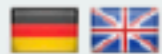




Kapitel 5.5:
Nichtlineare Rekursionen
Algorithmen und Datenstrukturen
WS 2020/21

Prof. Dr. Sándor Fekete



Kontrastmodus aktivieren

1 Persönliche Angaben

1.1 In welchem Fachsemester studieren Sie? 1./2. 3./4. 5./6. 7./8. 9./10. > 10

1.2 Welchen Abschluss streben Sie derzeit an?

1.3 In welchem Studiengang studieren Sie?

<input type="radio"/> Informatik	<input type="radio"/> Nebenfach Informatik
<input type="radio"/> Medienwissenschaften	<input type="radio"/> Wirtschaftsinformatik
<input type="radio"/> Mobilität und Verkehr	<input type="radio"/> IST
<input type="radio"/> CSE	<input type="radio"/> Elektrotechnik
<input type="radio"/> Wi.-Ing./Elektrotechnik	<input type="radio"/> sonstiges

2 Wie häufig waren Sie in der ...?

Große Übung: Hörsaal Kleine Übung: Seminarraum
(Bitte nur kleine und große Übungen bewerten, wenn sie angeboten wurden)

2.1 Online-Vorlesung (Anwesenheit) immer nie

2.2 Online-Großen Übung (Anwesenheit) immer nie

2.3 Online-Kleinen Übung (Anwesenheit) immer nie

3 Der/Die Lehrende war gut vorbereitet

3.1 Vorlesung (Vorbereitung) trifft zu trifft nicht zu

3.2 Große Übung (Vorbereitung) trifft zu trifft nicht zu

3.3 Kleine Übung (Vorbereitung) trifft zu trifft nicht zu

4 Der/Die Lehrende wirkte kompetent

4.1 Vorlesung (Kompetenz) trifft zu trifft nicht zu



Kontrastmodus aktivieren

1 Persönliche Angaben

1.1 In welchem Fachsemester studieren Sie? 1./2. 3./4. 5./6. 7./8. 9./10. > 10

1.2 Welchen Abschluss streben Sie derzeit an?

1.3 In welchem Studiengang studieren Sie?

<input type="radio"/> Informatik	<input type="radio"/> Nebenfach Informatik
<input type="radio"/> Medienwissenschaften	<input type="radio"/> Wirtschaftsinformatik
<input type="radio"/> Mobilität und Verkehr	<input type="radio"/> IT
<input type="radio"/> CSE	<input type="radio"/> Elektrotechnik
<input type="radio"/> Wi.-Ing./Elektrotechnik	<input type="radio"/> sonstiges

2 Wie häufig waren Sie in der ...? Große Übung: Hörsaal Kleine Übung: Seminarraum (Bitte nur kleine und große Übungen bewerten, wenn sie angerechnet wurden)

2.1 Online-Vorlesung (Anwesenheit)	immer	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	nie
2.2 Online-Großen Übung (Anwesenheit)	immer	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	nie
2.3 Online-Kleinen Übung (Anwesenheit)	immer	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	nie

3 Der/Die Lehrende war gut vorbereitet

3.1 Vorlesung (Vorbereitung)	trifft zu	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	trifft nicht zu
3.2 Große Übung (Vorbereitung)	trifft zu	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	trifft nicht zu
3.3 Kleine Übung (Vorbereitung)	trifft zu	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	trifft nicht zu

4 Der/Die Lehrende wirkte kompetent

4.1 Vorlesung (Kompetenz)	trifft zu	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	trifft nicht zu
---------------------------	-----------	-----------------------	-----------------------	-----------------------	-----------------------	-----------------------	-----------------

Ab heute!

