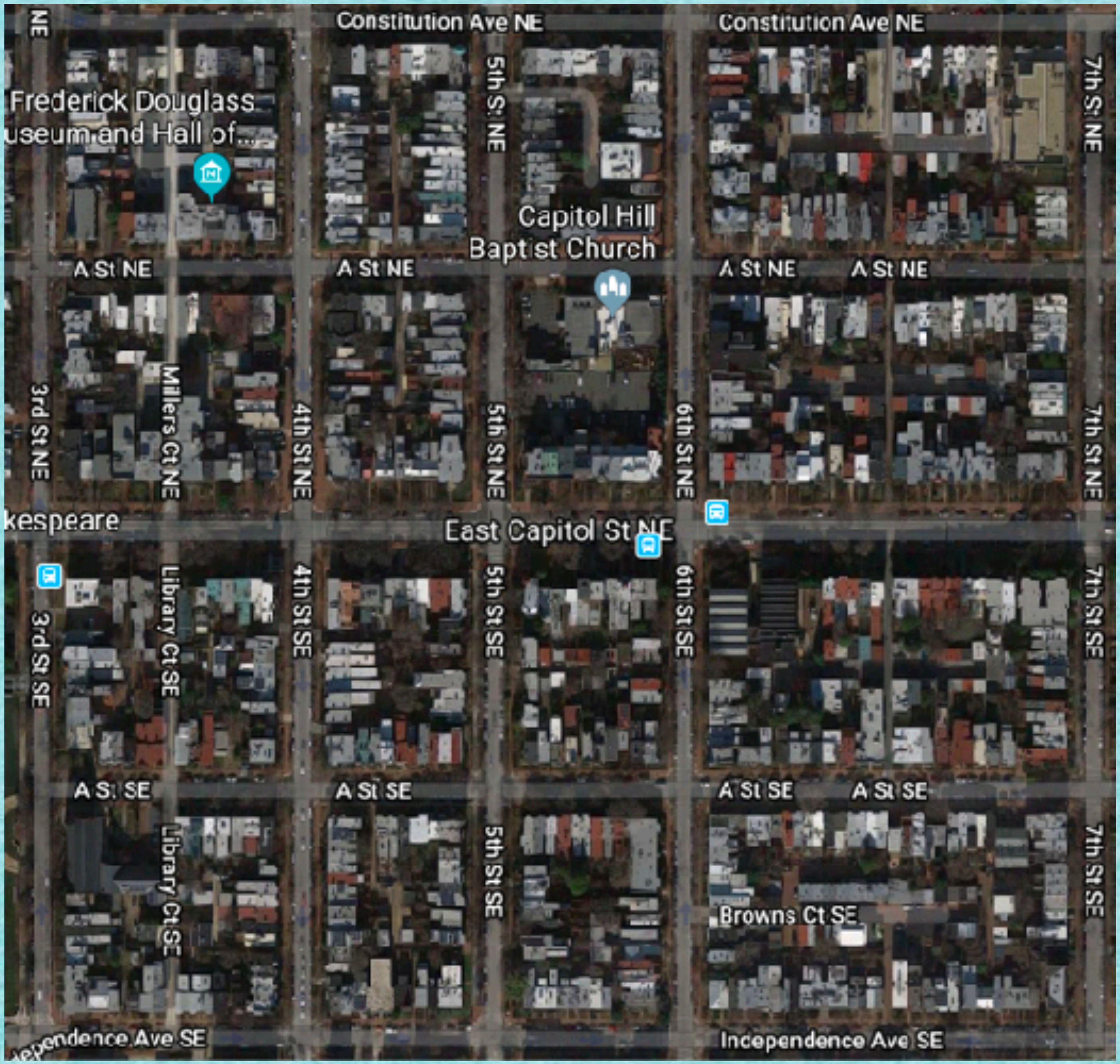


Was ist der optimale Standort?
Minimiere die durchschnittliche Distanz!

5.7.1 Standortprobleme

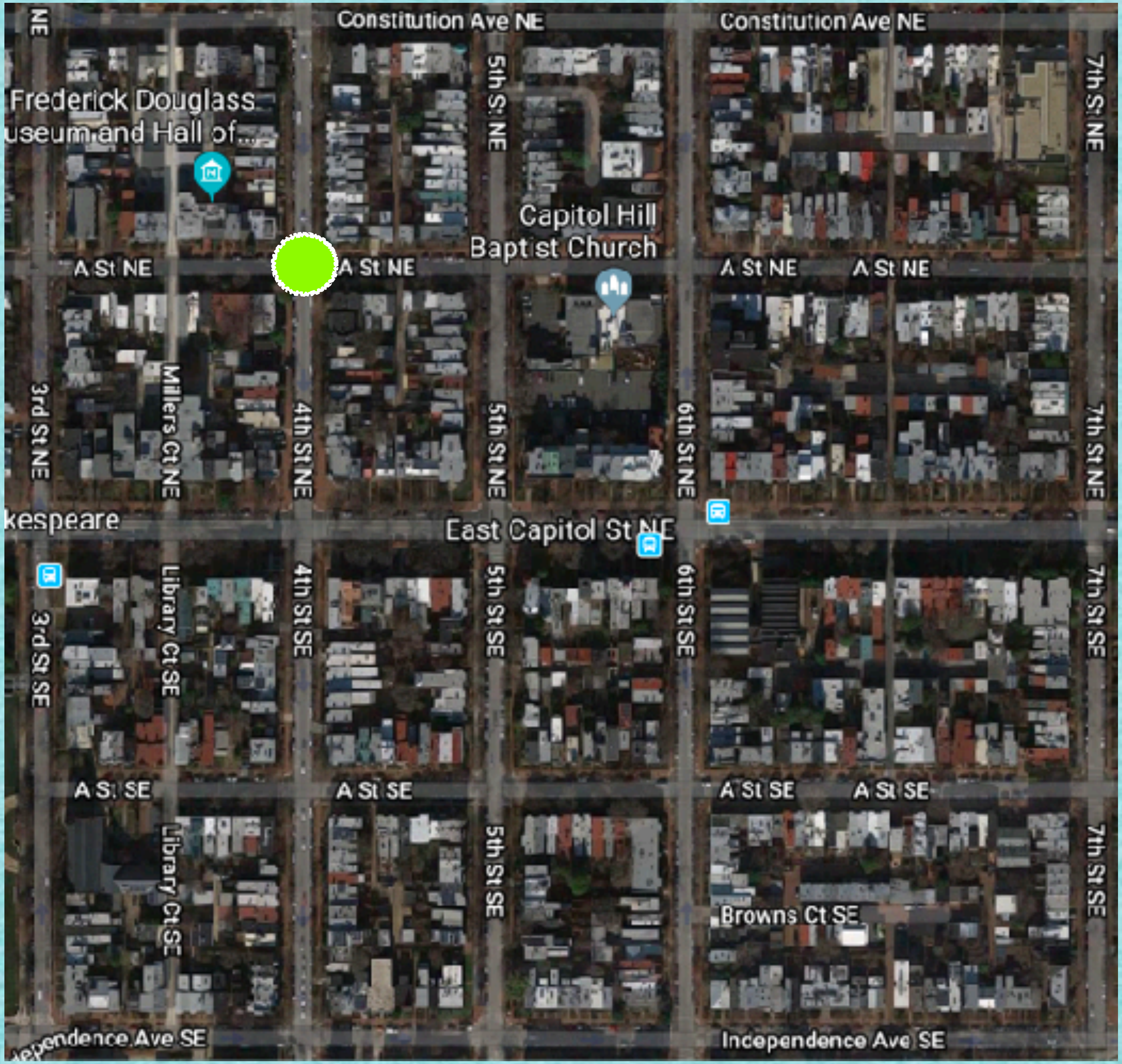


5.7.1 Standortprobleme



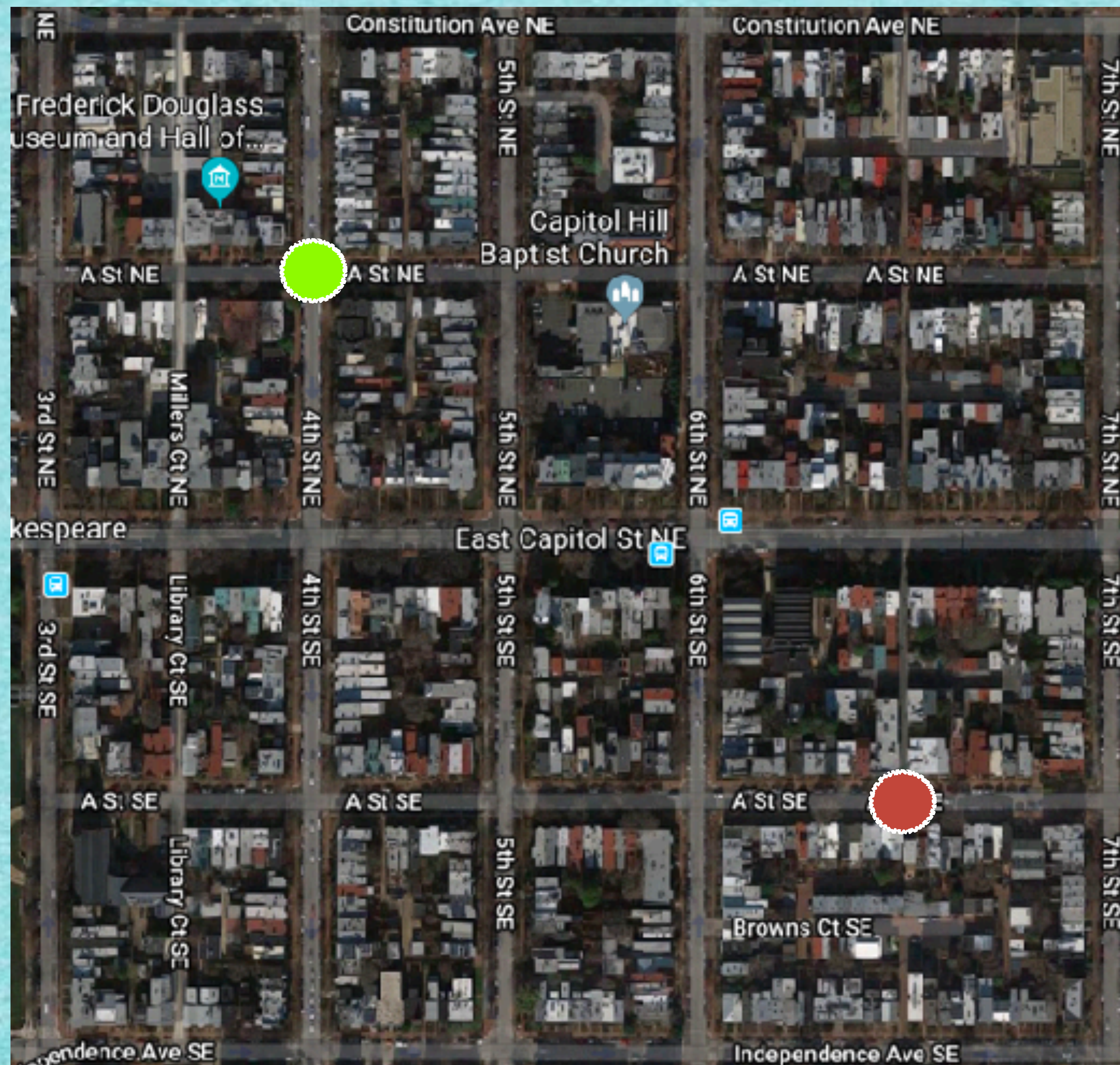
Amerikanische Städte: „Manhattan-Distanz“

5.7.1 Standortprobleme



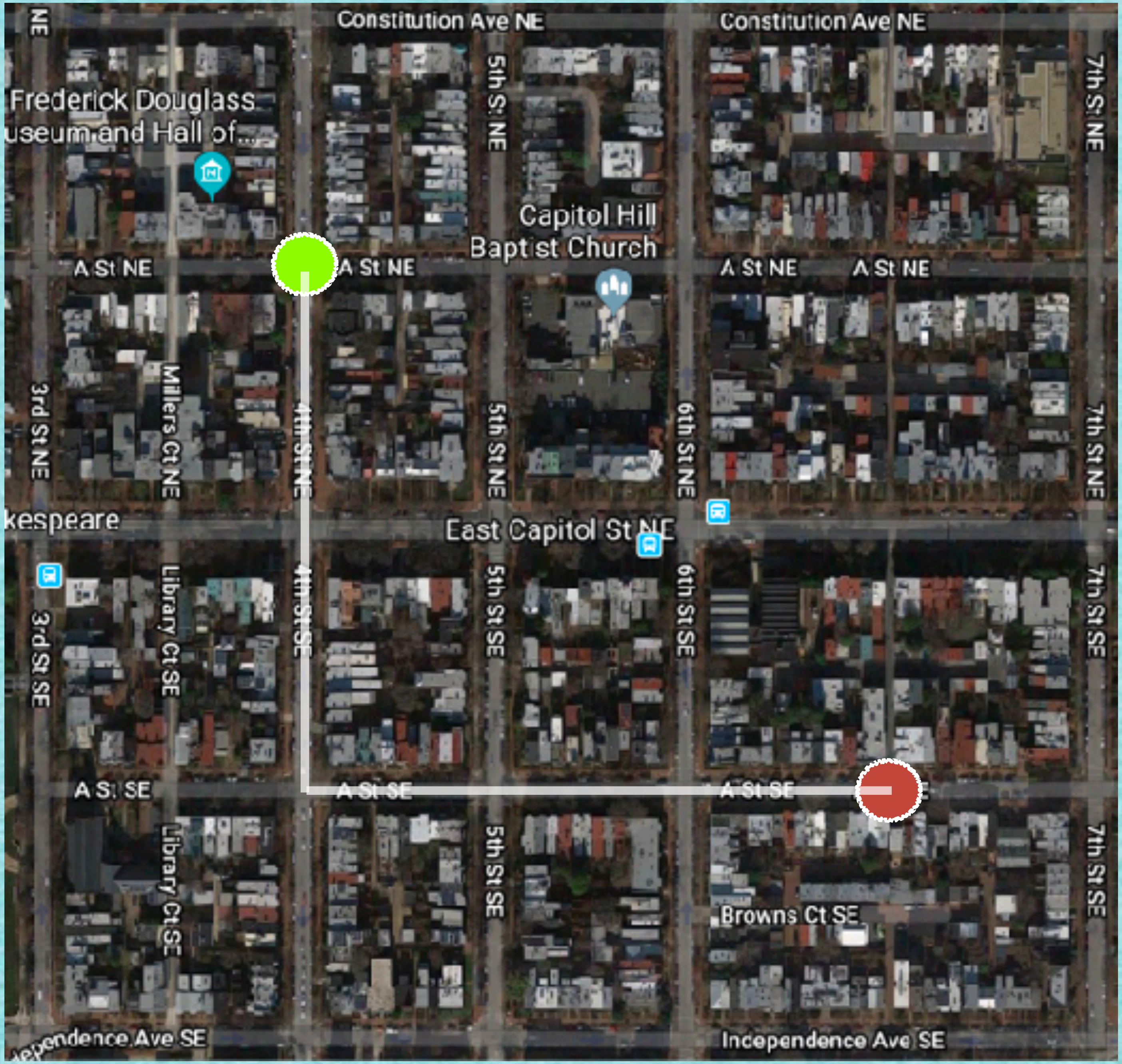
Amerikanische Städte: „Manhattan-Distanz“

5.7.1 Standortprobleme



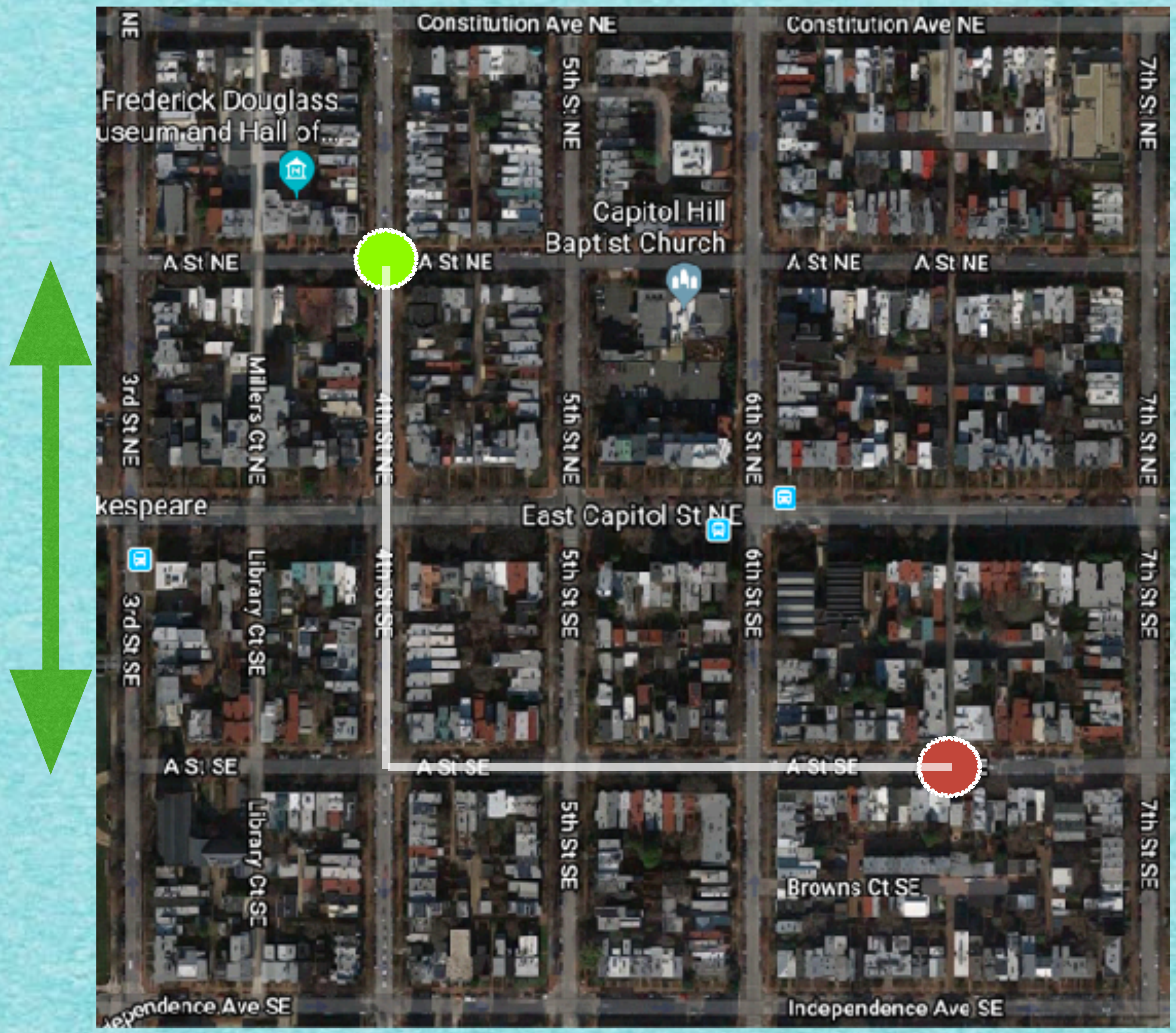
Amerikanische Städte: „Manhattan-Distanz“