Zuordnung der Übungsgruppen

Gruppe	Termin (14-täglich)	Tutor
01	Montag: 08:00 – 09:30	Tobias Wallner
02	Montag: 09:45 – 11:15	Tobias Wallner
03	Montag: 09:45 – 11:15	Anna Ronsdorf
04	Montag: 13:15 – 14:45	Maurice Semren
05	Montag: 15:00 – 16:30	Maurice Semren
06	Dienstag: 13:15 – 14:45	Chek-Manh Loi
07	Dienstag: 13:15 – 14:45	Dennis Luck
08	Dienstag: 15:00 – 16:30	Chek-Manh Loi
09	Dienstag: 15:00 – 16:30	Dennis Luck
10	Mittwoch: 13:15 – 14:45	Anna Ronsdorf
11	Mittwoch: 13:15 – 14:45	Antje Mönch
12	Donnerstag: 13:15 – 14:45	Antje Mönch
13	Freitag: 09:45 – 11:15	Alexander Burmester
14	Freitag: 11:30 – 13:00	Alexander Burmester
15	Freitag: 11:30 – 13:00	David Gemen
16	Freitag: 13:15 – 14:45	David Gemen



Liebe/r Student/in,

vielen Dank, dass Sie an einer Teilnahme interessiert sind!

Der Arbeitsbereich Empirische Bildungsforschung (Prof. Dr. Lysann Zander, Leibniz Universität Hannover) möchte in Ihrem Studiengang eine **anonyme** Befragung durchführen, bei der es um Ihre Eindrücke im Studiengang sowie Ihre Einstellung zu verschiedenen Themen Ihr Studium betreffend geht. Einige Studierende haben bereits zu Beginn des Semesters an dieser Befragung teilgenommen. Zum Ende des Semesters möchten wir Sie nun erneut befragen.

Selbstverständlich können Sie aber auch an der Befragung teilnehmen, wenn Sie zuvor noch nicht teilgenommen haben.

Wichtig: Wenn Sie vor Ende der Befragung abbrechen, werden Ihre Daten nicht gespeichert und können nicht ausgewertet werden. In bisherigen Befragungen hat das Ausfüllen des Fragebogens etwa 15-20 Minuten in Anspruch genommen.

Nach Abschluss der Befragung und der Ergebnisauswertung erhalten Sie - wenn Sie das wünschen - eine Rückmeldung über die Gesamtergebnisse. Dazu können Sie Ihre Anfrage an emp.bildungsforschung@iew.uni-hannover.de mit dem Betreff "Ergebnisse Befragung Informatik" senden.

Das Ausfüllen des Fragebogens wird etwa 15-20 Minuten in Anspruch nehmen.

Liebe/r Student/in,

vielen Dank, dass Sie an einer Teilnahme interessiert sind!

Der Arbeitsbereich Empirische Bildungsforschung (Prof. Dr. Lysann Zander, Leibniz Universität Hannover) möchte in Ihrem Studiengang eine **anonyme** Befragung durchführen, bei der es um Ihre Eindrücke im Studiengang sowie Ihre Einstellung zu verschiedenen Themen Ihr Studium betreffend geht. Einige Studierende haben bereits zu Beginn des Semesters an dieser Befragung teilgenommen. Zum Ende des Semesters möchten wir Sie nun erneut befragen. Selbstverständlich können Sie aber auch an der Befragung teilnehmen, wenn Sie zuvor noch nicht teilgenommen haben.

Wichtig: Wenn Sie vor Ende der Befragung abbrechen, werden Ihre Daten nicht gespeichert und können nicht ausgewertet werden. In bisherigen Befragungen hat das Ausfüllen des Fragebogens etwa 15-20 Minuten in Anspruch genommen.

Nach Abschluss der Befragung und der Ergebnisauswertung erhalten Sie - wenn Sie das wünschen - eine Rückmeldung über die Gesamtergebnisse. Dazu können Sie Ihre Anfrage an emp.bildungsforschung@iew.uni-hannover.de mit dem Betreff "Ergebnisse Befragung Informatik" senden.

Das Ausfüllen des Fragebogens wird etwa 15-20 Minuten in Anspruch nehmen.

5.3.3 Master-Theorem: Lineare Rekursionen

5.3.3 Master-Theorem: Lineare Rekursionen

Satz 5.9 (Master-Theorem)

Sei $T: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$T(n) = \sum_{i=1}^m T(\alpha_i n) + \Theta(n^k),$$

wobei $\alpha_i \in \mathbb{R} : 0 < \alpha_i < 1$, $m \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{R}$.

Dann gilt

$$T(n) \in \begin{cases} \Theta(n^k) & \text{für } \sum_{i=1}^m \alpha_i^k < 1 \\ \Theta(n^k \log n) & \text{für } \sum_{i=1}^m \alpha_i^k = 1 \\ \Theta(n^c) & \text{mit } \sum_{i=1}^m \alpha_i^c = 1 \text{ für } \sum_{i=1}^m \alpha_i^k > 1 \end{cases}$$

QUIZ: Mittwoch!

- ▶ [mentimeter.com](https://www.mentimeter.com)
- ▶ 70 18 55 5

5.5 Nichtlineare Rekursionen

5.5 Nichtlineare Rekursionen

5.5.1 Logistische Rekursion

5.5 Nichtlineare Rekursionen

5.5.1 Logistische Rekursion

Wachstum proportional zu einer Größe:

5.5 Nichtlineare Rekursionen

5.5.1 Logistische Rekursion

Wachstum proportional zu einer Größe:

$$x_{n+1} = (1 + q)x_n$$

5.5 Nichtlineare Rekursionen

5.5.1 Logistische Rekursion

Wachstum proportional zu einer Größe:

$$x_{n+1} = (1 + q)x_n$$

Ergebnis:

5.5 Nichtlineare Rekursionen

5.5.1 Logistische Rekursion

Wachstum proportional zu einer Größe:

$$x_{n+1} = (1 + q)x_n$$

Ergebnis:

$$x_n = (1 + q)^n x_0$$

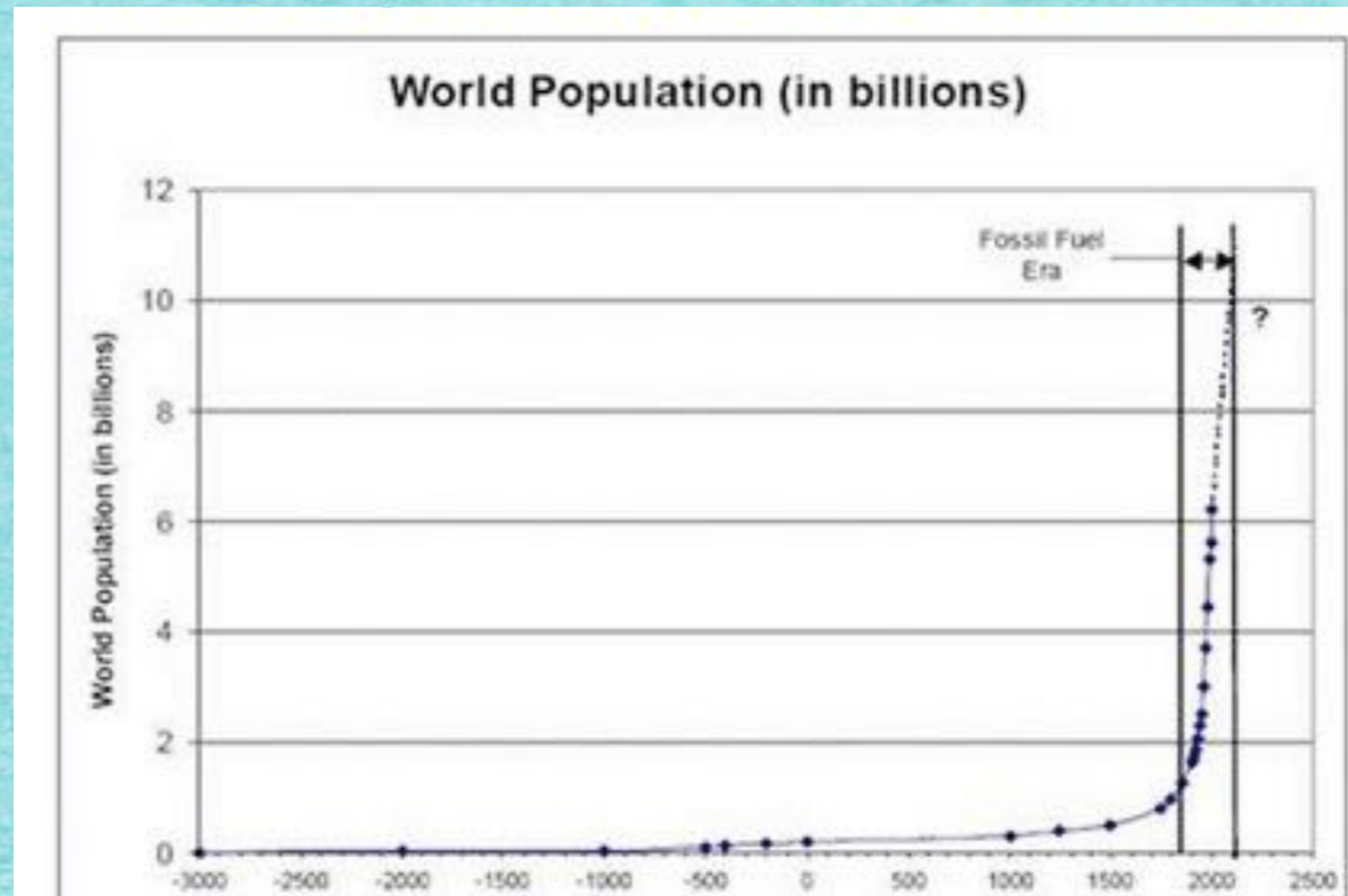
5.5.1 Logistische Rekursion

5.5.1 Logistische Rekursion

Exponentielles Wachstum:

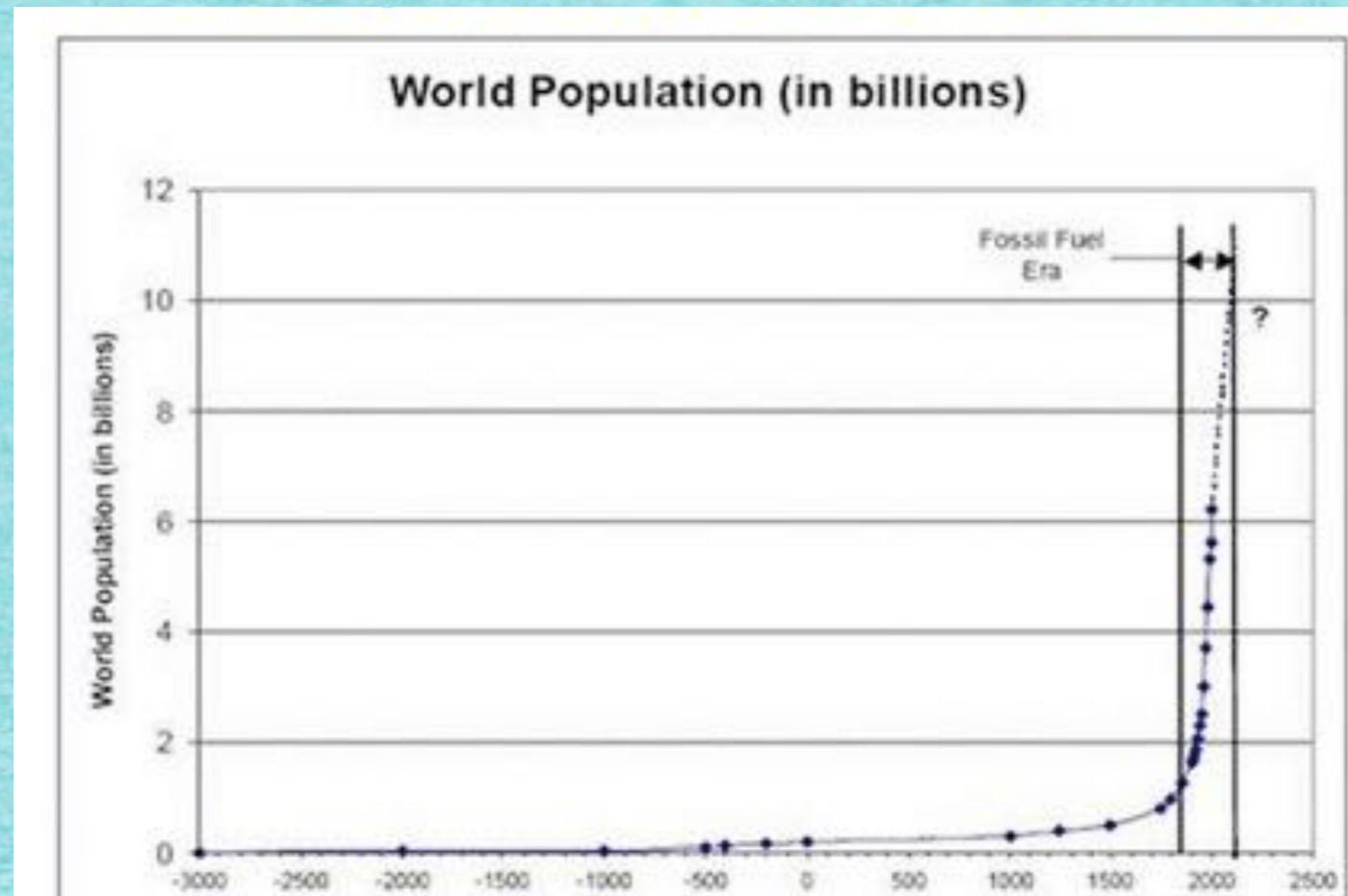
5.5.1 Logistische Rekursion

Exponentielles Wachstum:



5.5.1 Logistische Rekursion