5.7.1 Standortprobleme

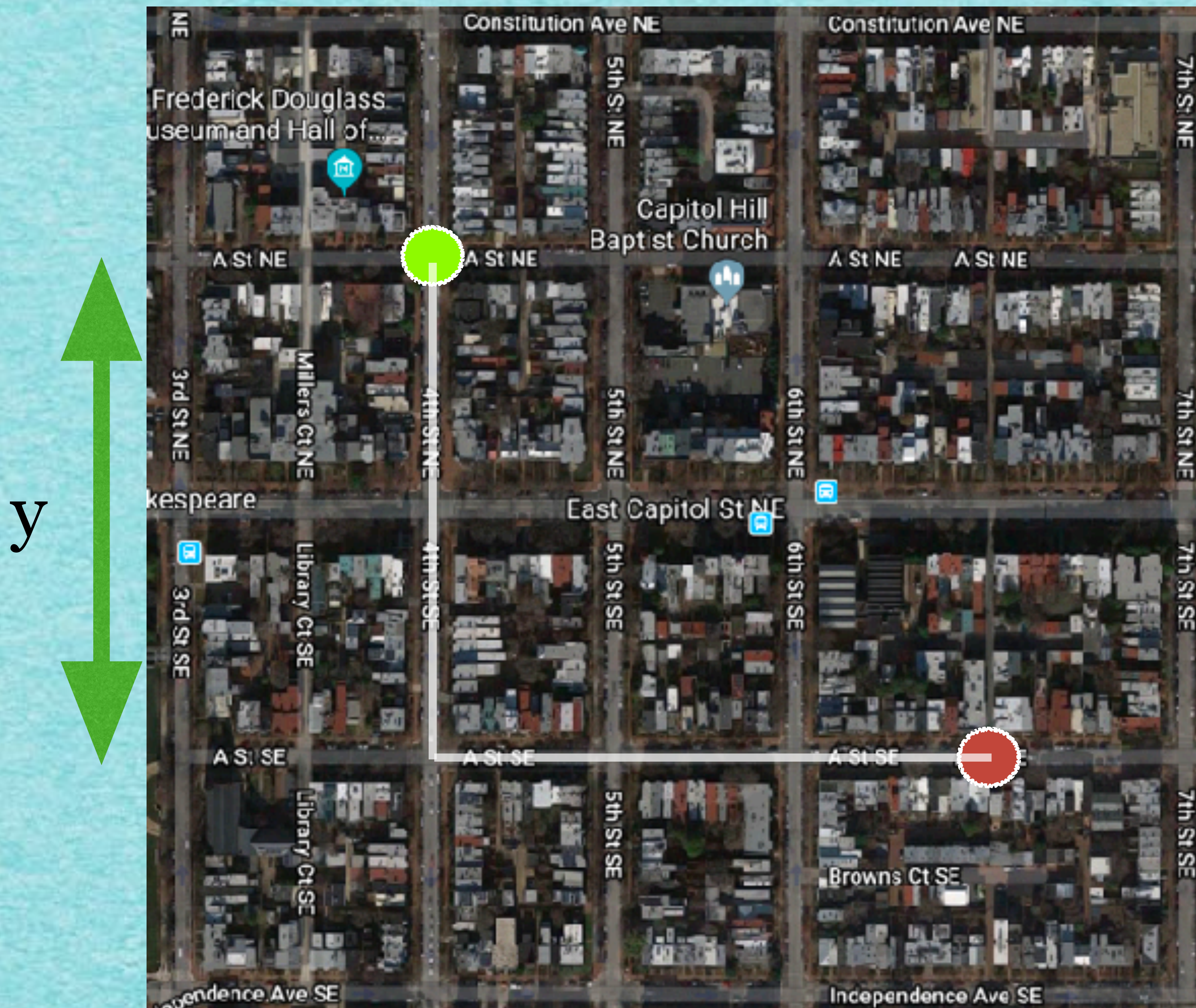


Amerikanische Städte: „Manhattan-Distanz“

5.7.1 Standortprobleme

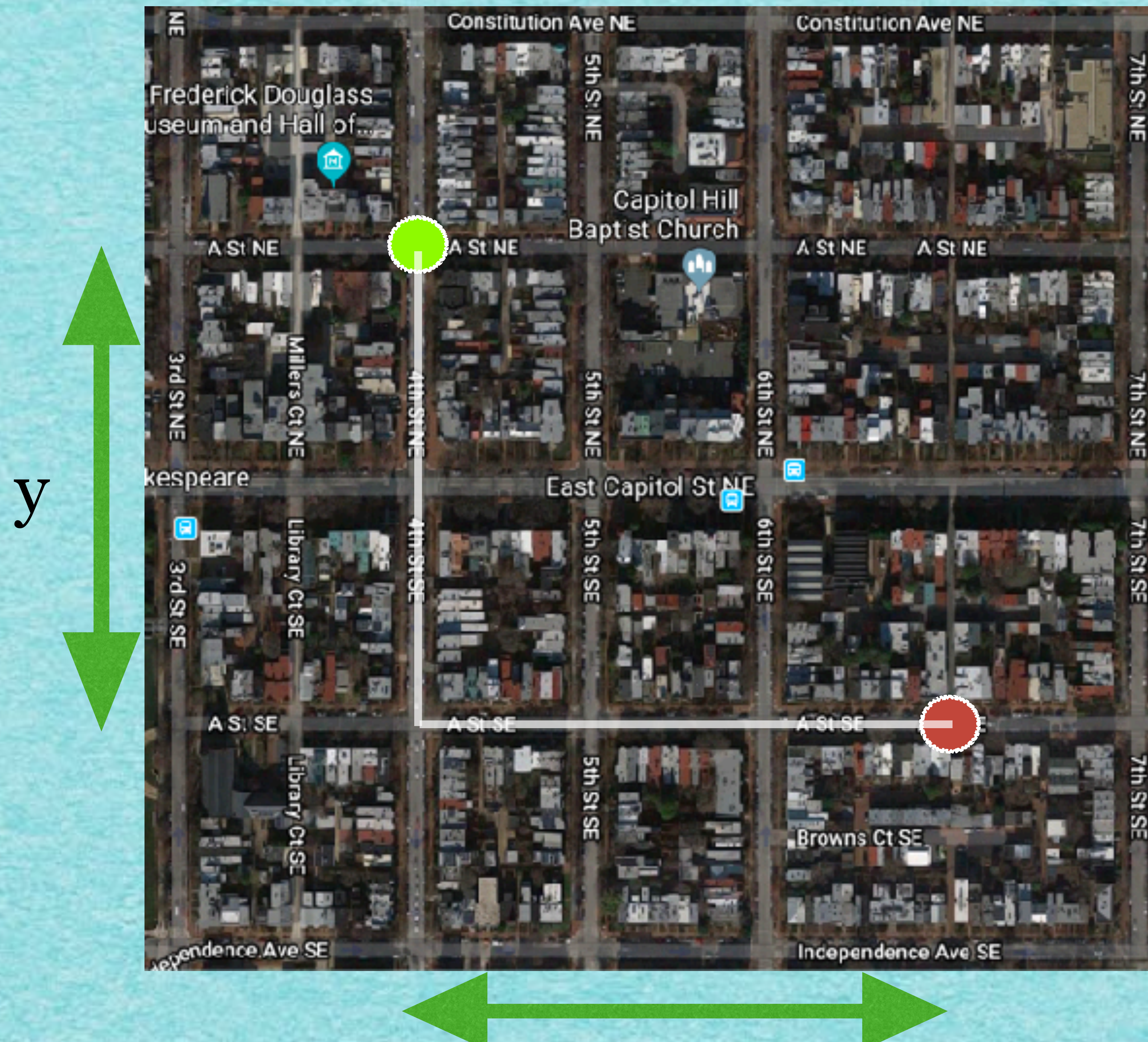


Amerikanische Städte: „Manhattan-Distanz“

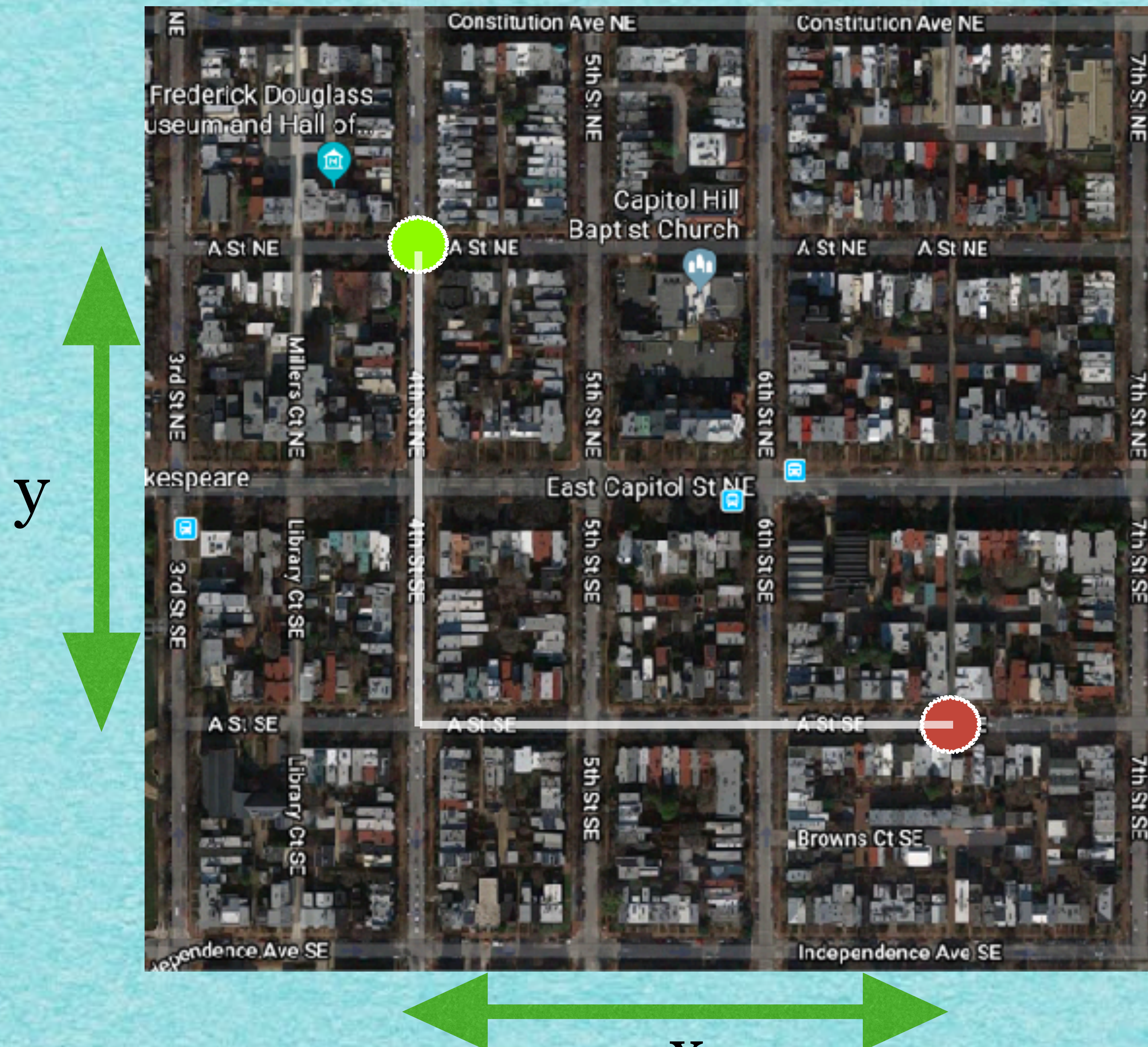


Amerikanische Städte: „Manhattan-Distanz“

5.7.1 Standortprobleme

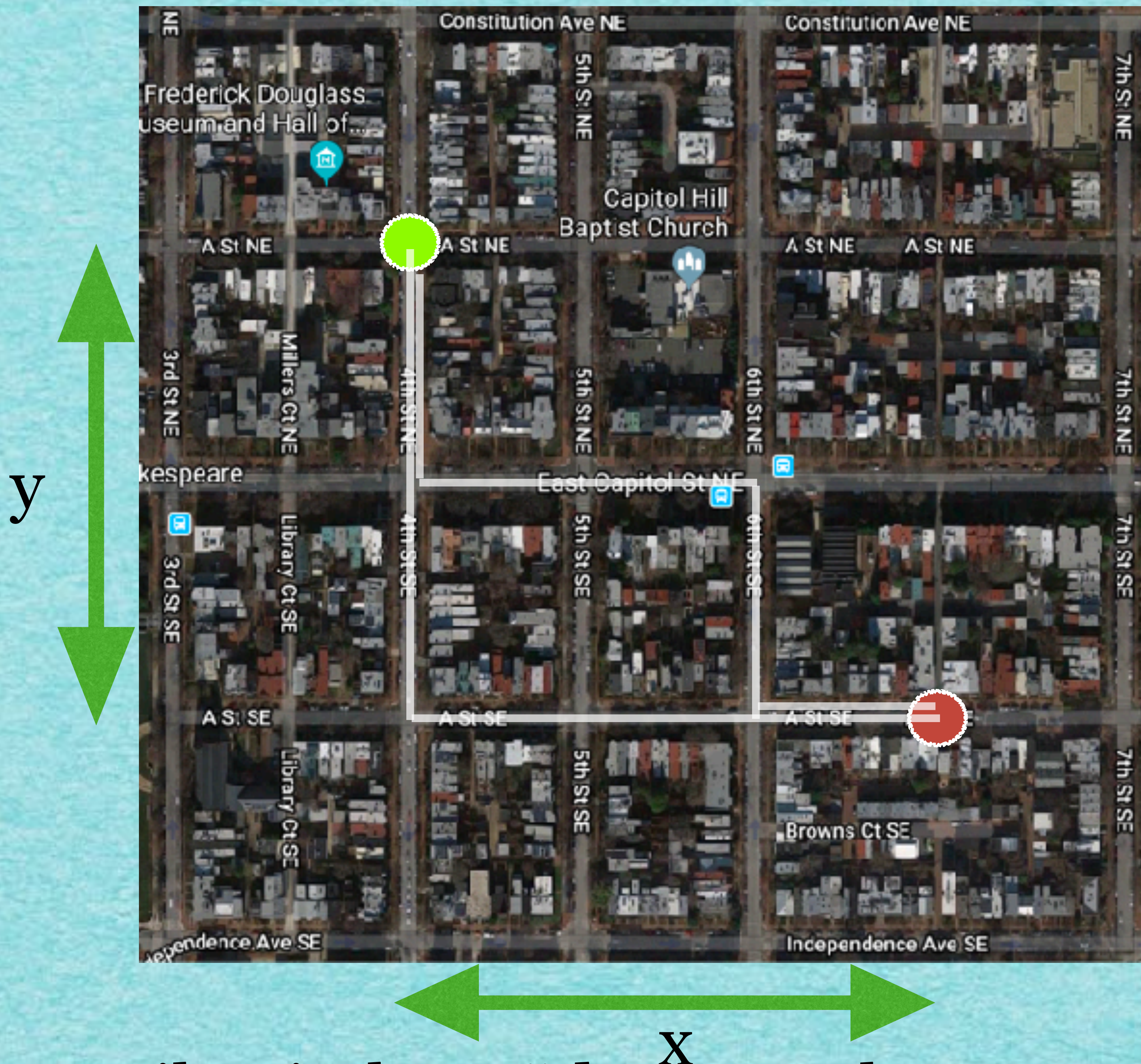


Amerikanische Städte: „Manhattan-Distanz“



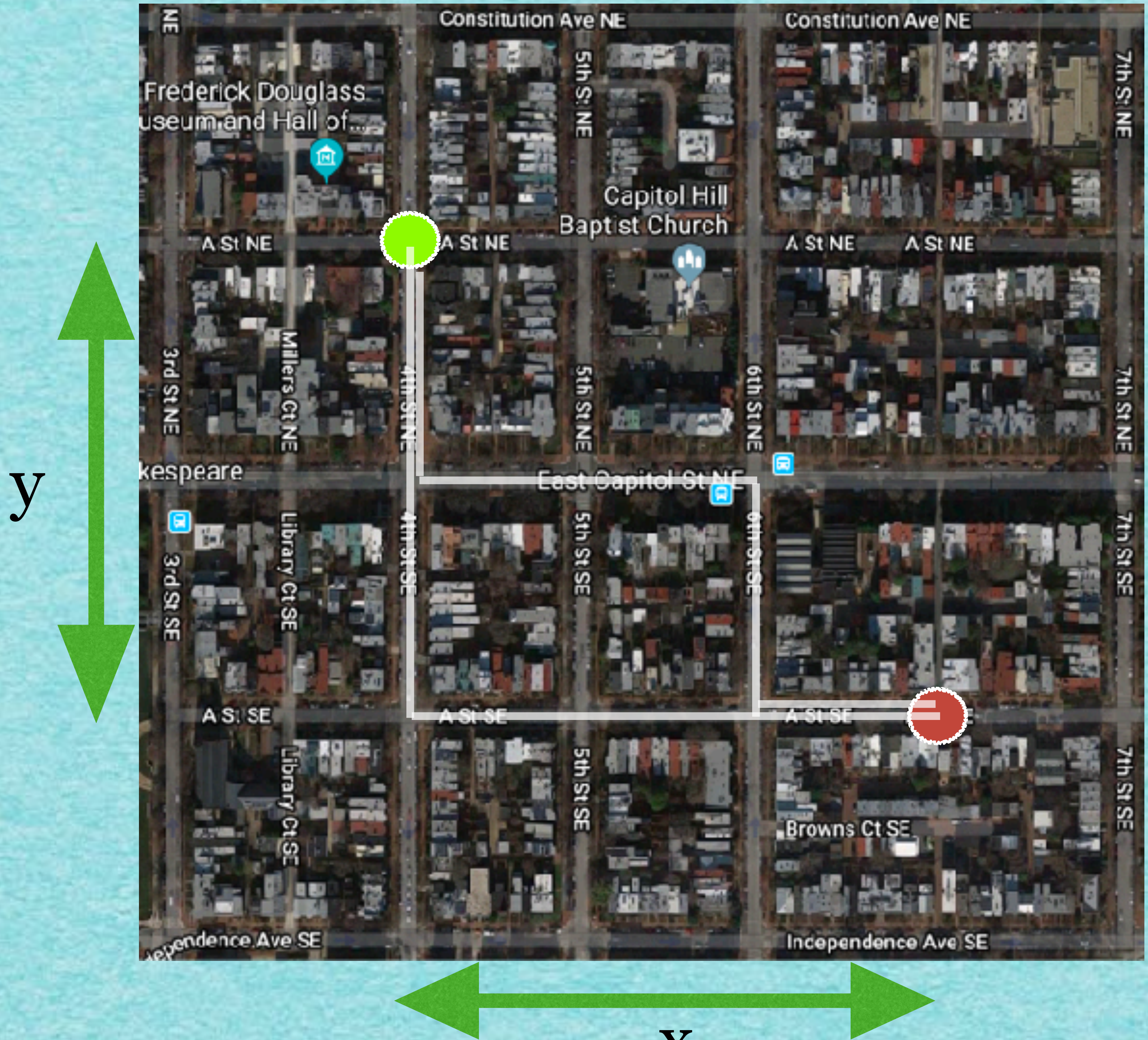
Amerikanische Städte: „Manhattan-Distanz“

5.7.1 Standortprobleme



Amerikanische Städte: „Manhattan-Distanz“

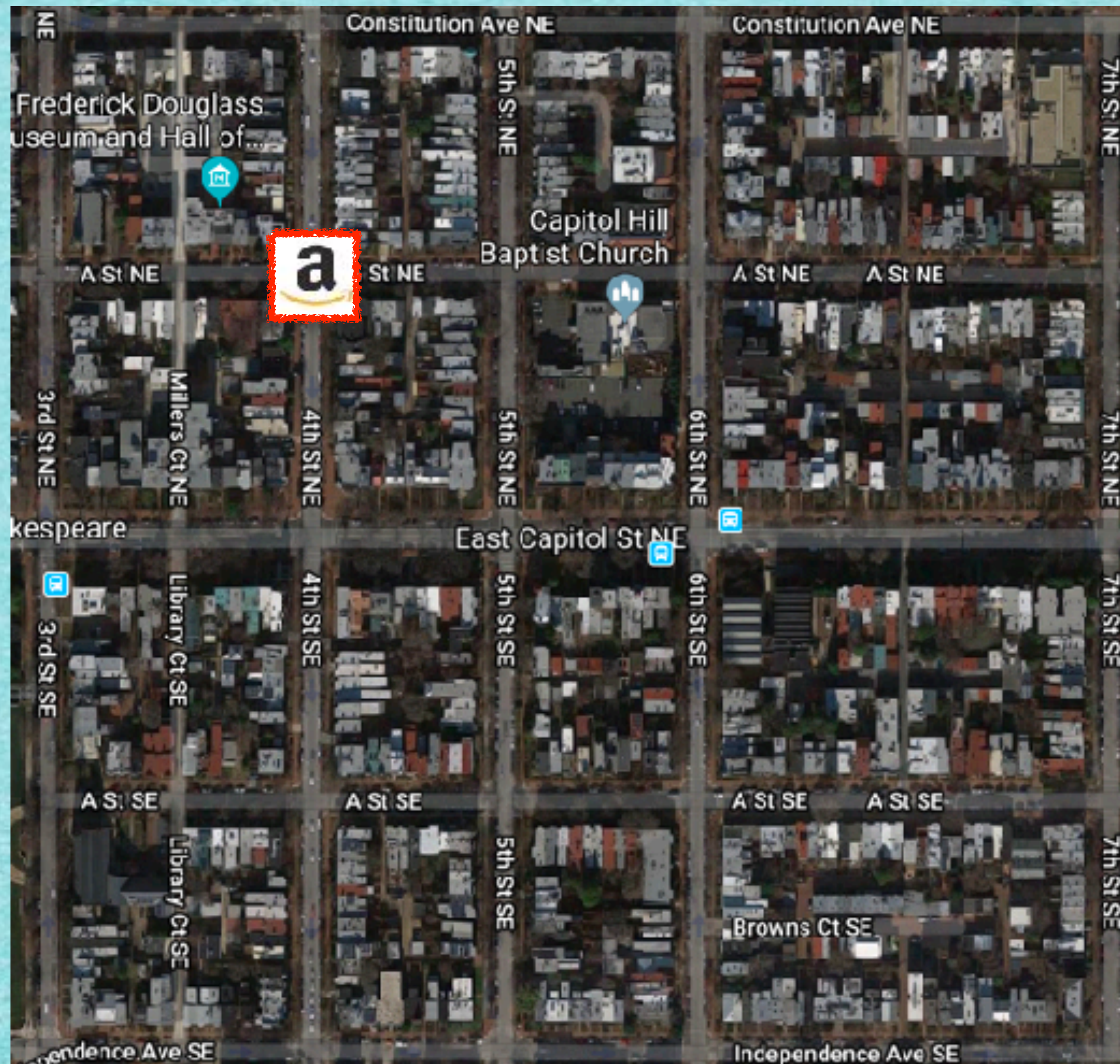
5.7.1 Standortprobleme



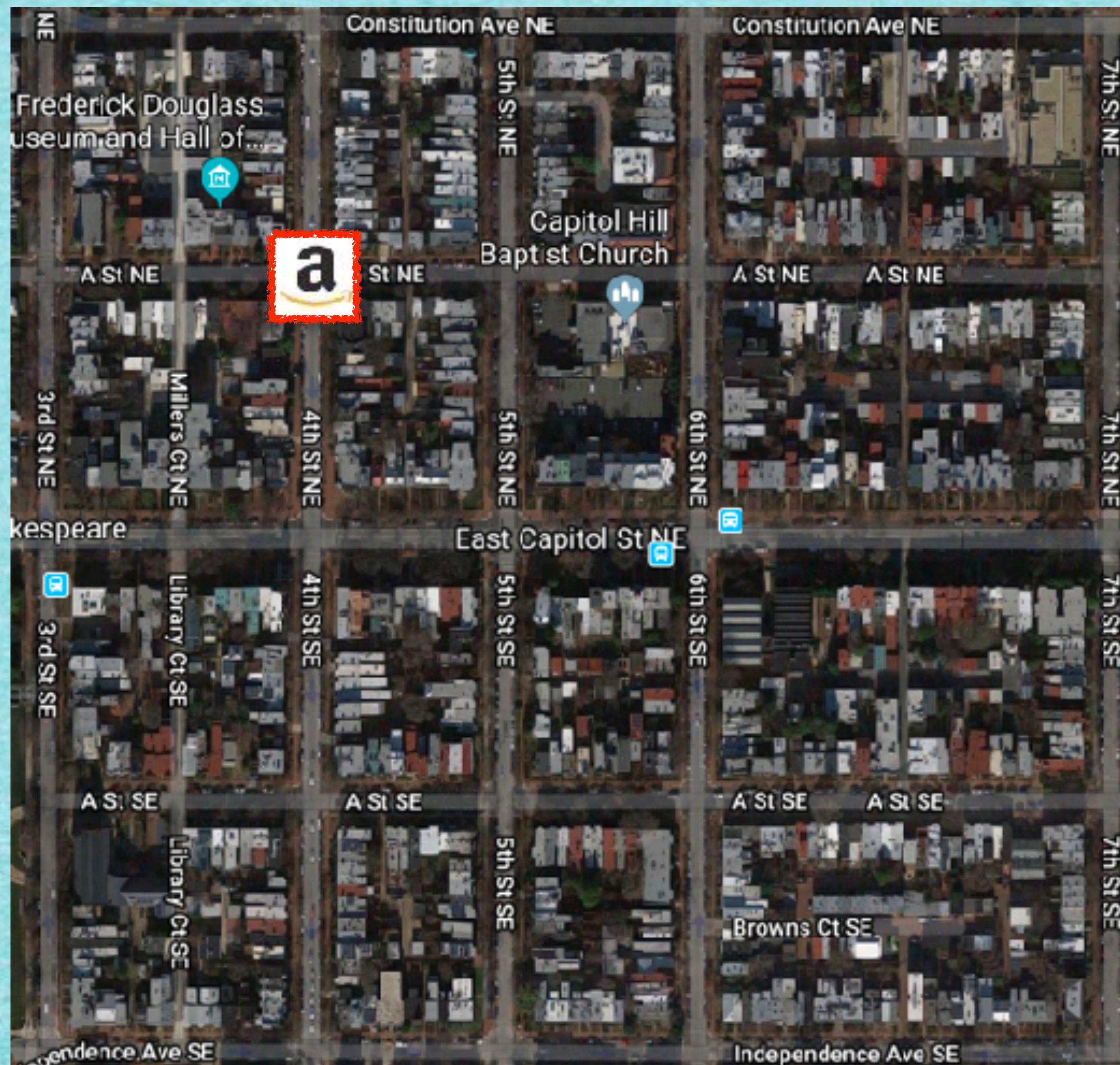
Amerikanische Städte: „Manhattan-Distanz“

Betrachte x- und y-Position separat!

5.7.1 Standortprobleme

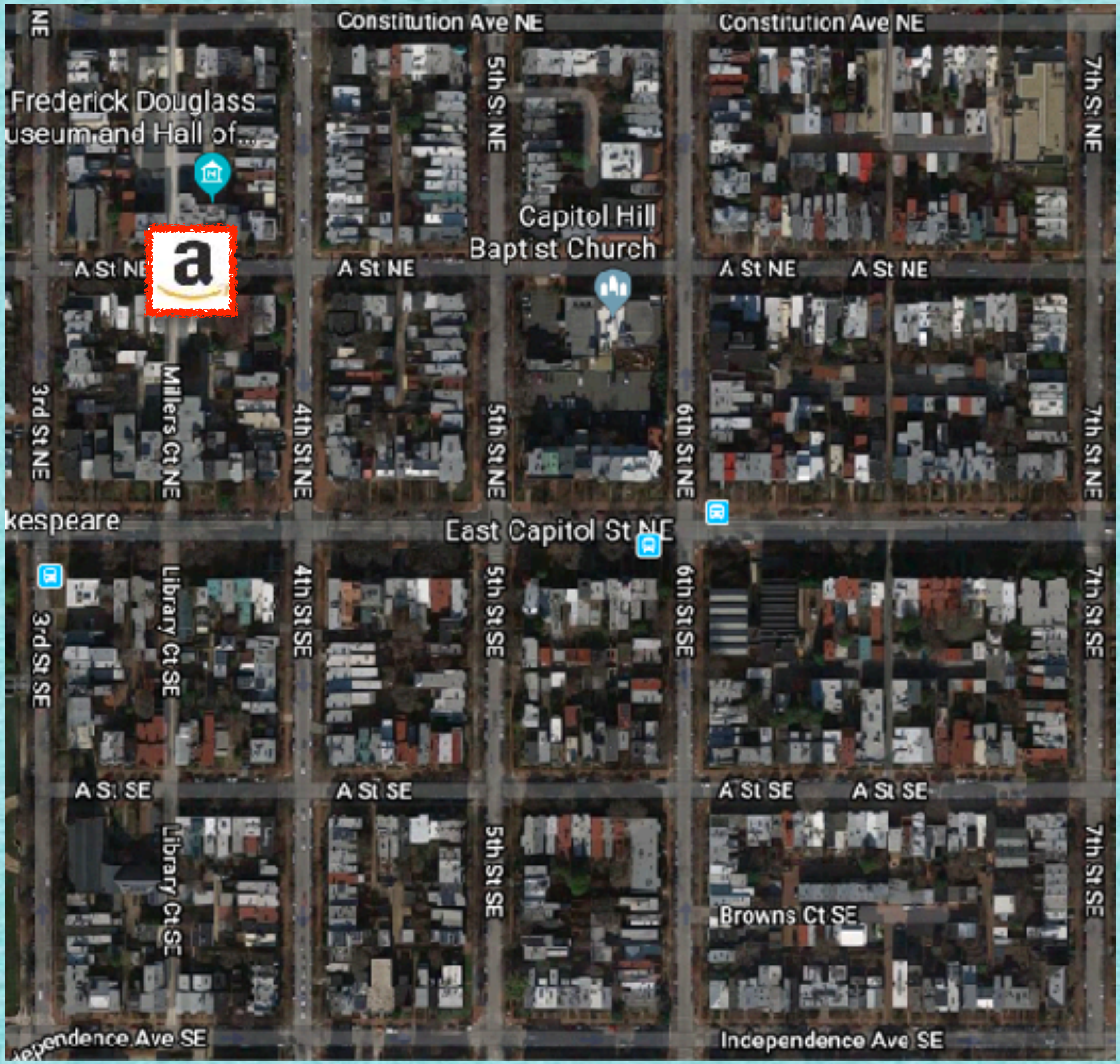


5.7.1 Standortprobleme



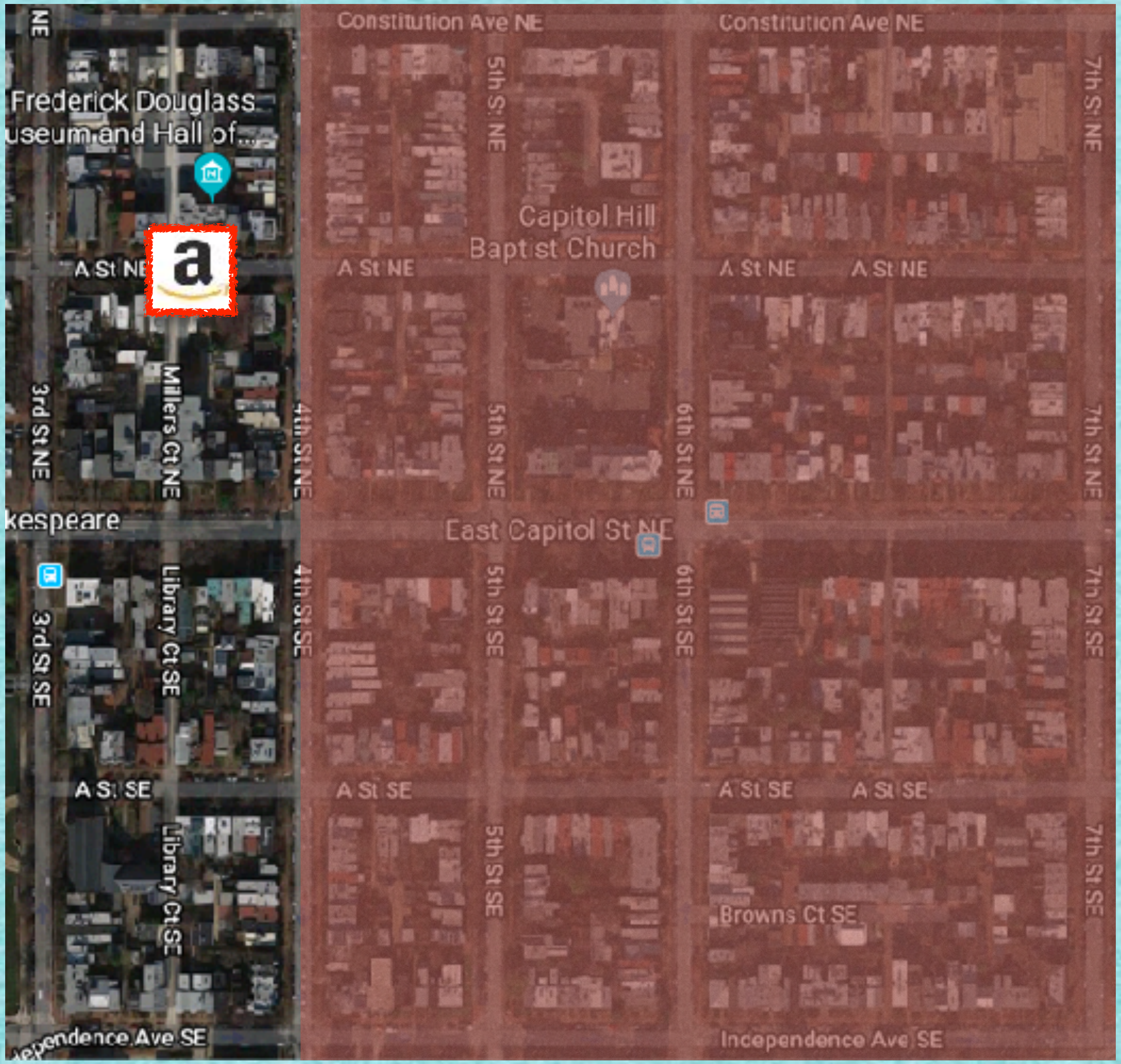
Betrachte x- und y-Position separat!

5.7.1 Standortprobleme



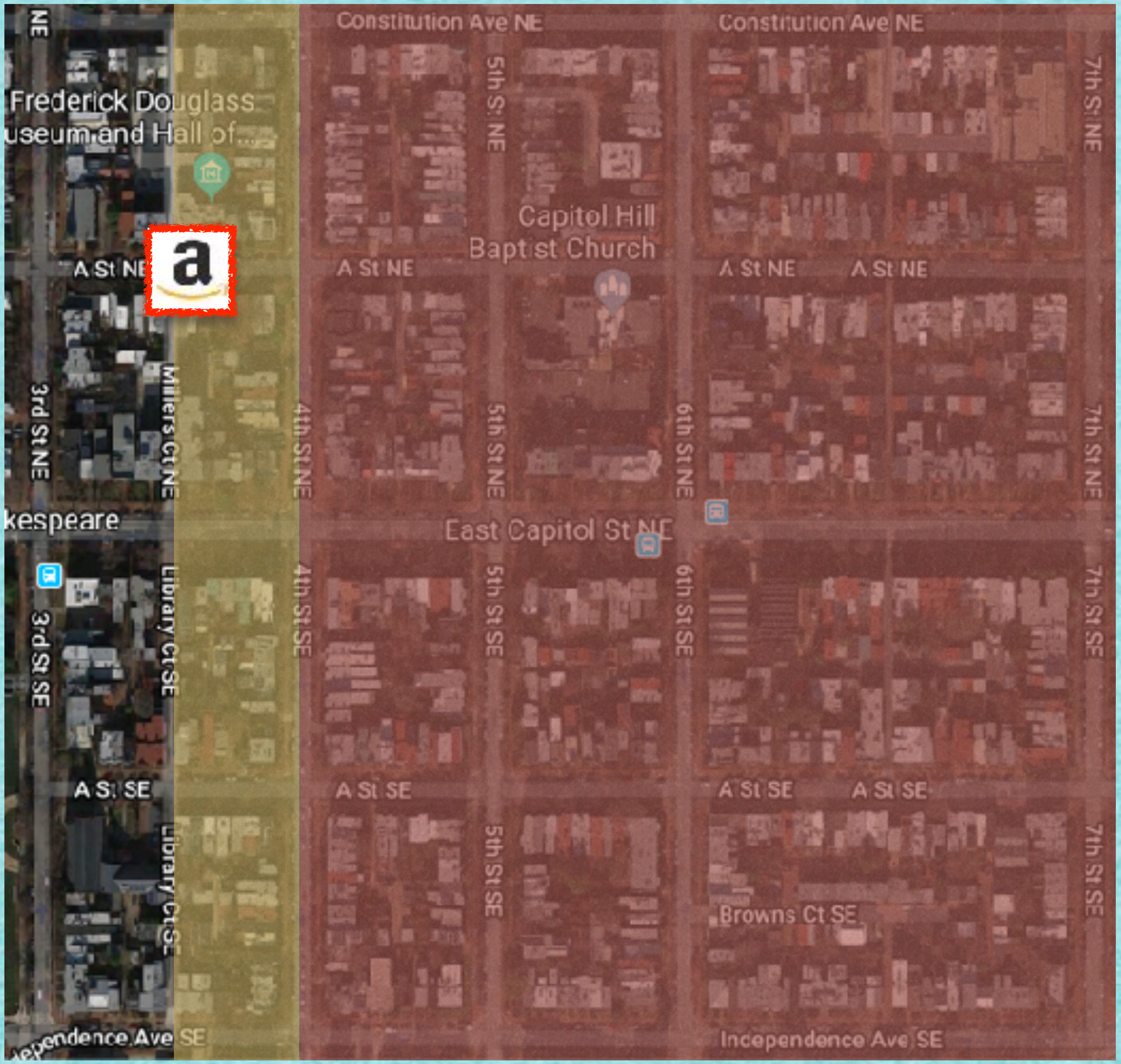
Betrachte x- und y-Position separat!

5.7.1 Standortprobleme



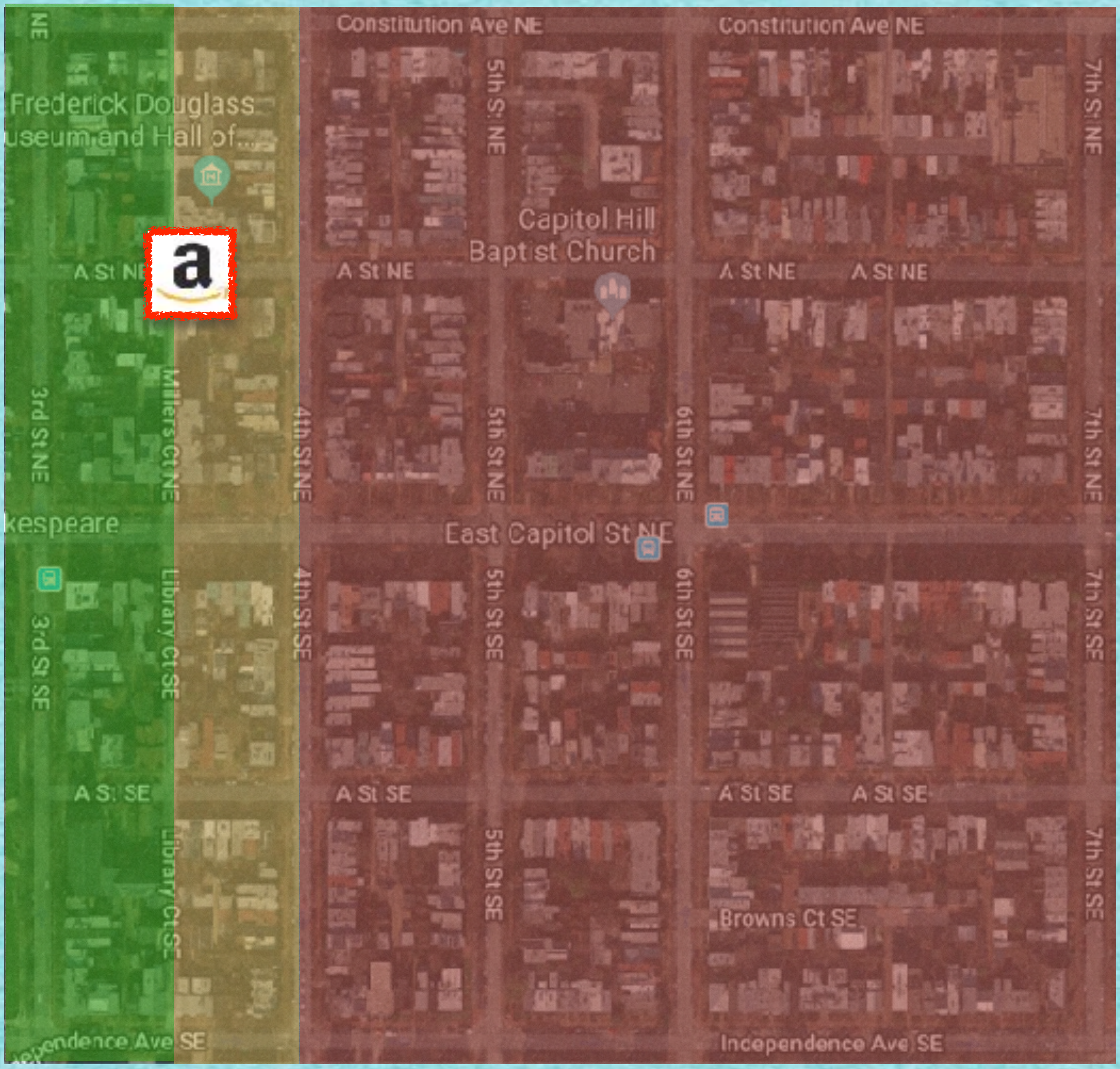
Betrachte x- und y-Position separat!

5.7.1 Standortprobleme



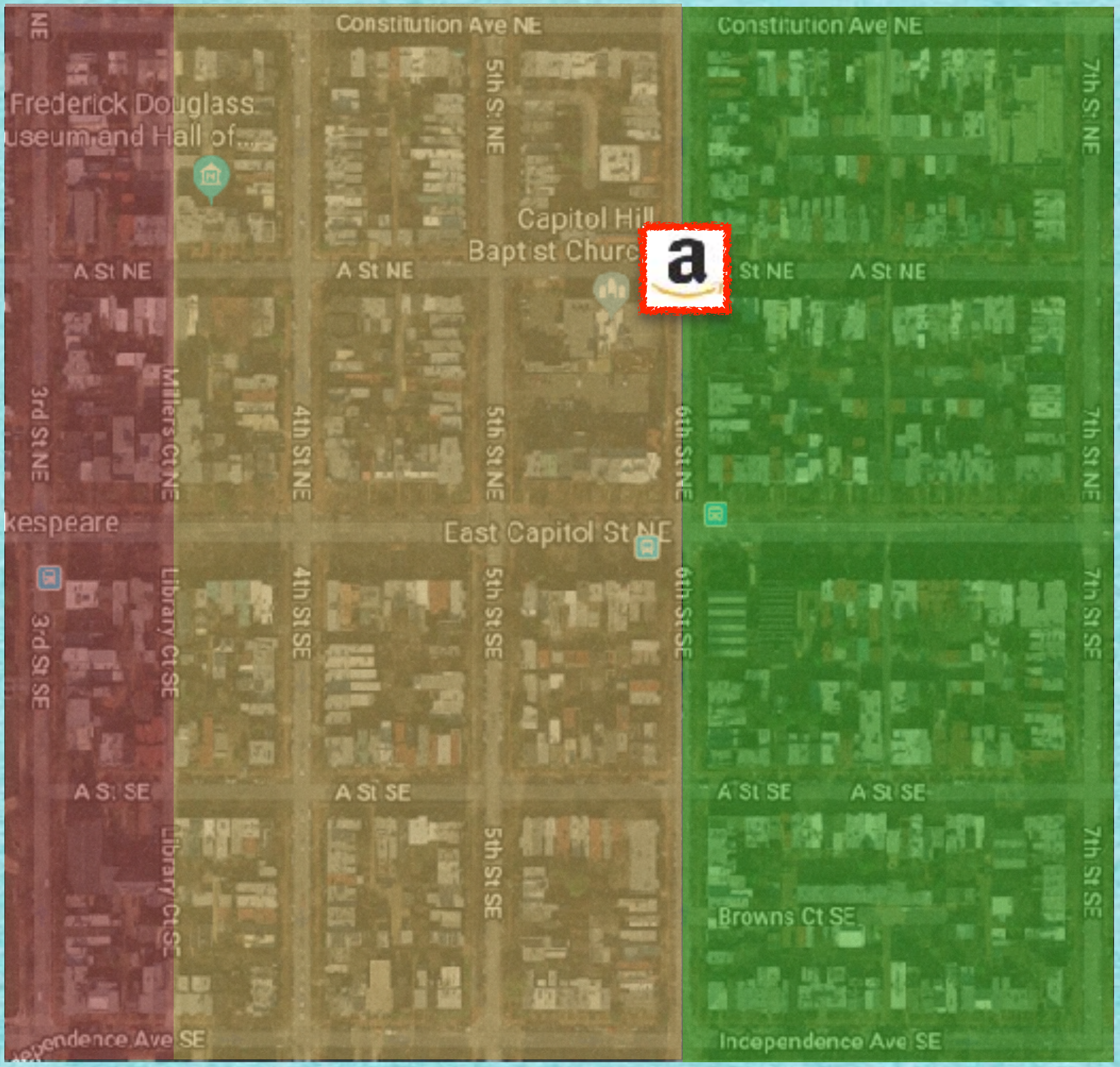
Betrachte x- und y-Position separat!

5.7.1 Standortprobleme



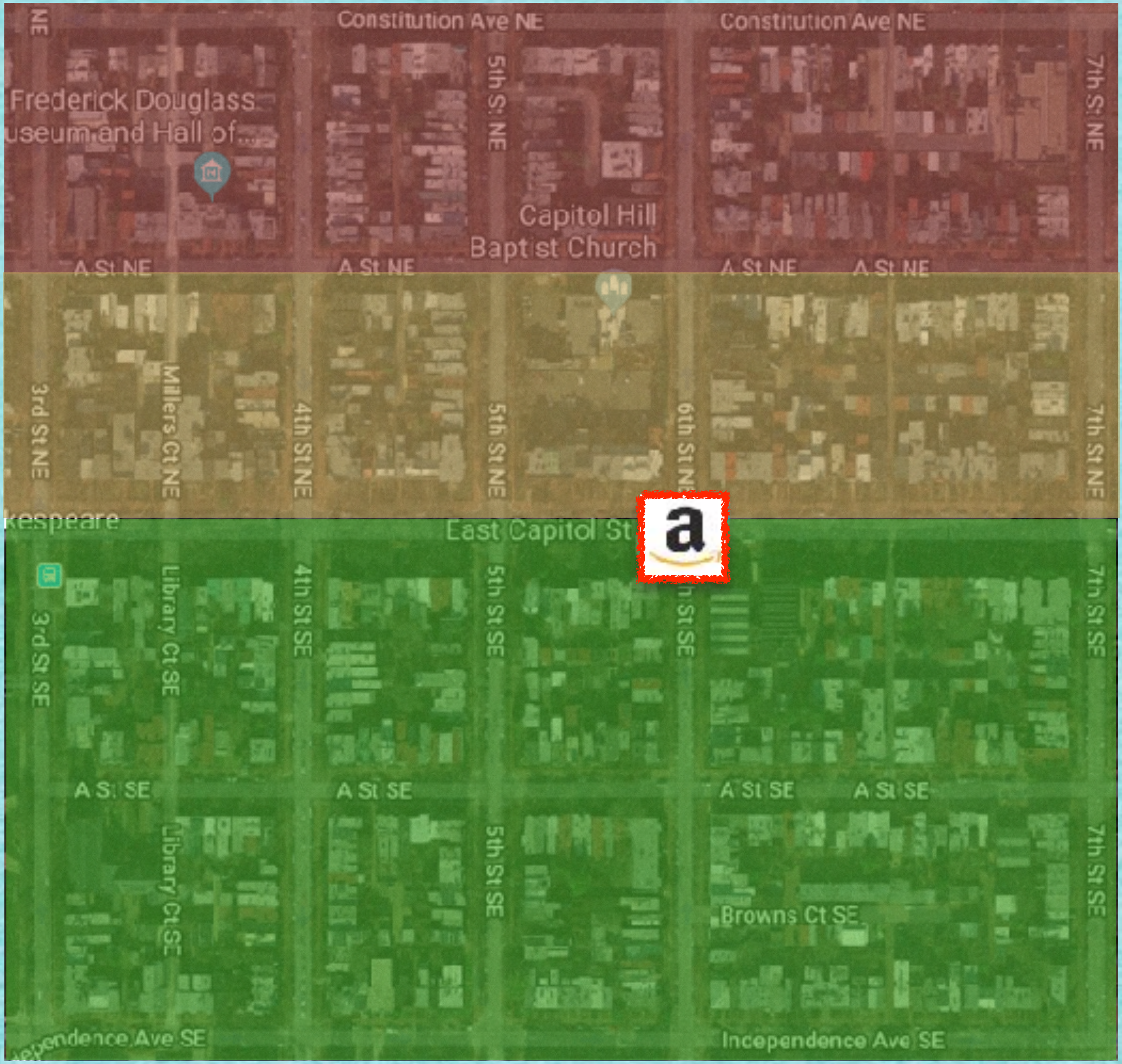
Betrachte x- und y-Position separat!

5.7.1 Standortprobleme



Betrachte x- und y-Position separat!

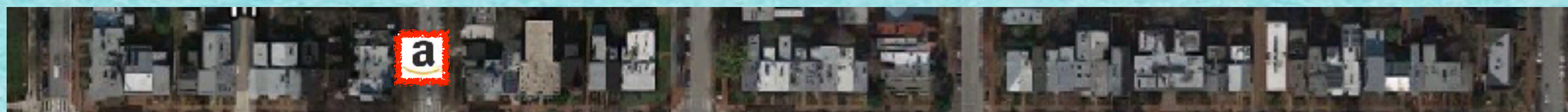
5.7.1 Standortprobleme

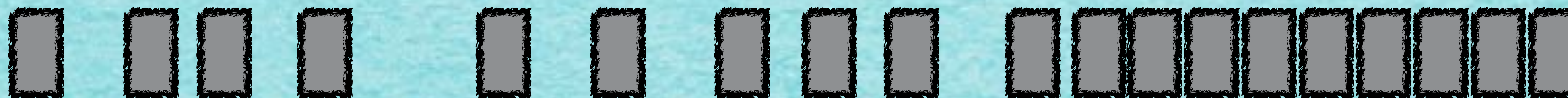


Betrachte x- und y-Position separat!