Exponentielles Wachstum:



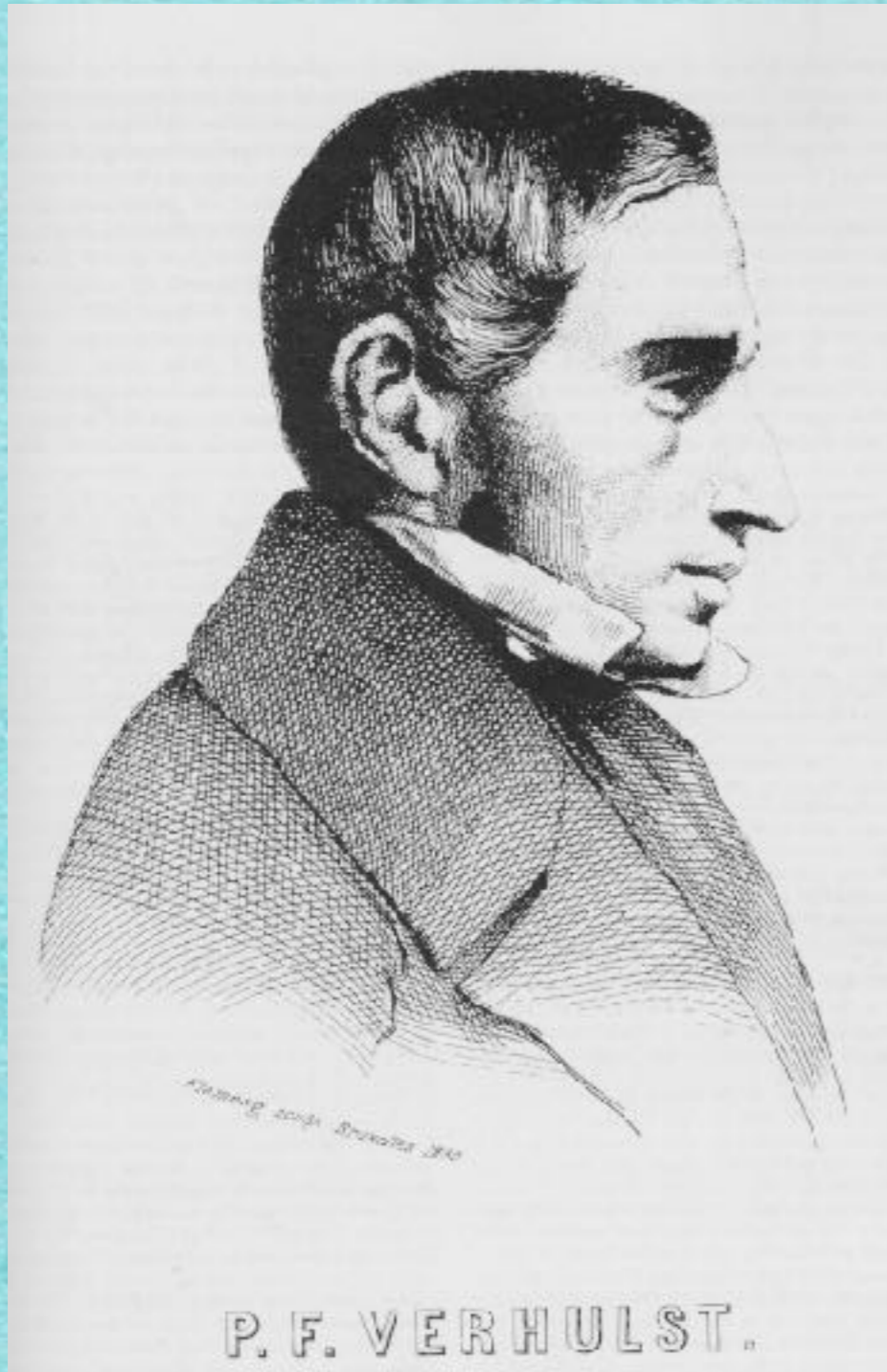
Das geht nicht beliebig lange weiter!