5.7.1 Standortprobleme

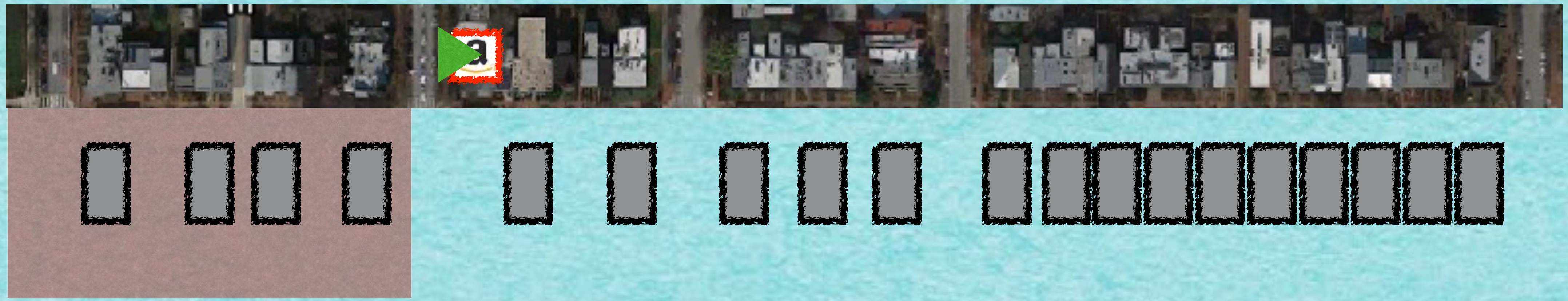
5.7.1 Standortprobleme



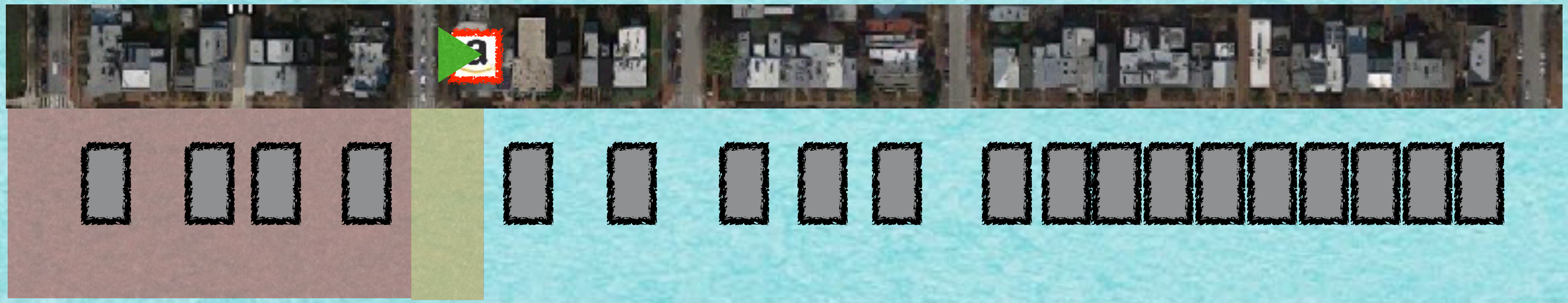


5.7.1 Standortprobleme

5.7.1 Standortprobleme



5.7.1 Standortprobleme



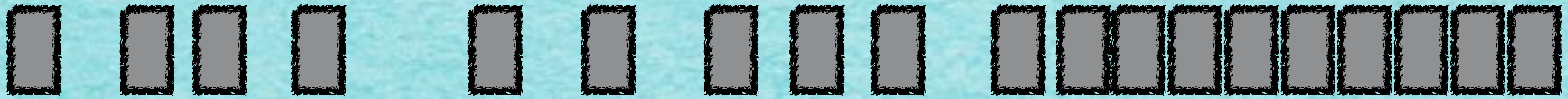
5.7.1 Standortprobleme

5.7.1 Standortprobleme

5.7.1 Standortprobleme

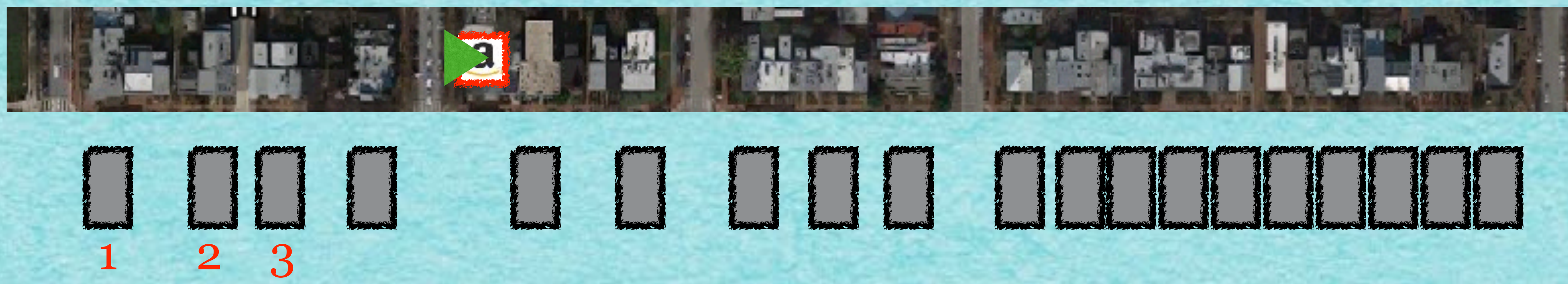
1

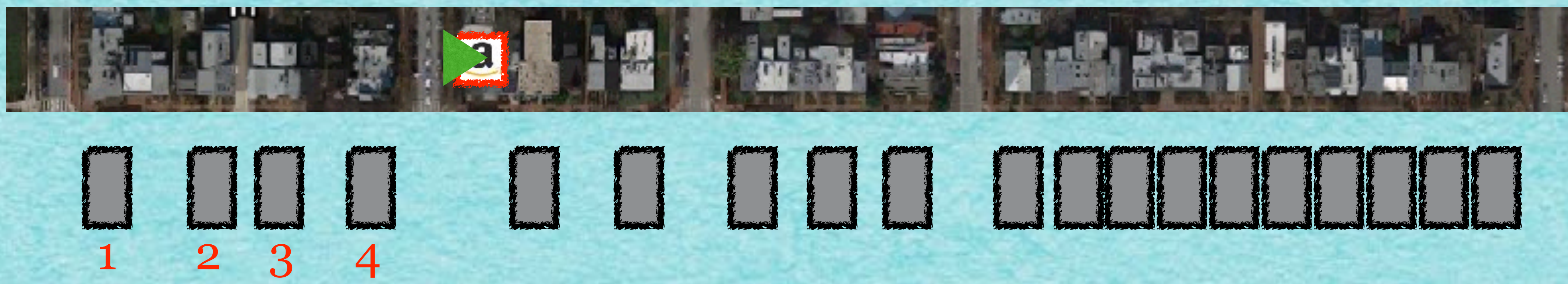
5.7.1 Standortprobleme



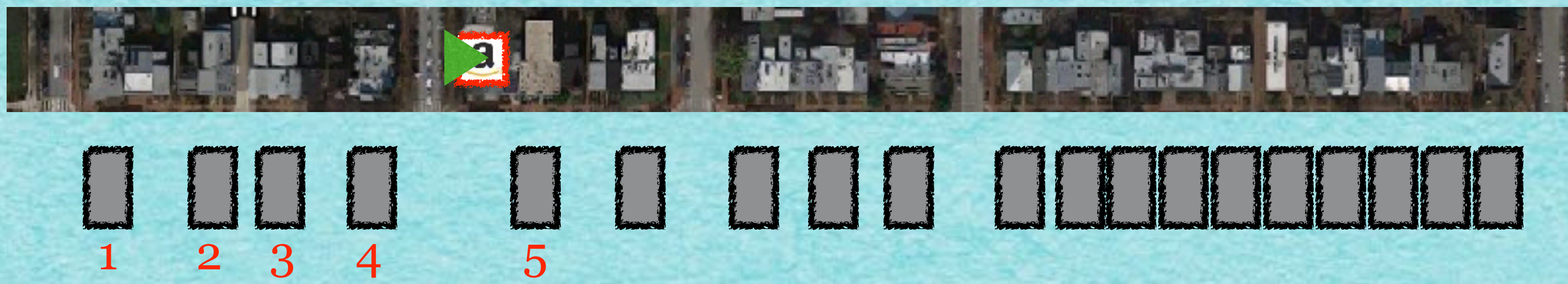
1 2

5.7.1 Standortprobleme

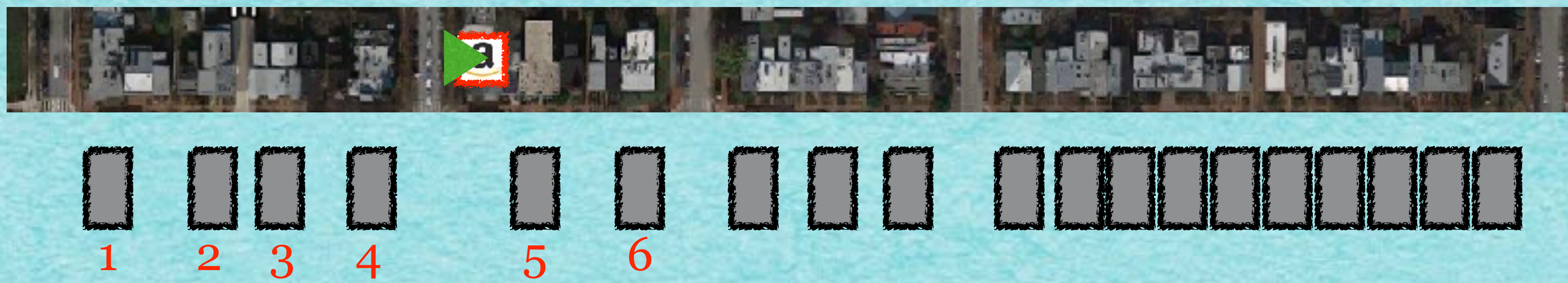



1
2
3
4

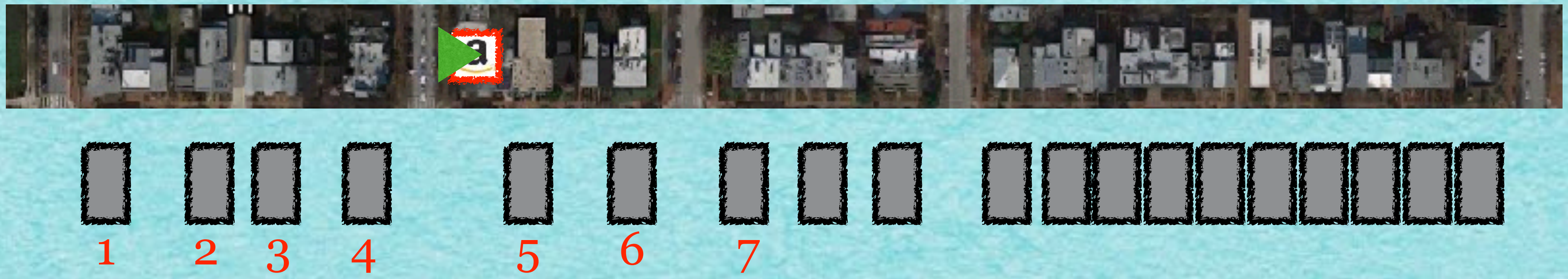
5.7.1 Standortprobleme



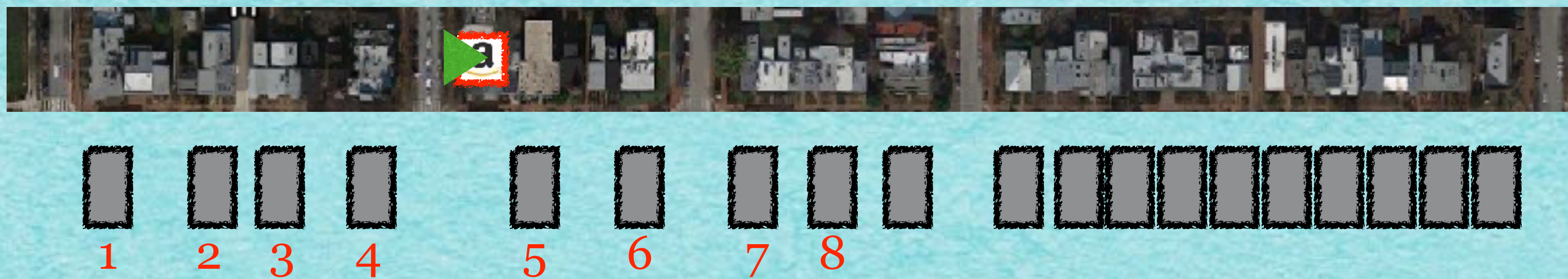
5.7.1 Standortprobleme



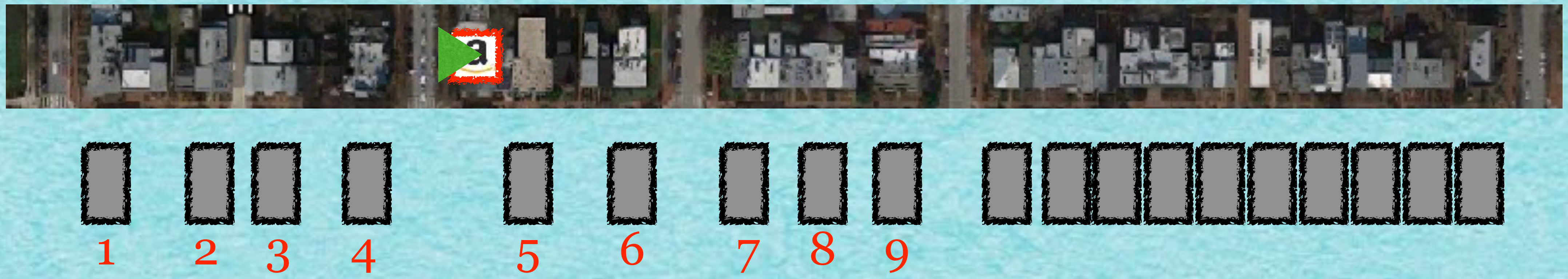
5.7.1 Standortprobleme



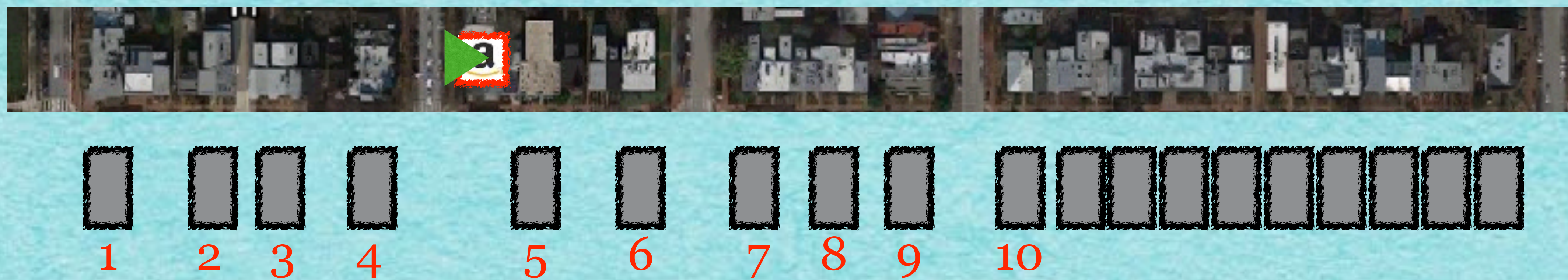
5.7.1 Standortprobleme



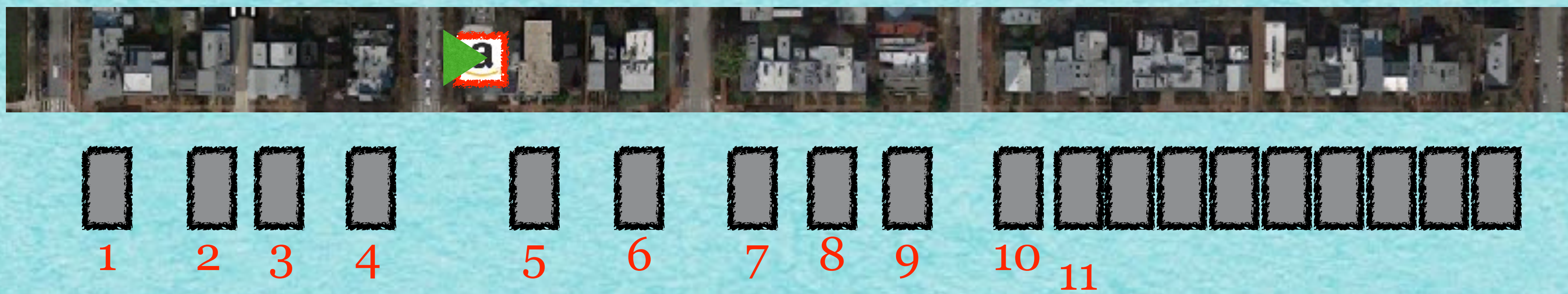
5.7.1 Standortprobleme



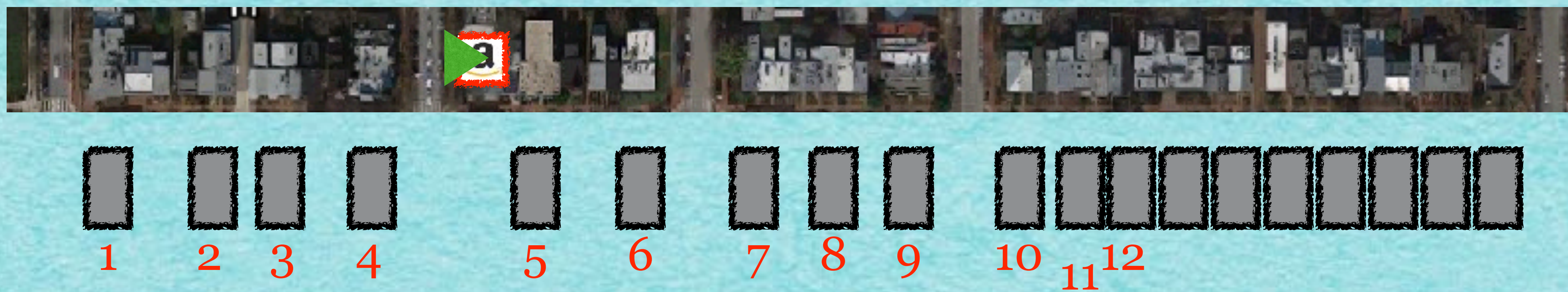
5.7.1 Standortprobleme



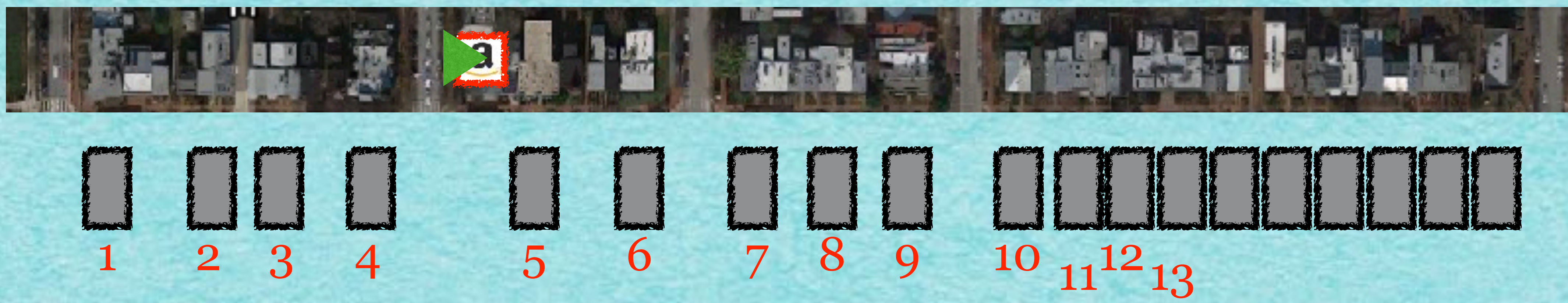
5.7.1 Standortprobleme



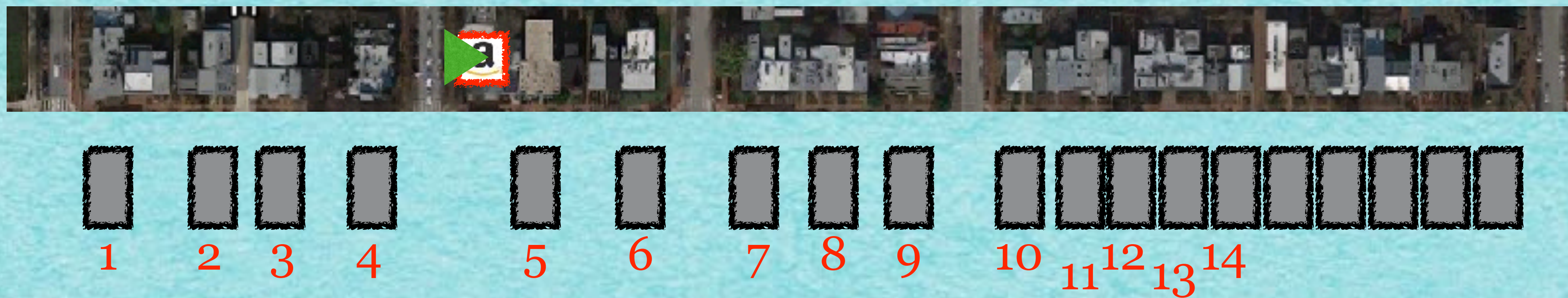
5.7.1 Standortprobleme



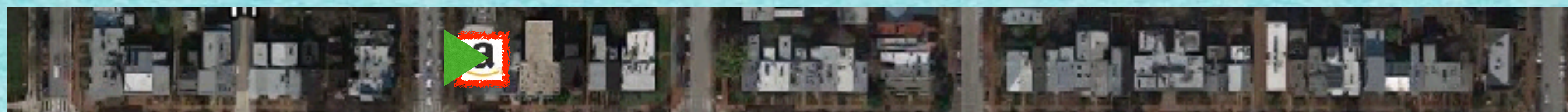
5.7.1 Standortprobleme

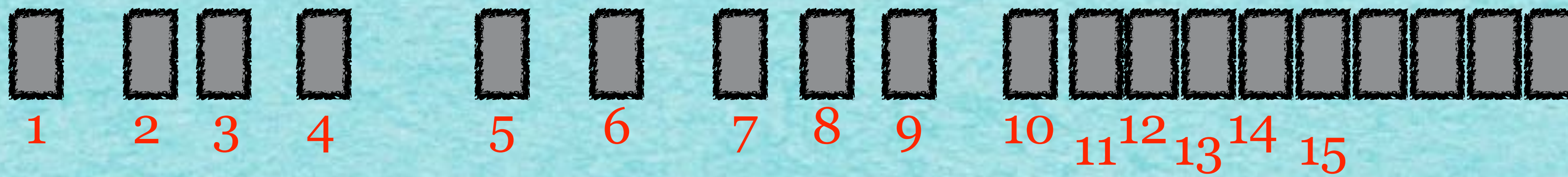


5.7.1 Standortprobleme

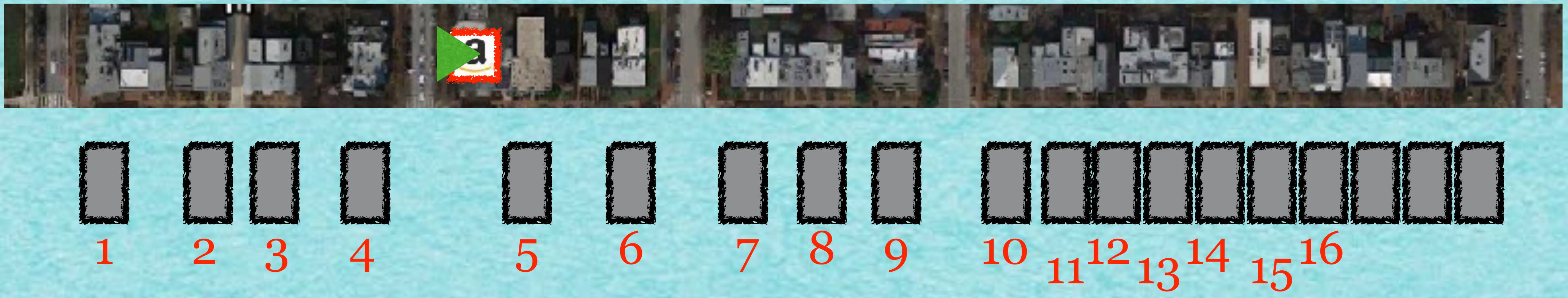


5.7.1 Standortprobleme

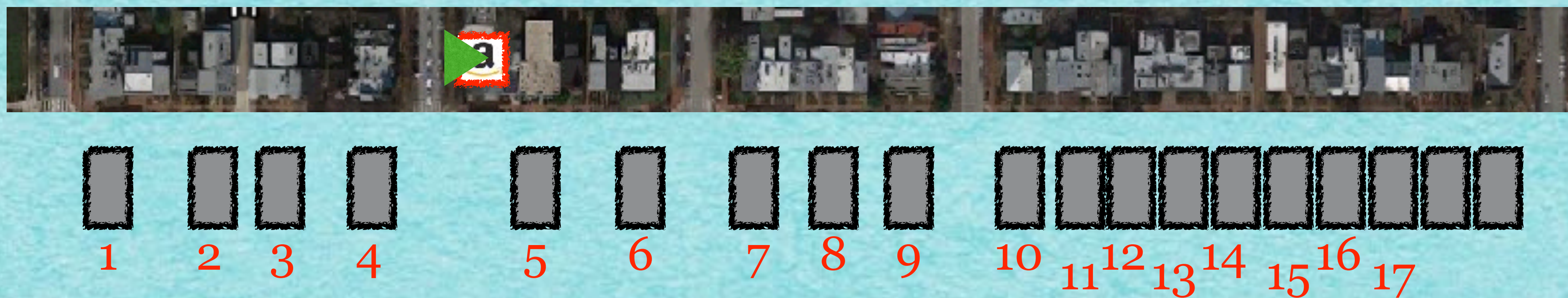




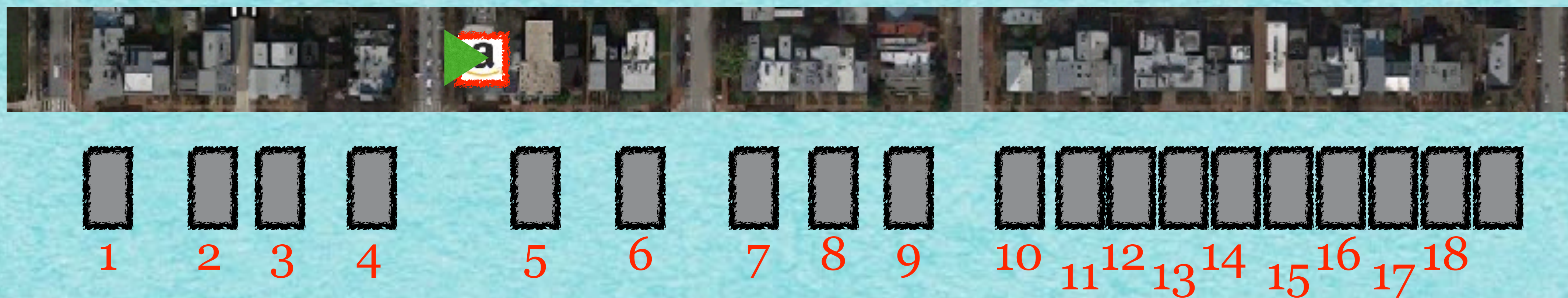
5.7.1 Standortprobleme