5.5.1 Logistische Rekursion

5.5.1 Logistische Rekursion



5.5.1 Logistische Rekursion



Pierre-François Verhulst
(1804-1849)

5.5.1 Logistische Rekursion



Pierre-François Verhulst
(1804-1849)

*Notice sur la loi que la population
poursuit dans son accroissement.*

5.5.1 Logistische Rekursion



Pierre-François Verhulst
(1804-1849)

*Notice sur la loi que la population
poursuit dans son accroissement.*

*“Notiz über das Gesetz,
das die Bevölkerung bei ihrem
Wachstum befolgt.”*

5.5.1 Logistische Rekursion



Pierre-François Verhulst
(1804-1849)

*Notice sur la loi que la population
poursuit dans son accroissement.*

In: *Corresp. Math. Phys.* 10, 1838, S. 113–121

*“Notiz über das Gesetz,
das die Bevölkerung bei ihrem
Wachstum befolgt.”*

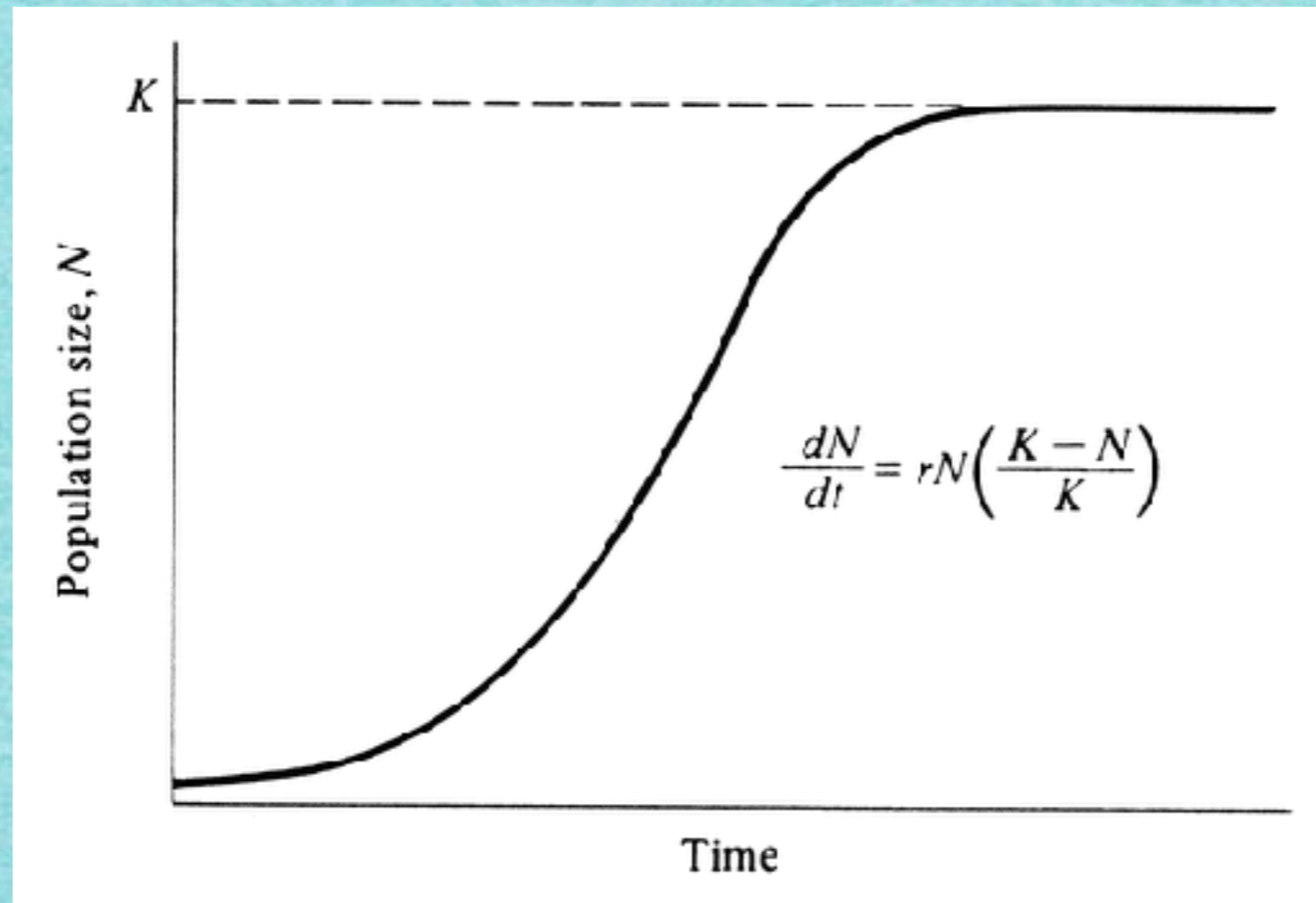
5.5.1 Logistische Rekursion

5.5.1 Logistische Rekursion

Verhulst ursprünglich: Stetiger Prozess!