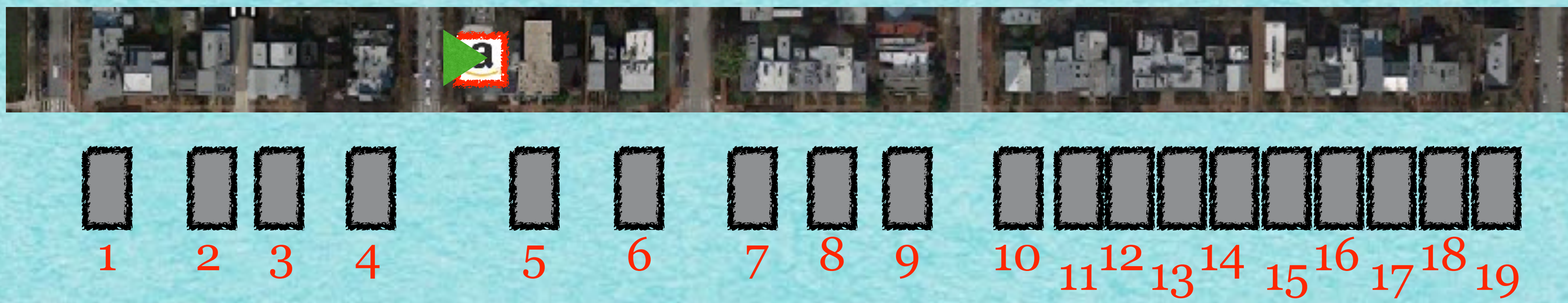
5.7.1 Standortprobleme



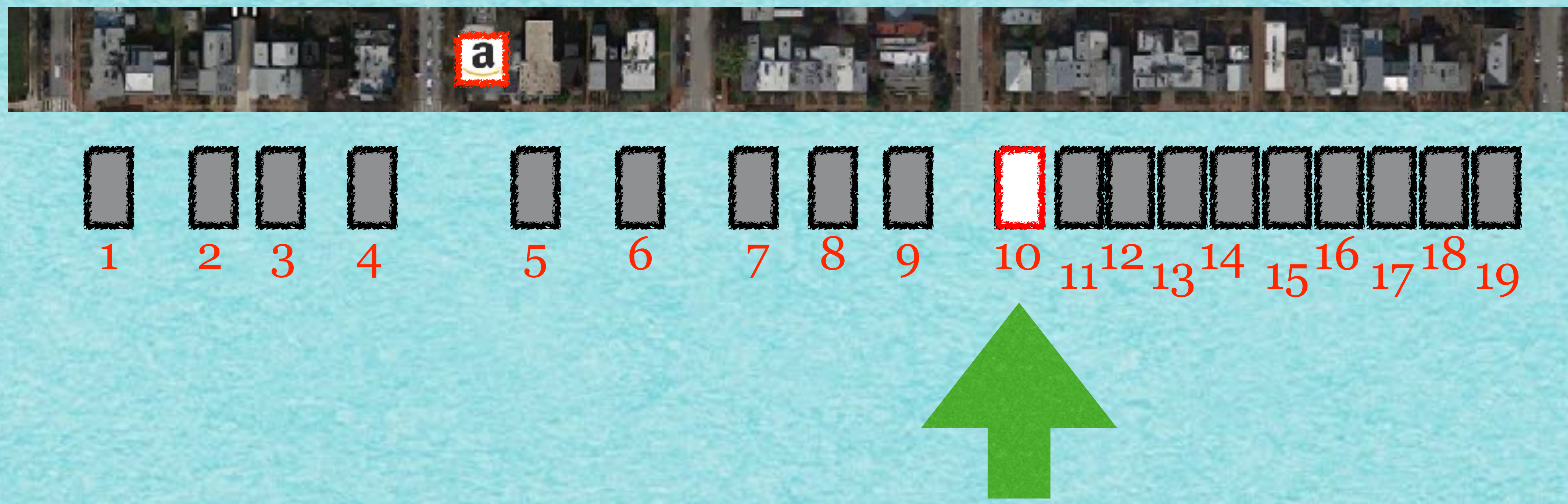
5.7.1 Standortprobleme



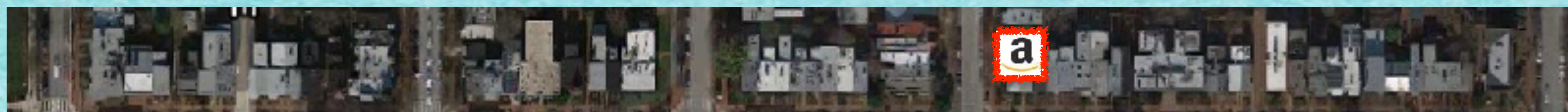
5.7.1 Standortprobleme

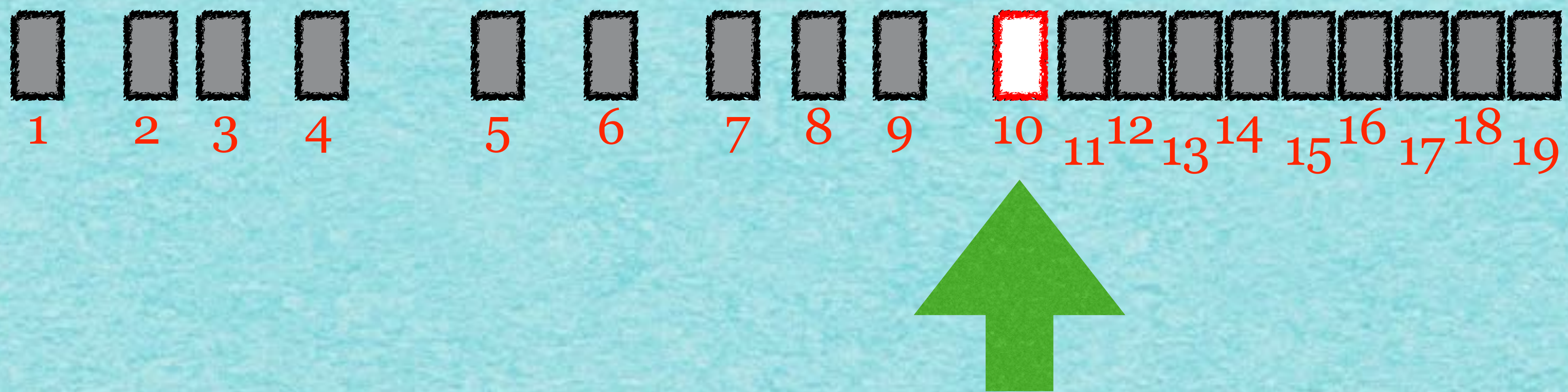


5.7.1 Standortprobleme

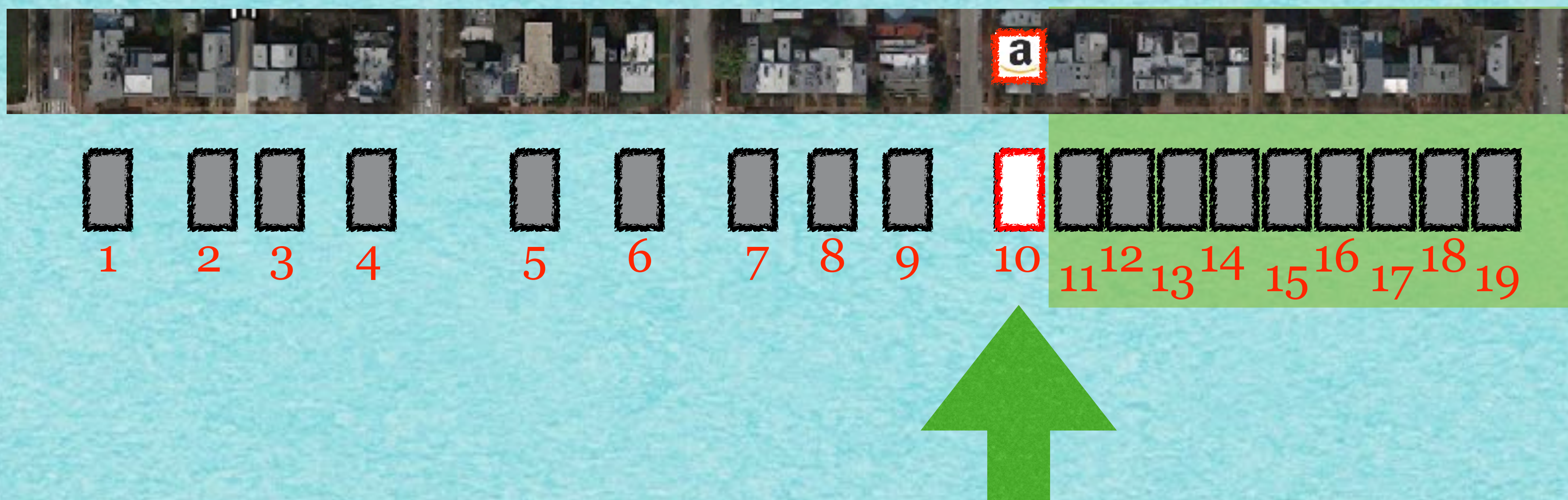


5.7.1 Standortprobleme

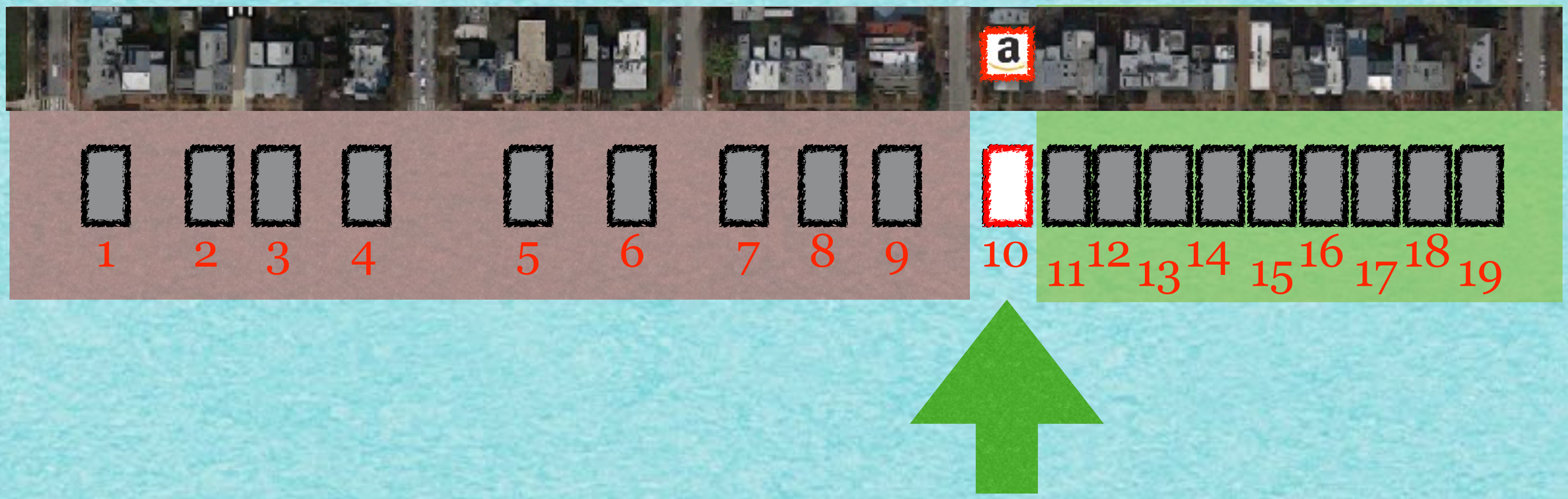




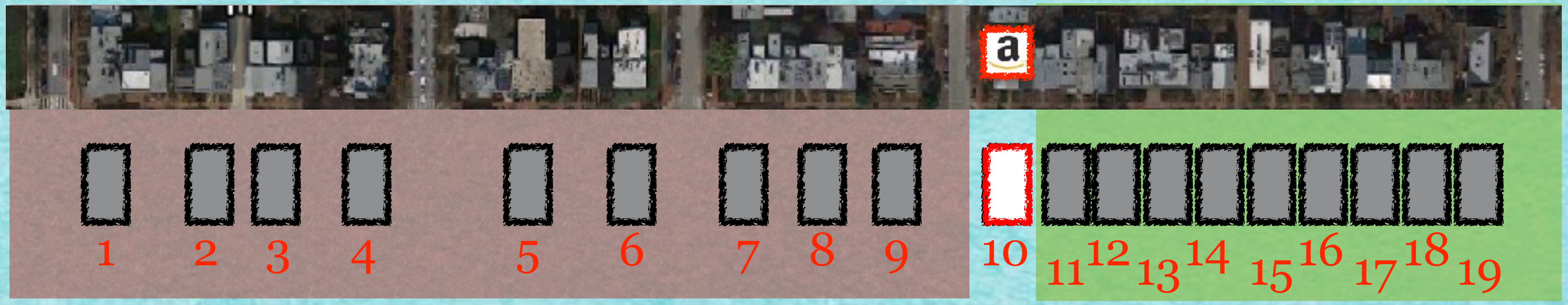
5.7.1 Standortprobleme



5.7.1 Standortprobleme

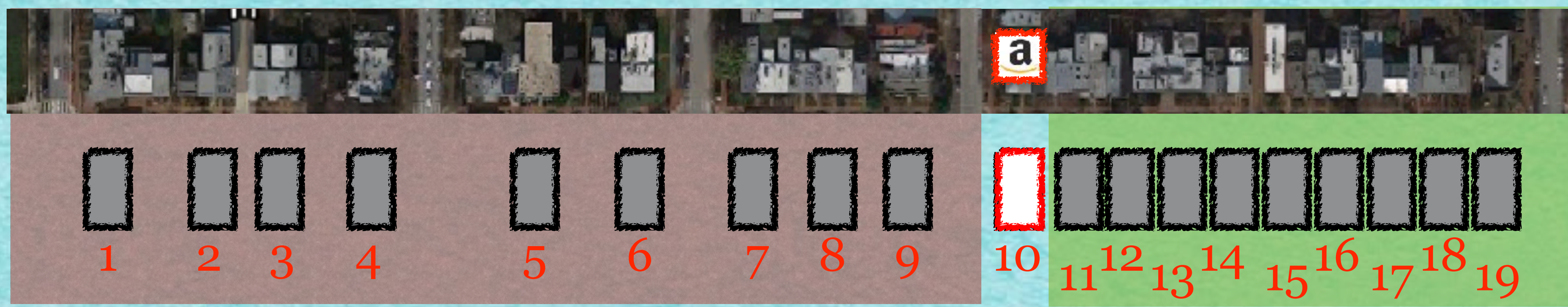


5.7.1 Standortprobleme

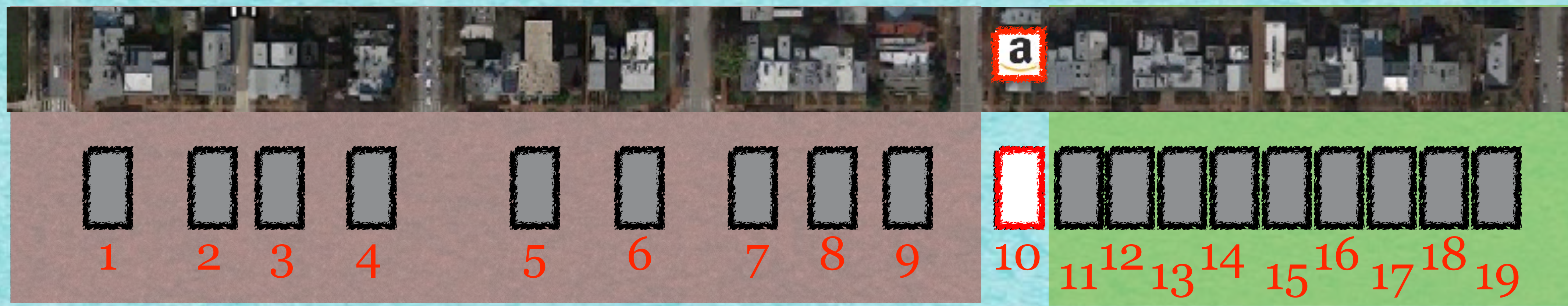


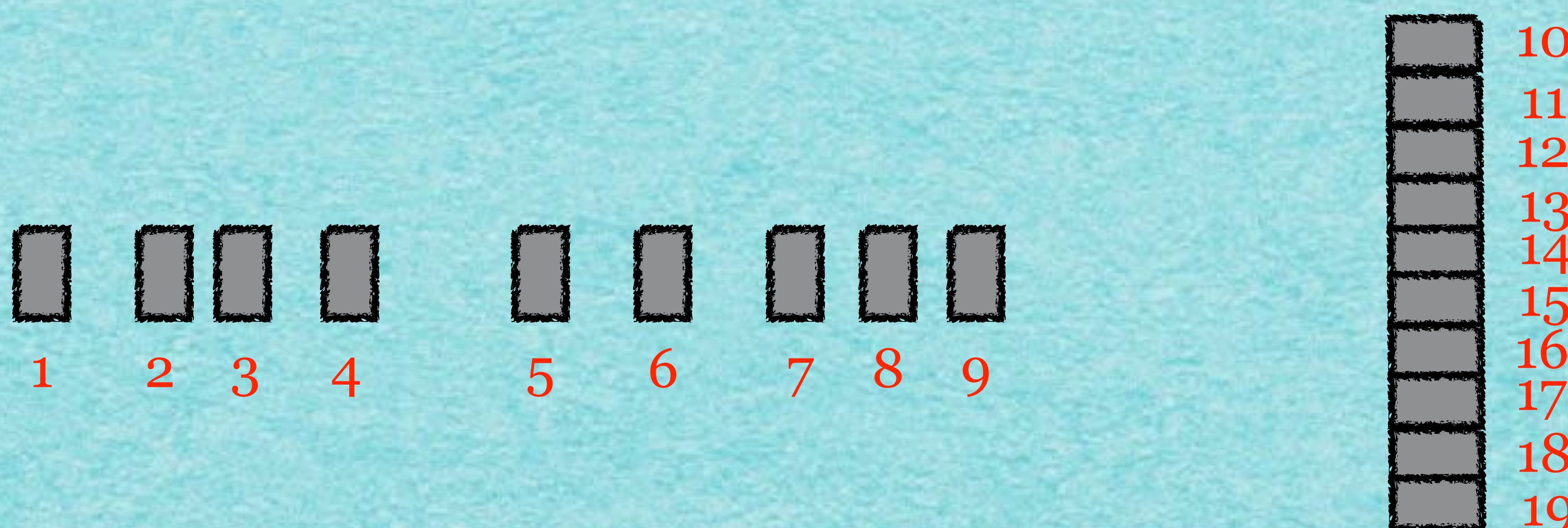
5.7.1 Standortprobleme

5.7.1 Standortprobleme



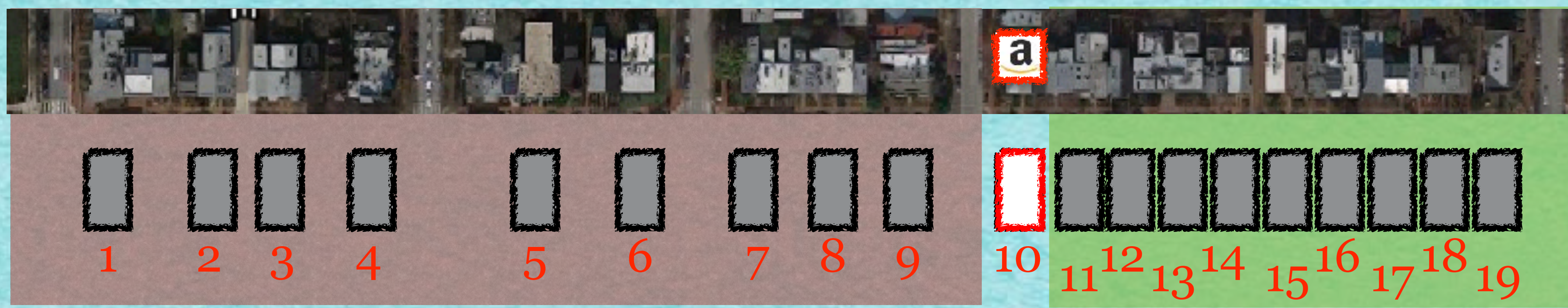
5.7.1 Standortprobleme

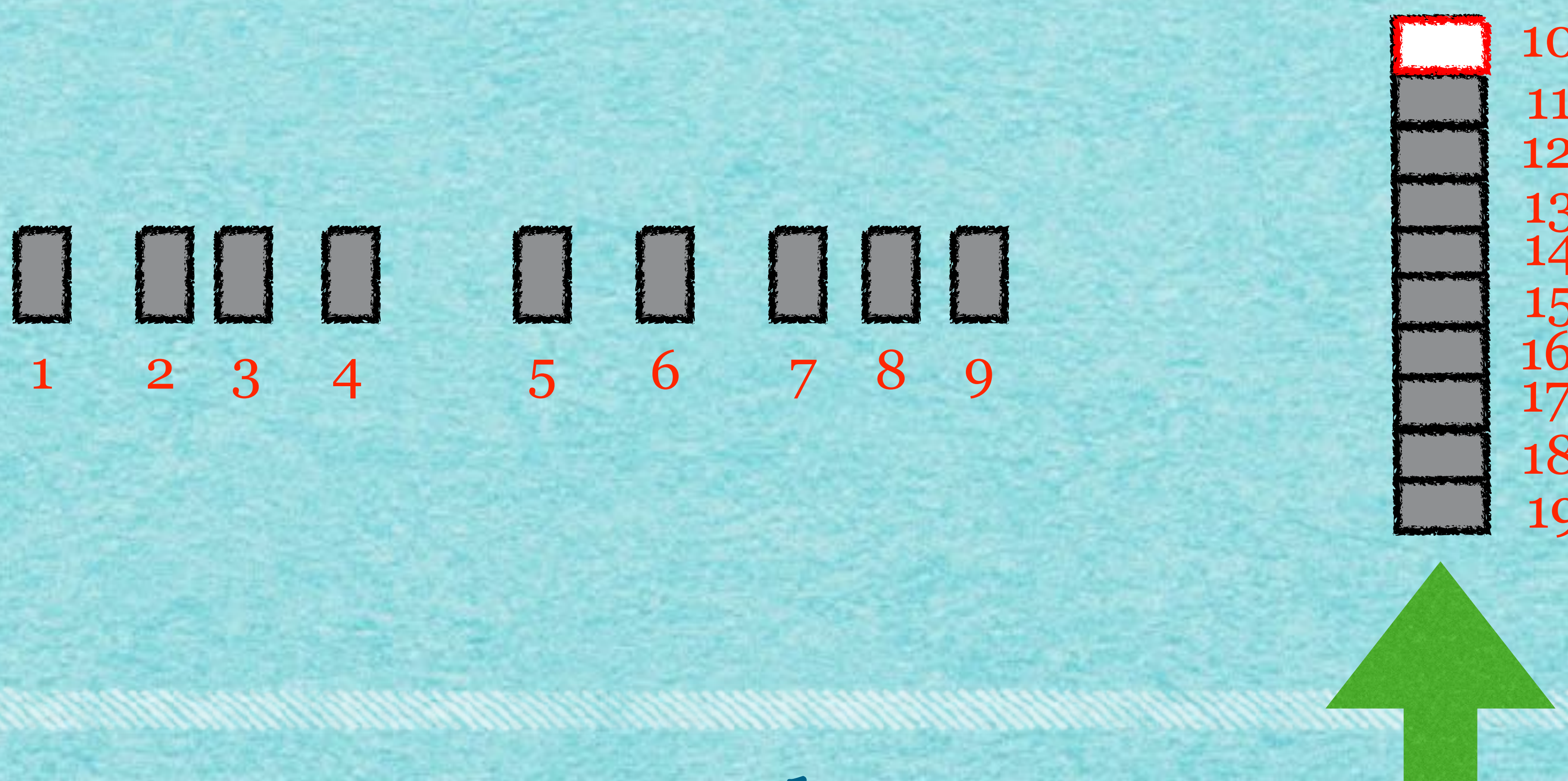




5.7.1 Standortprobleme

5.7.1 Standortprobleme





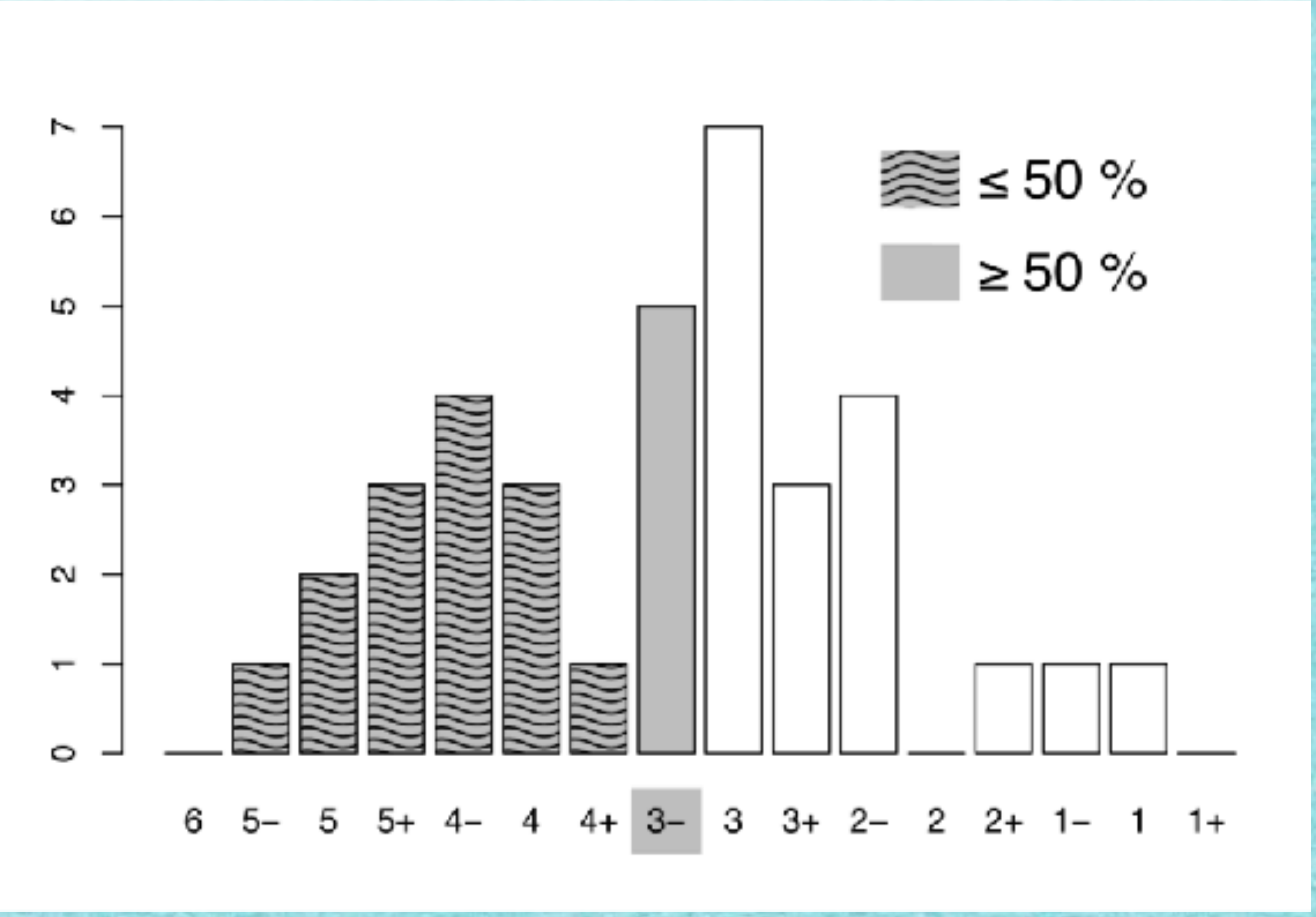
5.7.2 Median (diskret)

5.7.2 Median (diskret)

Definition 5.22. *(Rank k Element) Sei $x \in X$. Dann ist x ein Rank k Element (oder „k-tes Element"), wenn $|\{y \in X | y \leq x\}| = k$. Speziell heißt x* Median, *wenn er das $\lceil \frac{n}{2} \rceil$-tes Element ist.*

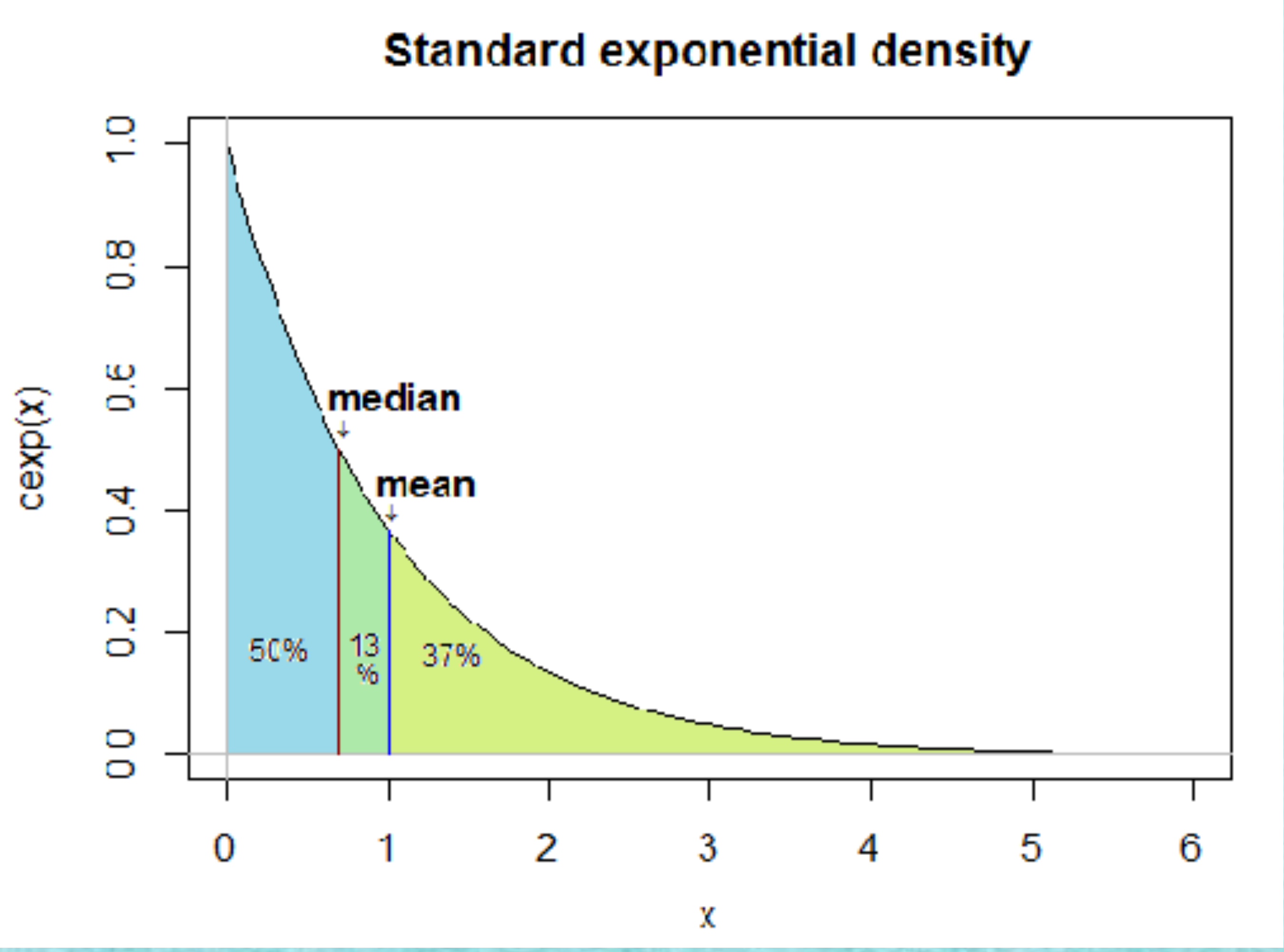
5.7.2 Median (diskret)

Definition 5.22. *(Rank k Element) Sei $x \in X$. Dann ist x ein Rank k Element (oder „k-tes Element“), wenn $|\{y \in X | y \leq x\}| = k$. Speziell heißt x* Median, *wenn er das $\lceil \frac{n}{2} \rceil$-tes Element ist.*

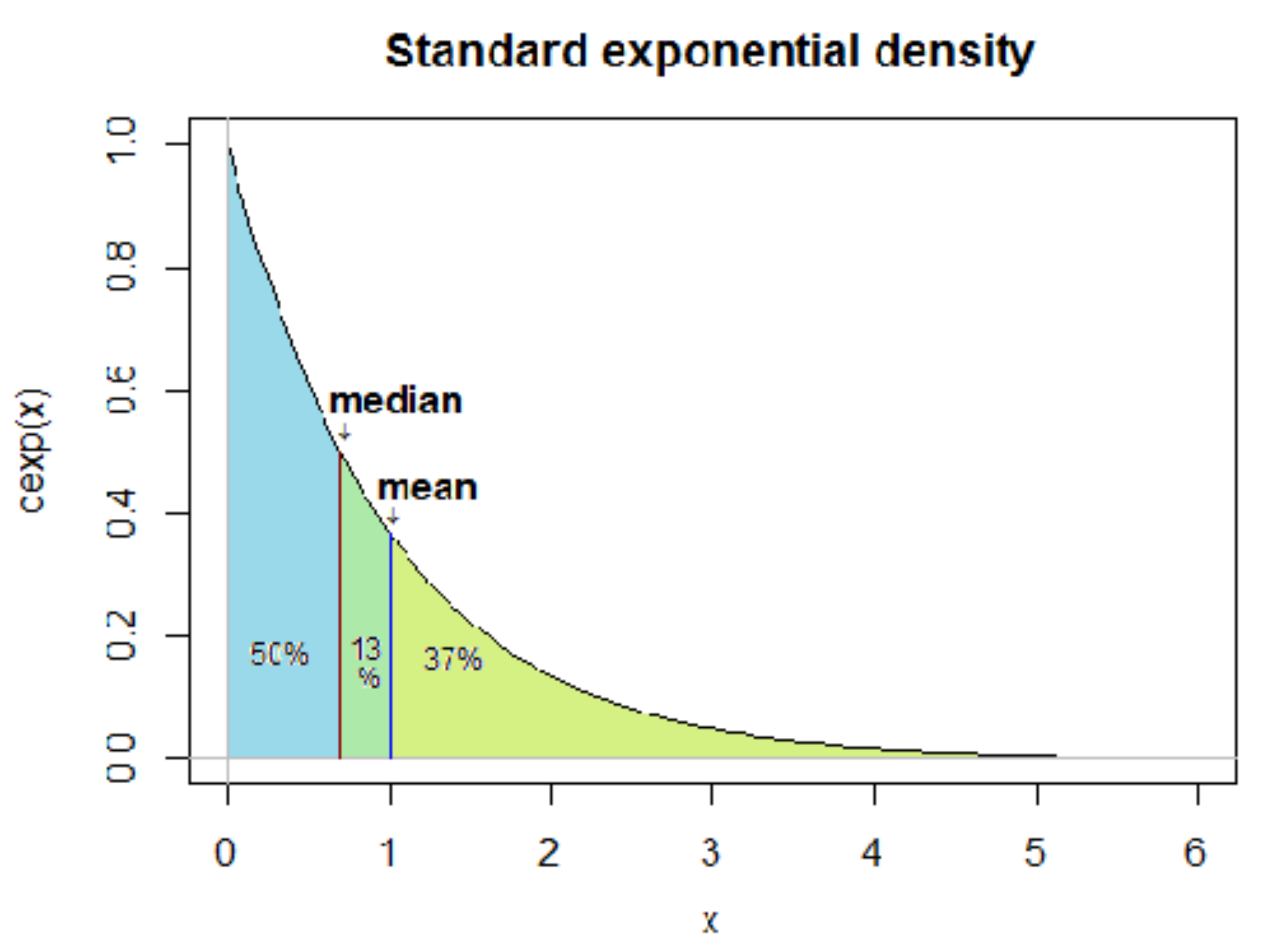


5.7.2 Median (kontinuierlich)

5.7.2 Median (kontinuierlich)



5.7.2 Median (kontinuierlich)



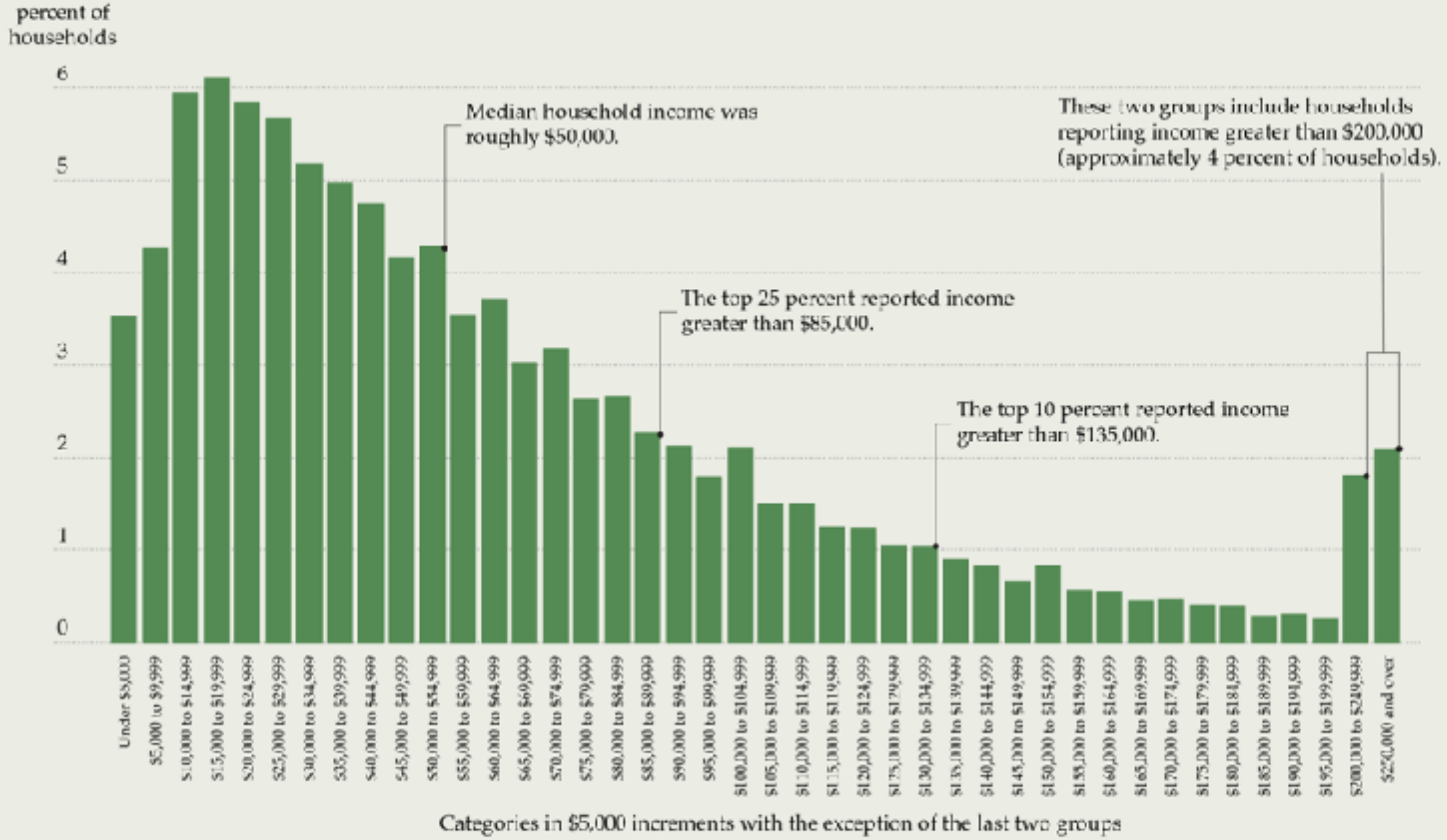
$$\int_{(-\infty,m]} dF(x) \geq \frac{1}{2} \text{ and } \int_{[m,\infty)} dF(x) \geq \frac{1}{2}$$

5.7.2 Mediane

5.7.2 Mediane

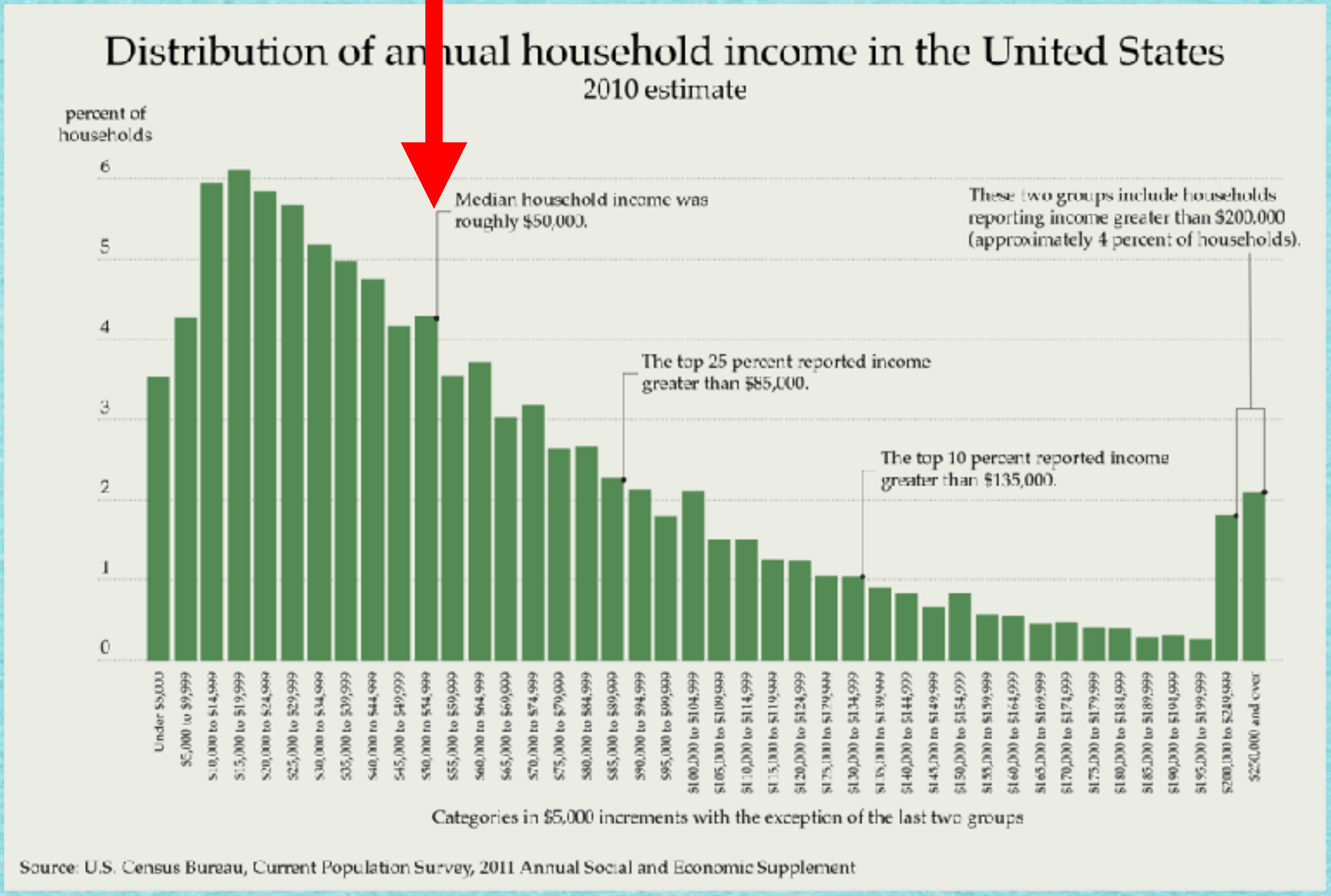
Distribution of annual household income in the United States

2010 estimate



Source: U.S. Census Bureau, Current Population Survey, 2011 Annual Social and Economic Supplement

5.7.2 Mediane


Distribution of annual household income in the United States
2010 estimate
percent of households
0
1
2
3
4
5
6
Median household income was roughly $50,000.
The top 25 percent reported income greater than $85,000.
The top 10 percent reported income greater than $135,000.
These two groups include households reporting income greater than $200,000 (approximately 4 percent of households).
Categories in $5,000 increments with the exception of the last two groups
Source: U.S. Census Bureau, Current Population Survey, 2011 Annual Social and Economic Supplement

5.7.2 Mediane

Wissen aus Braunschweig

Forscher der TU um Professor Sándor Fekete wollen Autofahrer mit besseren Daten über den vorausfahrenden Verkehr versorgen. Mancher Stau könnte sich dadurch schneller auflösen. Technisch ist diese Kommunikation kein Problem.

Der Verkehr könnte besser fließen

Die Autoschlange, durch Kommunikation verbunden – TU-Arbeitsgruppe stellt neues Informationssystem vor

Von Harald Duin

Ein glücklicher Tag. Ich erwische den Stauforscher Sándor Fekete kurz vor seinem Flug nach Singapur in seinem Büro. Logisch, in Singapur gibt es sicher jede Menge Staus. Doch dorthin eilt er aus einem anderen Grunde. In Singapur findet der Weltkongress für Origami statt, landläufig die Kunst des Papierfaltens.

Doch mit Origami kann man nicht nur Kraniche und andere Flugobjekte knicken. Mit dieser Technik lassen sich auch Anwendungen in Medizin, Technik oder Raumfahrt optimieren. Fekete nennt als Beispiel das Falten und Entfalten von Airbags. Damit keine Missverständnisse aufkommen: Er persönlich wird in Singapur keine Airbags falten. Wohl aber kann man sagen, dass seine Tätigkeit im Institut für Betriebssysteme und Rechnerverbund ihm alle Chancen zur Entfaltung bietet.

Zurück zum Stau. Fekete: „Gucken Sie sich doch mal an, was die Autos heute so alles können, aber untereinander sind sie völlig unvollkommen vernetzt.“ Schön wäre es zum Beispiel beim Stop-and-Go-Verkehr mehr zu wissen, was die

Alles fließt? Schön wär's. Der Stau ist eine fast tägliche Erfahrung. Wie hier auf der A2. Foto: Archiv

Verkehr, mehr zu wissen, was die anderen Autos davor tun.

Manche Staus scheinen wie aus einem Nichts zu entstehen. Man spricht auch von einem Phantomstau. Der Vorgang ist freilich seit Jahren enträtselt. Fekete: „Bei hohen Verkehrsdichten kann sich schon eine kleine Störung, etwa ein starkes Abbremsen oder ein zu dichtes Auffahren, nach hinten verstärken, durch den gesamten Verkehr fortpflanzen und ein ‚Schwingen' des Verkehrssystems auslösen."

Wenn sie einmal da sind, lassen sich die Stauwellen nicht mehr so einfach ausbügeln. Schon kleine Störungen genügen, um die Wellen zu erzeugen. Wie so ein „Ruckeln" entsteht, lässt sich sowohl in Simulationen wie auch in Experimenten beobachten. Fekete: „Das Auftreten von Stauwellen ist in den physikalischen Gesetzen verankert."

„Das Auftreten von Stauwellen ist in den physikalischen Gesetzen verankert."

Sándor Fekete, Verkehrsforscher

Was bringt der Versuch der TU-Forscher, Fahrzeuge mit besseren Daten über den vorausfahrenden Verkehr zu versehen? Eine ganze Menge. Bereits jetzt kann man mit drahtloser Kommunikation Informationen über Ort und Geschwindigkeit von Fahrzeugen weitergeben, und es existieren, wie Fekete erläutert, auch schon Systeme, mit denen sich ein Auto an die Geschwindigkeit eines unmittelbar vorausfahrenden Autos anpassen kann.

Die beschriebenen Stauwellen lassen sich jedoch damit nicht beseitigen. Hierfür muss die Wechselwirkung zwischen den Fahrzeugen so beeinflusst werden, dass sich auch die physikalischen Gesetzmäßigkeiten für den Fahrzeugfluss verändern.

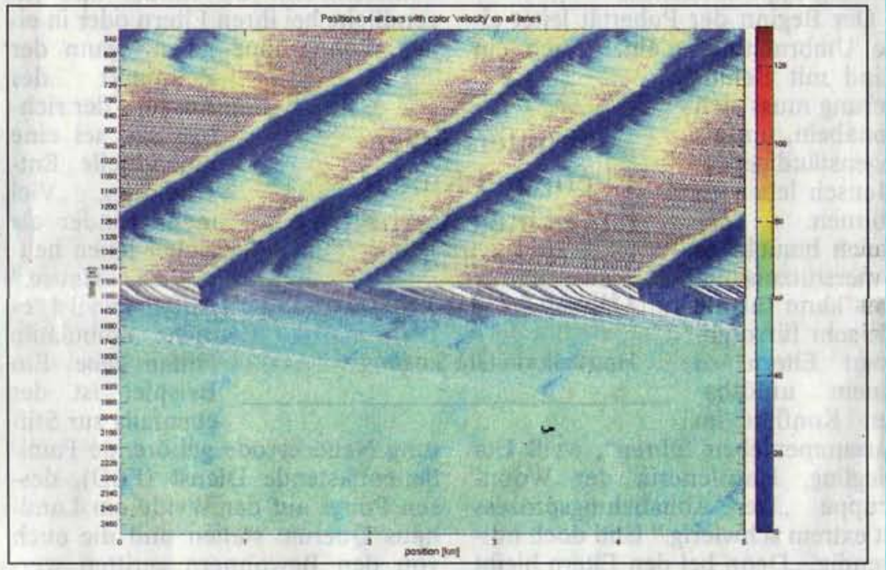
Die Arbeitsgruppe um Sándor Fekete hat nun ein einfaches Regelwerk entwickelt, mit dem Autos die Informationen mehrerer vorausfahrender Autos auswerten können, um den Verkehrsfluss im Stau zu glätten. Erkennt der Fahrer, gut informiert, dass sich der vorausfahrende Verkehr verlangsamt, muss er nicht unnötig beschleunigen.

Das hat einen verblüffenden Effekt auf den gesamten Verkehrsfluss.

Fekete: „In Simulationen zeigt sich eine Treibstoffersparnis bis zu 40 Prozent." Der Verkehr kann gleichmäßiger fließen, und der Stau kann sich sogar wieder auflösen, selbst wenn nur ein Teil der Fahrzeuge mitspielt.

Da jeder Fahrer Sprit spart, gibt es einen starken Anreiz, das System zu benutzen und die Regeln einzuhalten. Und die Nerven werden geschont. Freilich muss das ganze an der TU ersonnene System tatsächlich noch eingebaut werden. Das ginge auch bei älteren Autos. Und die Industrie muss mitspielen. Man darf sich freilich schon ein bisschen wundern, dass die großen Autokonzerne dieses Thema bisher wenig beachteten.

Der Stau und die Intelligenz, seine Schockwellen zu mäßigen. Ein Graffito an der A 40 verweist auf den eigentlichen Verursacher: „Ihr steht nicht im Stau, Ihr seid der Stau!"



Grafik „Simulation von Stau und Auflösung": Im oberen Teil der Simulation erkennt man typische Stauwellen, dargestellt als blaue Streifen. In der Bildmitte wird das neue, an der TU entwickelte Regelwerk eingeschaltet. Der Stau löst sich weitgehend auf. Bild: Sándor Fekete

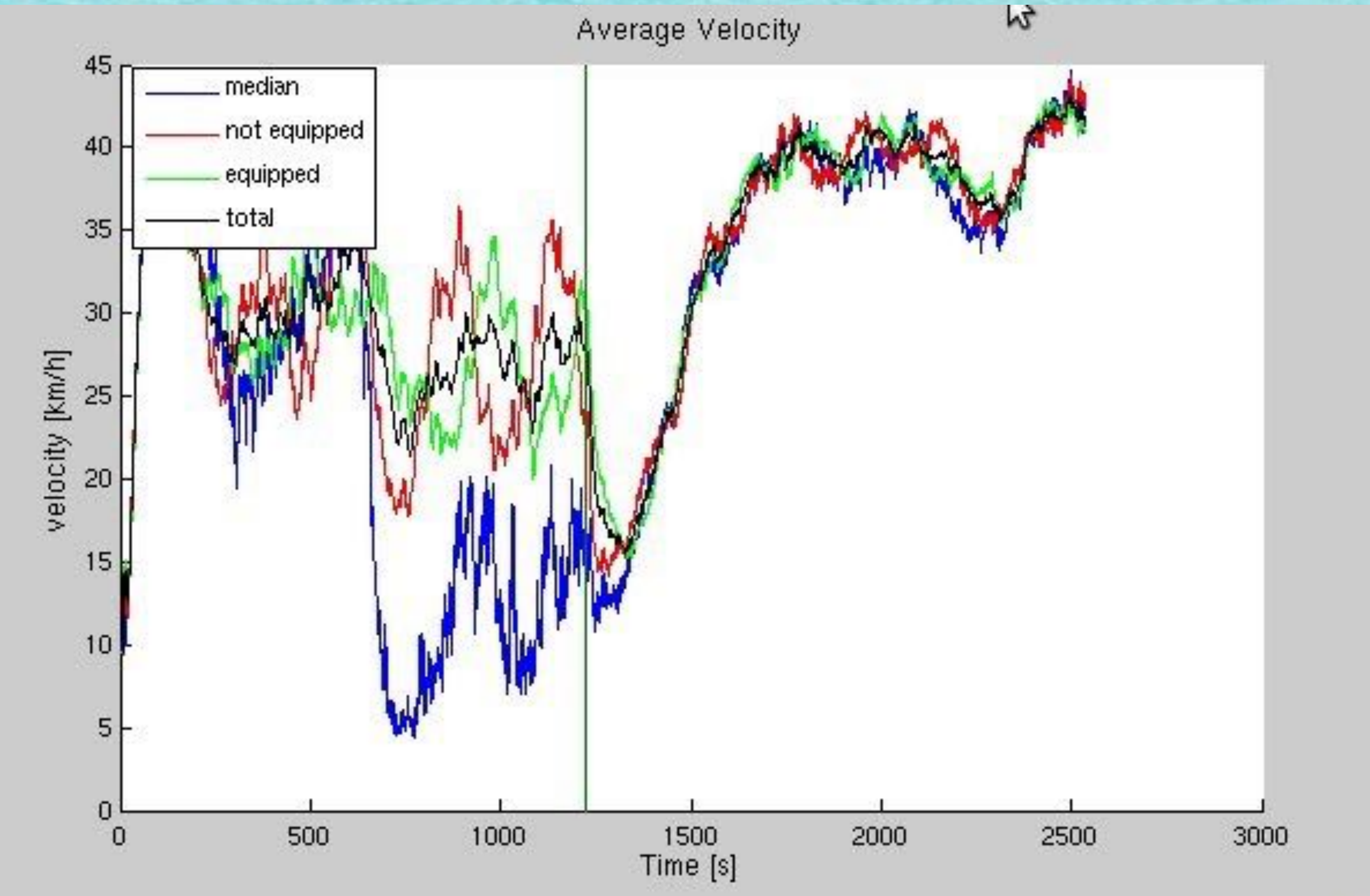
LEBENSDATEN

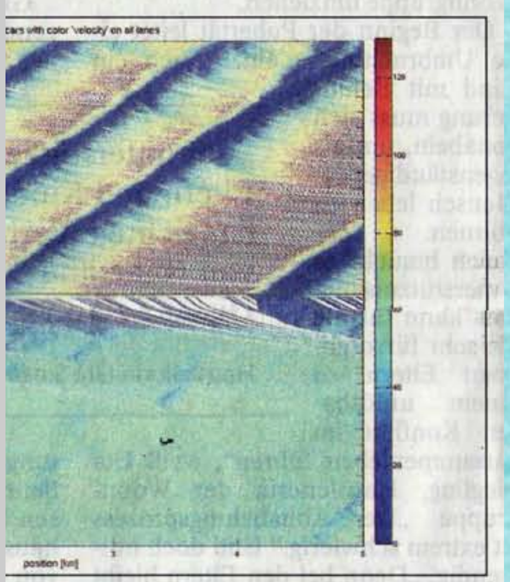
Professor Dr. Sándor Fekete

45 Jahre. Studium der Mathematik und Physik in Köln, Diplom 1989. Promotion (Mathematik) in Waterloo (Kanada) 1992. Forschungsaufenthalte in Stony Brook (USA), Tel Aviv, London, Newcastle (Australien), Kingston (Kanada) und am Massachusetts Institute of Technology (MIT).

Habilitation in Köln 1998. Danach an der TU Berlin. Seit 2001 Professor an der TU Braunschweig, zunächst in der Mathematik, seit 2007 in der Informatik.

5.7.2 Mediane





„Das Auftreten von Stauwellen ist in den physikalischen Gesetzen verankert.“
Sándor Fekete, Verkehrsforscher

Grafik „Simulation von Stau und Auflösung“: Im oberen Teil der Simulation erkennt man typische Stauwellen, dargestellt als blaue Streifen. In der Bildmitte wird das neue, an der TU entwickelte Regelwerk eingeschaltet. Der Stau löst sich weitgehend auf. Bild: Sándor Fekete

entsteht, lässt sich sowohl in Simulationen wie auch in Experimenten beobachten. Fekete: „Das Auftreten von Stauwellen ist in den physikalischen Gesetzen verankert.“

Was bringt der Versuch der TU-Forscher, Fahrzeuge mit besseren Daten über den vorausfahrenden Verkehr zu versehen? Eine ganze Menge. Bereits jetzt kann man mit drahtloser Kommunikation Informationen über Ort und Geschwindigkeit von Fahrzeugen weiterge-

Verkehrsfluss im Stau zu glätten. Erkennt der Fahrer, gut informiert, dass sich der vorausfahrende Verkehr verlangsamt, muss er nicht unnötig beschleunigen.

Das hat einen verblüffenden Effekt auf den gesamten Verkehrsfluss.

Fekete: „In Simulationen zeigt sich eine Treibstoffersparnis bis zu 40 Prozent.“ Der Verkehr kann gleichmäßiger fließen, und der Stau kann sich sogar wieder auflösen, selbst wenn nur ein Teil der Fahrzeuge mitspielt.

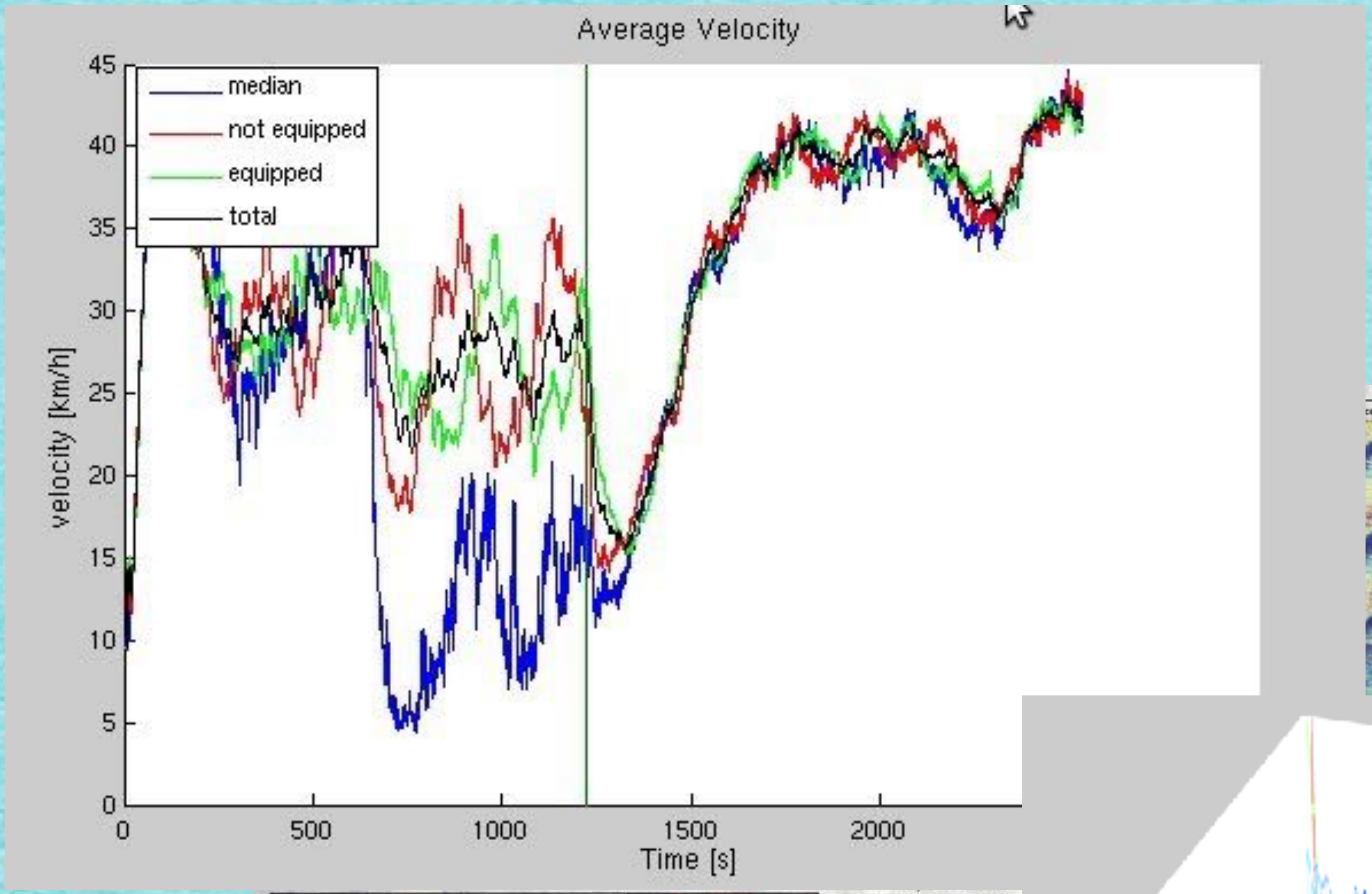
Da jeder Fahrer Sprit spart, gibt es einen starken Anreiz, das System zu benutzen und die Regeln einzuhalten. Und die Nerven werden geschont. Freilich muss das ganze an der TU ersonnene System tatsächlich noch eingebaut werden. Das ginge auch bei älteren Autos. Und die Industrie muss mitspielen. Man darf sich freilich schon ein bisschen wundern, dass die großen Autokonzerne dieses Thema bisher wenig beachteten.

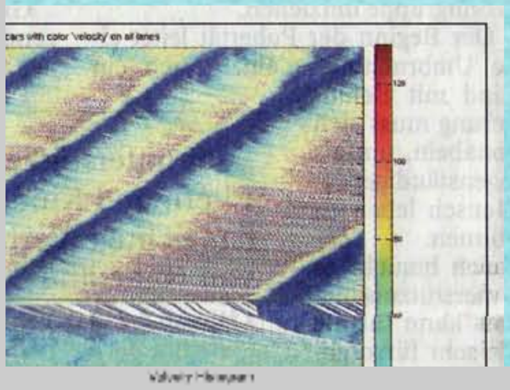
Der Stau und die Intelligenz, seine Schockwellen zu mäßigen. Ein Graffito an der A 40 verweist auf den eigentlichen Verursacher: „Ihr steht nicht im Stau, Ihr seid der Stau!“

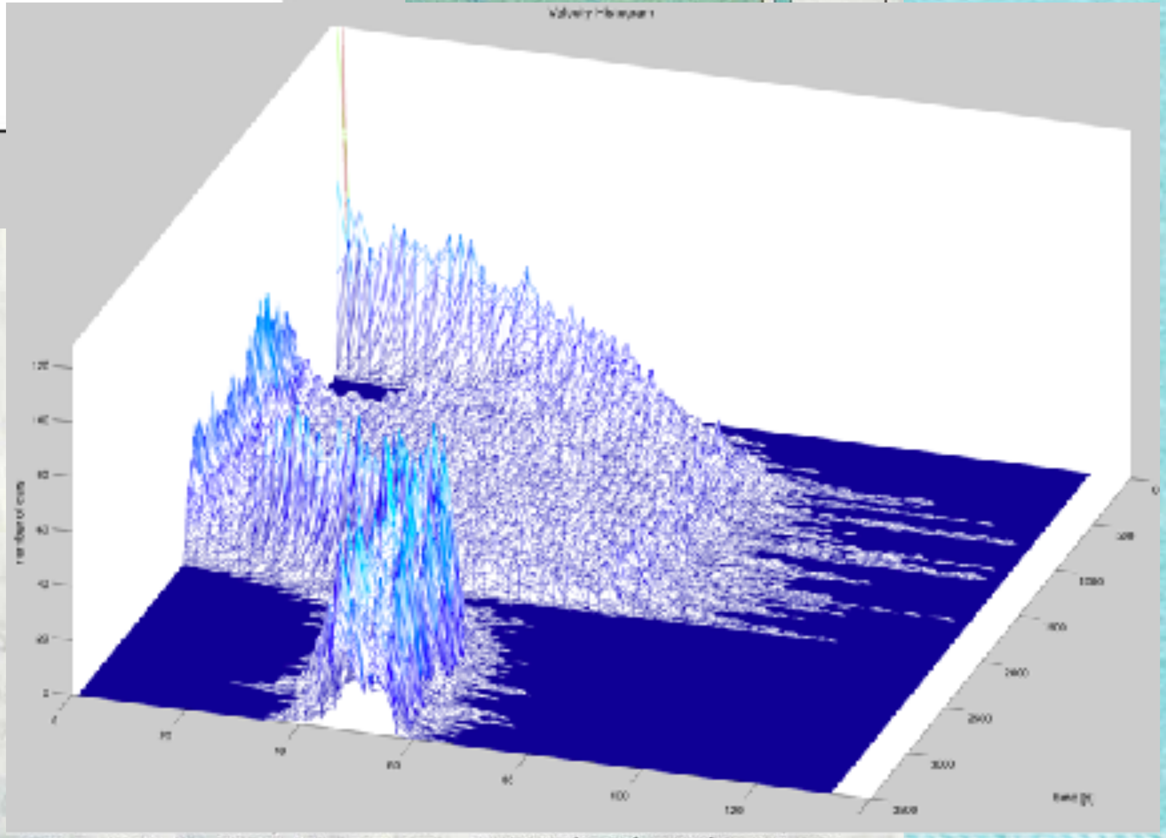
LEBENSDATEN

Professor Dr. Sándor Fekete
45 Jahre. Studium der Mathematik und Physik in Köln, Diplom 1989. Promotion (Mathematik) in Waterloo (Kanada) 1992. Forschungsaufenthalte in Stony Brook (USA), Tel Aviv, London, Newcastle (Australien), Kingston (Kanada) und am Massachusetts Institute of Technology (MIT).
Habilitation in Köln 1998. Danach an der TU Berlin. Seit 2001 Professor an der TU Braunschweig, zunächst in der Mathematik, seit 2007 in der Informatik.

5.7.2 Mediane







„Das Auftreten von Stauwellen ist in den physikalischen Gesetzen verankert.“

Sándor Fekete, Verkehrsforscher

entsteht, lässt sich sowohl in Simulationen wie auch in Experimenten beobachten. Fekete: „Das Auftreten von Stauwellen ist in den physikalischen Gesetzen verankert.“

Was bringt der Versuch der TU-Forscher, Fahrzeuge mit besseren Daten über den vorausfahrenden Verkehr zu versehen? Eine ganze Menge. Bereits jetzt kann man mit drahtloser Kommunikation Informationen über Ort und Geschwindigkeit von Fahrzeugen weiterge-

Verkehrsfluss im Stau zu glätten. Erkennt der Fahrer, gut informiert, dass sich der vorausfahrende Verkehr verlangsamt, muss er nicht unnötig beschleunigen.

Das hat einen verblüffenden Effekt auf den gesamten Verkehrsfluss.

Fekete: „In Simulationen zeigt sich eine Treibstoffersparnis bis zu 40 Prozent.“ Der Verkehr kann gleichmäßiger fließen, und der Stau kann sich sogar wieder auflösen, selbst wenn nur ein Teil der Fahrzeuge mitspielt.

Da jeder Fahrer Sprit spart, gibt es einen starken Anreiz, das Sys-

Stau!“

2007 in der Informatik.

5.7.3 Medianberechnung

5.7.3 Medianberechnung

Satz 5.9 (Master-Theorem)

Sei $T: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit

$$T(n) = \sum_{i=1}^{m} T(\alpha_i \cdot n) + \Theta(n^k),$$

wobei $\alpha_i \in \mathbb{R}: \quad 0 < \alpha_i < 1, \quad m \in \mathbb{N}, \quad k \in \mathbb{R}.$

Dann gilt

$$T(n) \in \begin{cases} \Theta(n^k) & \text{für } \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^k < 1 \\ \Theta(n^k \log n) & \text{für } \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^k = 1 \\ \Theta(n^c) \text{ mit } \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^c = 1 & \text{für } \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^k > 1 \end{cases}$$

Satz 5.23

Der Median für n Zahlen kann in $\mathcal{O}(n)$ berechnet werden.

[Blum, Floyd, Pratt, Rivest, Tarjan 1973]

S

chnet werden.

JOURNAL OF COMPUTER AND SYSTEM SCIENCES 7, 448–461 (1973)

Time Bounds for Selection*

MANUEL BLUM, ROBERT W. FLOYD, VAUGHAN PRATT,
RONALD L. RIVEST, AND ROBERT E. TARJAN

Department of Computer Science, Stanford University, Stanford, California 94305

Received November 14, 1972

The number of comparisons required to select the i-th smallest of n numbers is shown to be at most a linear function of n by analysis of a new selection algorithm—PICK. Specifically, no more than $5.430\dot{5}\, n$ comparisons are ever required. This bound is improved for extreme values of i, and a new lower bound on the requisite number of comparisons is also proved.

1. INTRODUCTION

In this paper we present a new selection algorithm, PICK, and derive by an analysis of its efficiency the (surprising) result that the cost of selection is at most a linear function of the number of input items. In addition, we prove a new lower bound for the cost of selection.

The selection problem is perhaps best exemplified by the computation of medians. In general, we may wish to select the i-th smallest of a set of n distinct numbers, or the element ranking closest to a given percentile level.

Interest in this problem may be traced to the realm of sports and the design of (traditionally, tennis) tournaments to select the first- and second-best players. In 1883, Lewis Carroll published an article [1] denouncing the unfair method by which the second-best player is usually determined in a "knockout tournament"—the loser of the final match is often not the second-best! (Any of the players who lost only to the best player may be second-best.) Around 1930, Hugo Steinhaus brought the problem into the realm of algorithmic complexity by asking for the minimum number of matches required to (correctly) select both the first- and second-best players from a field of n contestants. In 1932, J. Schreier [8] showed that no more than $n + \lceil \log_2(n) \rceil - 2$ matches are required, and in 1964, S. S. Kislitsin [6] proved this number to be necessary as well. Schreier's method uses a knockout tournament to determine the winner, followed by a second knockout tournament among the

* This work was supported by the National Science Foundation under grant GJ-992.

S

JOURNAL OF COMPUTER AND SYSTEM SCIENCES 7, 448–461 (1973)

Time Bounds for Selection*

MANUEL BLUM, ROBERT W. FLOYD, VAUGHAN PRATT,
RONALD L. RIVEST, AND ROBERT E. TARJAN

Department of Computer Science, Stanford University, Stanford, California 94305

Received November 14, 1972

The number of comparisons required to select the i-th smallest of n numbers is shown to be at most a linear function of n by analysis of a new selection algorithm—PICK. Specifically, no more than $5.4305\,n$ comparisons are ever required. This bound is improved for extreme values of i, and a new lower bound on the requisite number of comparisons is also proved.

1. INTRODUCTION

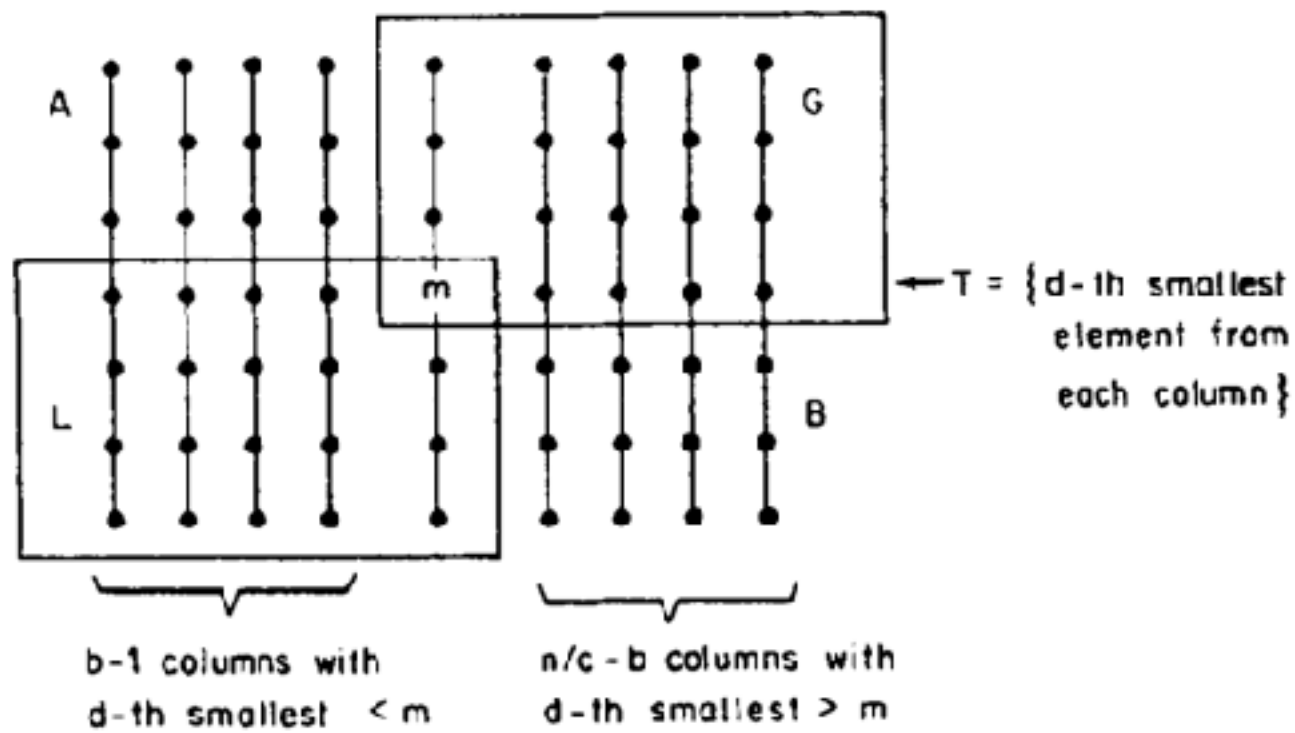
In this paper we present a new selection algorithm, PICK, and derive by an analysis of its efficiency the (surprising) result that the cost of selection is at most a linear function of the number of input items. In addition, we prove a new lower bound for the cost of selection.

The selection problem is perhaps best exemplified by the computation of medians. In general, we may wish to select the i-th smallest of a set of n distinct numbers, or the element ranking closest to a given percentile level.

Interest in this problem may be traced to the realm of sports and the design of (traditionally, tennis) tournaments to select the first- and second-best players. In 1883, Lewis Carroll published an article [1] denouncing the unfair method by which the second-best player is usually determined in a "knockout tournament"—the loser of the final match is often not the second-best! (Any of the players who lost only to the best player may be second-best.) Around 1930, Hugo Steinhaus brought the problem into the realm of algorithmic complexity by asking for the minimum number of matches required to (correctly) select both the first- and second-best players from a field of n contestants. In 1932, J. Schreier [8] showed that no more than $n + \lceil \log_2(n) \rceil - 2$ matches are required, and in 1964, S. S. Kislitsin [6] proved this number to be necessary as well. Schreier's method uses a knockout tournament to determine the winner, followed by a second knockout tournament among the

* This work was supported by the National Science Foundation under grant GJ-992.

chnet werden.



Satz 5.23

Der Median für n Zahlen kann in $\mathcal{O}(n)$ berechnet werden.

Satz 5.23

Der Median für n Zahlen kann in $\mathcal{O}(n)$ berechnet werden.

Beweisidee:

Satz 5.23

Der Median für n Zahlen kann in $\mathcal{O}(n)$ berechnet werden.

Beweisidee:

$$X = \{1, 22, 10, 13, 24, 6, 18, 21, 4, 25, 11, 16, 2, 20, 8, 17, 5, 12, 19, 14, 3, 9, 15, 7, 23\}$$

Satz 5.23

Der Median für n Zahlen kann in $\mathcal{O}(n)$ berechnet werden.

Beweisidee:

$$X = \{1, 22, 10, 13, 24, 6, 18, 21, 4, 25, 11, 16, 2, 20, 8, 17, 5, 12, 19, 14, 3, 9, 15, 7, 23\}$$

- Gruppiere die Zahlen in Fünfergruppen.

Satz 5.23

Der Median für n Zahlen kann in $\mathcal{O}(n)$ berechnet werden.

Beweisidee:

$$X = \{1, 22, 10, 13, 24, 6, 18, 21, 4, 25, 11, 16, 2, 20, 8, 17, 5, 12, 19, 14, 3, 9, 15, 7, 23\}$$

- Gruppiere die Zahlen in Fünfergruppen.

1	6	11	17	3
22	18	16	5	9
10	21	2	12	15
13	4	20	19	7
24	25	8	14	23

Satz 5.23

Der Median für n Zahlen kann in $\mathcal{O}(n)$ berechnet werden.

Beweisidee:

$$X = \{1, 22, 10, 13, 24, 6, 18, 21, 4, 25, 11, 16, 2, 20, 8, 17, 5, 12, 19, 14, 3, 9, 15, 7, 23\}$$

- Gruppiere die Zahlen in Fünfergruppen.

1	6	11	17	3
22	18	16	5	9
10	21	2	12	15
13	4	20	19	7
24	25	8	14	23

Satz 5.23

Der Median für n Zahlen kann in $\mathcal{O}(n)$ berechnet werden.

Beweisidee:

$$X = \{1, 22, 10, 13, 24, 6, 18, 21, 4, 25, 11, 16, 2, 20, 8, 17, 5, 12, 19, 14, 3, 9, 15, 7, 23\}$$

- Gruppiere die Zahlen in Fünfergruppen.

1	6	11	17	3
22	18	16	5	9
10	21	2	12	15
13	4	20	19	7
24	25	8	14	23

$\boxed{\mathcal{O}(n)}$

[Blum, Floyd, Pratt, Rivest, Tarjan 1973]

Satz 5.23

Der Median für n Zahlen kann in $\mathcal{O}(n)$ berechnet werden.

Beweisidee:

$$X = \{1, 22, 10, 13, 24, 6, 18, 21, 4, 25, 11, 16, 2, 20, 8, 17, 5, 12, 19, 14, 3, 9, 15, 7, 23\}$$

- Gruppiere die Zahlen in Fünfergruppen.

1	6	11	17	3
22	18	16	5	9
10	21	2	12	15
13	4	20	19	7
24	25	8	14	23

$$\boxed{\mathcal{O}(n)}$$

- Sortiere die Fünfergruppen.

[Blum, Floyd, Pratt, Rivest, Tarjan 1973]

Satz 5.23

Der Median für n Zahlen kann in $\mathcal{O}(n)$ berechnet werden.

Beweisidee:

$$X = \{1, 22, 10, 13, 24, 6, 18, 21, 4, 25, 11, 16, 2, 20, 8, 17, 5, 12, 19, 14, 3, 9, 15, 7, 23\}$$

- Gruppiere die Zahlen in Fünfergruppen.

1	6	11	17	3
22	18	16	5	9
10	21	2	12	15
13	4	20	19	7
24	25	8	14	23

$\boxed{\mathcal{O}(n)}$

- Sortiere die Fünfergruppen.

Satz 5.23

Der Median für n Zahlen kann in $\mathcal{O}(n)$ berechnet werden.

Beweisidee:

$$X = \{1, 22, 10, 13, 24, 6, 18, 21, 4, 25, 11, 16, 2, 20, 8, 17, 5, 12, 19, 14, 3, 9, 15, 7, 23\}$$

- Gruppiere die Zahlen in Fünfergruppen.

1	6	11	17	3
22	18	16	5	9
10	21	2	12	15
13	4	20	19	7
24	25	8	14	23

$\boxed{\mathcal{O}(n)}$

- Sortiere die Fünfergruppen.

1	4	2	5	3
10	6	8	12	7
13	18	11	14	9
22	21	16	17	15
24	25	20	19	23

Technische Universität Braunschweig

Satz 5.23

Der Median für n Zahlen kann in $\mathcal{O}(n)$ berechnet werden.

Beweisidee:

$$X = \{1, 22, 10, 13, 24, 6, 18, 21, 4, 25, 11, 16, 2, 20, 8, 17, 5, 12, 19, 14, 3, 9, 15, 7, 23\}$$

- Gruppiere die Zahlen in Fünfergruppen.

1	6	11	17	3
22	18	16	5	9
10	21	2	12	15
13	4	20	19	7
24	25	8	14	23

$\boxed{\mathcal{O}(n)}$

- Sortiere die Fünfergruppen.

1	4	2	5	3
10	6	8	12	7
13	18	11	14	9
22	21	16	17	15
24	25	20	19	23

$\boxed{\mathcal{O}(n)}$

Beweisidee (Forts.):

1	4	2	5	3
10	6	8	12	7
13	18	11	14	9
22	21	16	17	15
24	25	20	19	23

Beweisidee (Forts.):

- Berechne den Median der Mediane.

1	4	2	5	3
10	6	8	12	7
13	18	11	14	9
22	21	16	17	15
24	25	20	19	23

Beweisidee (Forts.):

- Berechne den Median der Mediane.

1	4	2	5	3
10	6	8	12	7
13	18	11	14	9
22	21	16	17	15
24	25	20	19	23

Beweisidee (Forts.):

- Berechne den Median der Mediane.

1	4	2	5	3
10	6	8	12	7
13	18	11	14	9
22	21	16	17	15
24	25	20	19	23

$$\boxed{T(\frac{n}{5})}$$

Beweisidee (Forts.):

- Berechne den Median der Mediane.

1	*4*	*2*	*5*	*3*
10	*6*	*8*	*12*	*7*
13	*18*	*11*	*14*	*9*
22	*21*	*16*	*17*	*15*
24	*25*	*20*	*19*	*23*

$$\boxed{T(\frac{n}{5})}$$

- Verwende den Median der Mediane als Pivot, um die Menge zu reduzieren.

Beweisidee (Forts.):

- Berechne den Median der Mediane.

1	*4*	*2*	*5*	*3*
10	*6*	*8*	*12*	*7*
13	*18*	*11*	*14*	*9*
22	*21*	*16*	*17*	*15*
24	*25*	*20*	*19*	*23*

$$\boxed{T(\frac{n}{5})}$$

- Verwende den Median der Mediane als Pivot, um die Menge zu reduzieren.

3	2	1	5	4
7	8	10	12	6
9	11	$\boxed{13}$	14	18
15	16	22	17	21
23	20	24	19	25

Technische Universität Braunschweig

Beweisidee (Forts.):

- Berechne den Median der Mediane.

1	4	2	5	3
10	6	8	12	7
13	18	11	14	9
22	21	16	17	15
24	25	20	19	23

$$\boxed{T(\frac{n}{5})}$$

- Verwende den Median der Mediane als Pivot, um die Menge zu reduzieren.

3	2	1	5	4
7	8	10	12	6
9	11	13	14	18
15	16	22	17	21
23	20	24	19	25

Technische Universität Braunschweig

Beweisidee (Forts.):

- Berechne den Median der Mediane.

1	4	2	5	3
10	6	8	12	7
13	18	11	14	9
22	21	16	17	15
24	25	20	19	23

$$\boxed{T(\frac{n}{5})}$$

- Verwende den Median der Mediane als Pivot, um die Menge zu reduzieren.

3	2	1	5	4
7	8	10	12	6
9	11	13	14	18
15	16	22	17	21
23	20	24	19	25

Technische Universität Braunschweig

Beweisidee (Forts.):

- Berechne den Median der Mediane.

1	4	2	5	3
10	6	8	12	7
13	18	11	14	9
22	21	16	17	15
24	25	20	19	23

$$\boxed{T(\frac{n}{5})}$$

- Verwende den Median der Mediane als Pivot, um die Menge zu reduzieren.

≥ n/4 Zahlen

3	2	1	5	4
7	8	10	12	6
9	11	13	14	18
15	16	22	17	21
23	20	24	19	25

Technische Universität Braunschweig

Beweisidee (Forts.):

- Berechne den Median der Mediane.

1	4	2	5	3
10	6	8	12	7
13	18	11	14	9
22	21	16	17	15
24	25	20	19	23

$$\boxed{T(\frac{n}{5})}$$

- Verwende den Median der Mediane als Pivot, um die Menge zu reduzieren.

≥ n/4 Zahlen

3	2	1	5	4
7	8	10	12	6
9	11	13	14	18
15	16	22	17	21
23	20	24	19	25

Beweisidee (Forts.):

- Berechne den Median der Mediane.

1	4	2	5	3
10	6	8	12	7
13	18	11	14	9
22	21	16	17	15
24	25	20	19	23

$$\boxed{T(\frac{n}{5})}$$

- Verwende den Median der Mediane als Pivot, um die Menge zu reduzieren.

≥ n/4 Zahlen

≥ n/4 Zahlen

3	2	1	5	4
7	8	10	12	6
9	11	13	14	18
15	16	22	17	21
23	20	24	19	25

Beweisidee (Forts.):

- Berechne den Median der Mediane.

1	4	2	5	3
10	6	8	12	7
13	18	11	14	9
22	21	16	17	15
24	25	20	19	23

$\boxed{T(\frac{n}{5})}$

- Verwende den Median der Mediane als Pivot, um die Menge zu reduzieren.

≥ n/4 Zahlen

≥ n/4 Zahlen

3	2	1	5	4
7	8	10	12	6
9	11	13	14	18
15	16	22	17	21
23	20	24	19	25

$\boxed{T(\frac{3n}{4})}$

Beweisidee (Forts.):

- Berechne den Median der Mediane.

1	4	2	5	3
10	6	8	12	7
13	18	11	14	9
22	21	16	17	15
24	25	20	19	23

$$\boxed{T(\frac{n}{5})}$$

- Verwende den Median der Mediane als Pivot, um die Menge zu reduzieren.

≥ n/4 Zahlen

≥ n/4 Zahlen

3	2	1	5	4
7	8	10	12	6
9	11	13	14	18
15	16	22	17	21
23	20	24	19	25

$$\boxed{T(\frac{3n}{4})}$$

$$T(n) = T(\frac{n}{5}) + T(\frac{3n}{4}) + \Theta(n)$$

Beweisidee (Forts.):

- Berechne den Median der Mediane.

1	4	2	5	3
10	6	8	12	7
13	18	11	14	9
22	21	16	17	15
24	25	20	19	23

$$\boxed{T(\frac{n}{5})}$$

- Verwende den Median der Mediane als Pivot, um die Menge zu reduzieren.

≥ n/4 Zahlen

≥ n/4 Zahlen

3	2	1	5	4
7	8	10	12	6
9	11	13	14	18
15	16	22	17	21
23	20	24	19	25

$$\boxed{T(\frac{3n}{4})}$$

$$T(n) = T(\frac{n}{5}) + T(\frac{3n}{4}) + \boxed{\Theta(n)}$$

Beweisidee (Forts.):

- Berechne den Median der Mediane.

1	4	2	5	3
10	6	8	12	7
13	18	11	14	9
22	21	16	17	15
24	25	20	19	23

$$\boxed{T(\frac{n}{5})}$$

- Verwende den Median der Mediane als Pivot, um die Menge zu reduzieren.

≥ n/4 Zahlen

≥ n/4 Zahlen

3	2	1	5	4
7	8	10	12	6
9	11	13	14	18
15	16	22	17	21
23	20	24	19	25

$$\boxed{T(\frac{3n}{4})}$$

$$T(n) = \boxed{T(\frac{n}{5})} + T(\frac{3n}{4}) + \boxed{\Theta(n)}$$

Beweisidee (Forts.):

- Berechne den Median der Mediane.

1	4	2	5	3
10	6	8	12	7
13	18	11	14	9
22	21	16	17	15
24	25	20	19	23

$\boxed{T(\frac{n}{5})}$

- Verwende den Median der Mediane als Pivot, um die Menge zu reduzieren.

≥ n/4 Zahlen

≥ n/4 Zahlen

3	2	1	5	4
7	8	10	12	6
9	11	13	14	18
15	16	22	17	21
23	20	24	19	25

$\boxed{T(\frac{3n}{4})}$

$$T(n) = \boxed{T(\frac{n}{5})} + \boxed{T(\frac{3n}{4})} + \boxed{\Theta(n)}$$

Technische Universität Braunschweig

Beweisidee (Forts.):

Satz 5.9 (Mastertheorem). *Sei* $T : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *mit*

$$T(n) = \sum_{i=1}^{m} T(\alpha_i \cdot n) + \Theta(n^k),$$

wobei $\alpha_i \in \mathbb{R}$ *mit* $0 < \alpha_i < 1$, $m \in \mathbb{N}$ *und* $k \in \mathbb{R}$. *Dann gilt*

$$T(n) \in \begin{cases} \Theta(n^k) & \textit{für } \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^k < 1 \\ \Theta(n^k \log(n)) & \textit{für } \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^k = 1 \\ \Theta(n^c) & \textit{mit } \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^c = 1 \textit{ für } \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^k > 1 \end{cases}$$

$$T(n) = \boxed{T(\frac{n}{5})} + \boxed{T(\frac{3n}{4})} + \boxed{\Theta(n)}$$

Beweisidee (Forts.):

Satz 5.9 (Mastertheorem). *Sei* $T : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *mit*

$$T(n) = \sum_{i=1}^{m} T(\alpha_i \cdot n) + \Theta(n^k),$$

wobei $\alpha_i \in \mathbb{R}$ *mit* $0 < \alpha_i < 1$, $m \in \mathbb{N}$ *und* $k \in \mathbb{R}$. *Dann gilt*

$$T(n) \in \begin{cases} \Theta(n^k) & \text{für } \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^k < 1 \\ \Theta(n^k \log(n)) & \text{für } \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^k = 1 \\ \Theta(n^c) & \text{mit } \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^c = 1 \text{ für } \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^k > 1 \end{cases}$$

$$T(n) = \boxed{T(\frac{n}{5})} + \boxed{T(\frac{3n}{4})} + \boxed{\Theta(n)}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i^k = \frac{1}{5} + \frac{3}{4} = \frac{19}{20} < 1.$$

Technische Universität Braunschweig

Beweisidee (Forts.):

Satz 5.9 (Mastertheorem). *Sei* $T : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *mit*

$$T(n) = \sum_{i=1}^{m} T(\alpha_i \cdot n) + \Theta(n^k),$$

wobei $\alpha_i \in \mathbb{R}$ *mit* $0 < \alpha_i < 1$, $m \in \mathbb{N}$ *und* $k \in \mathbb{R}$. *Dann gilt*

$$T(n) \in \begin{cases} \Theta(n^k) & \text{für } \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^k < 1 \\ \Theta(n^k \log(n)) & \text{für } \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^k = 1 \\ \Theta(n^c) & \text{mit } \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^c = 1 \text{ für } \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^k > 1 \end{cases}$$

$$T(n) = \boxed{T(\frac{n}{5})} + \boxed{T(\frac{3n}{4})} + \boxed{\Theta(n)}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i^k = \frac{1}{5} + \frac{3}{4} = \frac{19}{20} < 1.$$

Beweisidee (Forts.):

Satz 5.9 (Mastertheorem). *Sei* $T : \mathbb{N}$

$$T(n) \in \Theta(n^k) = \Theta(n)$$

wobei $\alpha_i \in$ … $m \in \mathbb{N}$ *und* $k \in \mathbb{R}$. *Dann gilt*

$$T(n) \in \begin{cases} \Theta(n^k) & \text{für } \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^k < 1 \\ \Theta(n^k \log(n)) & \text{für } \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^k = 1 \\ \Theta(n^c) & \text{mit } \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^c = 1 \text{ für } \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^k > 1 \end{cases}$$

$$T(n) = \boxed{T(\frac{n}{5})} + \boxed{T(\frac{3n}{4})} + \boxed{\Theta(n)}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i^k = \frac{1}{5} + \frac{3}{4} = \frac{19}{20} < 1.$$

Technische Universität Braunschweig

Mehr in der Übung!

s.fekete@tu-bs.de