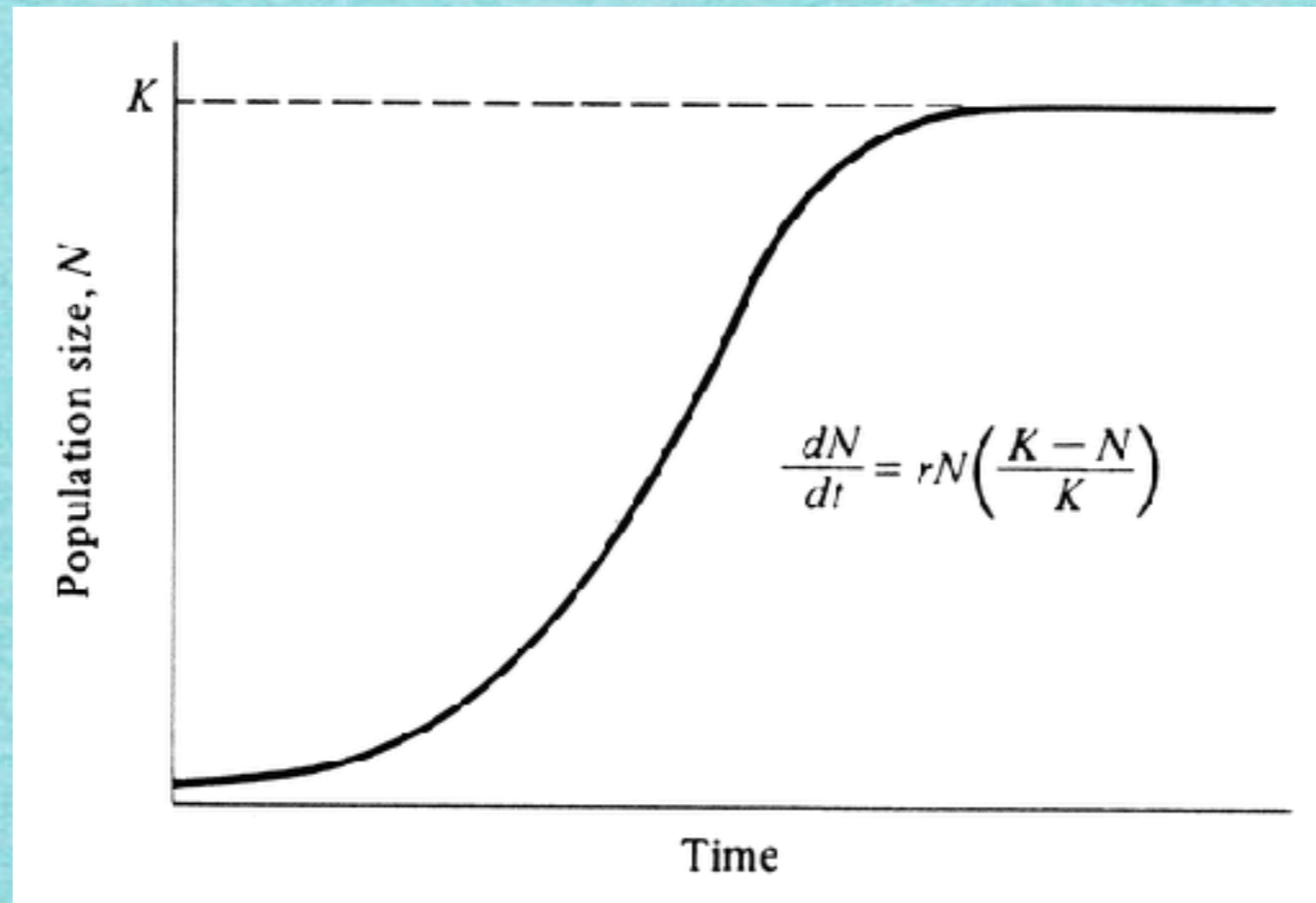
5.5.1 Logistische Rekursion

Verhulst ursprünglich: Stetiger Prozess!



5.5.1 Logistische Rekursion

Verhulst ursprünglich: Stetiger Prozess!



**In Populationsdynamik beobachtet:
Diskreter Prozess!**

5.5.1 Logistische Rekursion

5.5.1 Logistische Rekursion

Zuwachs durch Fruchtbarkeit:

5.5.1 Logistische Rekursion

Zuwachs durch Fruchtbarkeit:

$$x_{n+1} = q_f x_n$$

5.5.1 Logistische Rekursion

Zuwachs durch Fruchtbarkeit:

$$x_{n+1} = q_f x_n$$

Schwund durch Verhungern (etc.):

5.5.1 Logistische Rekursion

Zuwachs durch Fruchtbarkeit:

$$x_{n+1} = q_f x_n$$

Schwund durch Verhungern (etc.):

$$x_{n+1} = q_f (G - x_n)$$

5.5.1 Logistische Rekursion

Zuwachs durch Fruchtbarkeit:

$$x_{n+1} = q_f x_n$$

Schwund durch Verhungern (etc.):

$$x_{n+1} = q_f (G - x_n)$$

Zusammen:

5.5.1 Logistische Rekursion

Zuwachs durch Fruchtbarkeit:

$$x_{n+1} = q_f x_n$$

Schwund durch Verhungern (etc.):

$$x_{n+1} = q_f (G - x_n)$$

Zusammen:

$$x_{n+1} = q_f q_v x_n (G - x_n)$$

5.5.1 Logistische Rekursion

Zuwachs durch Fruchtbarkeit:

$$x_{n+1} = q_f x_n$$

Schwund durch Verhungern (etc.):

$$x_{n+1} = q_f (G - x_n)$$

Zusammen:

$$x_{n+1} = q_f q_v x_n (G - x_n)$$

Normiert:

5.5.1 Logistische Rekursion

Zuwachs durch Fruchtbarkeit:

$$x_{n+1} = q_f x_n$$

Schwund durch Verhungern (etc.):

$$x_{n+1} = q_f (G - x_n)$$

Zusammen:

$$x_{n+1} = q_f q_v x_n (G - x_n)$$

Normiert:

$$x_{n+1} = r x_n (1 - x_n)$$

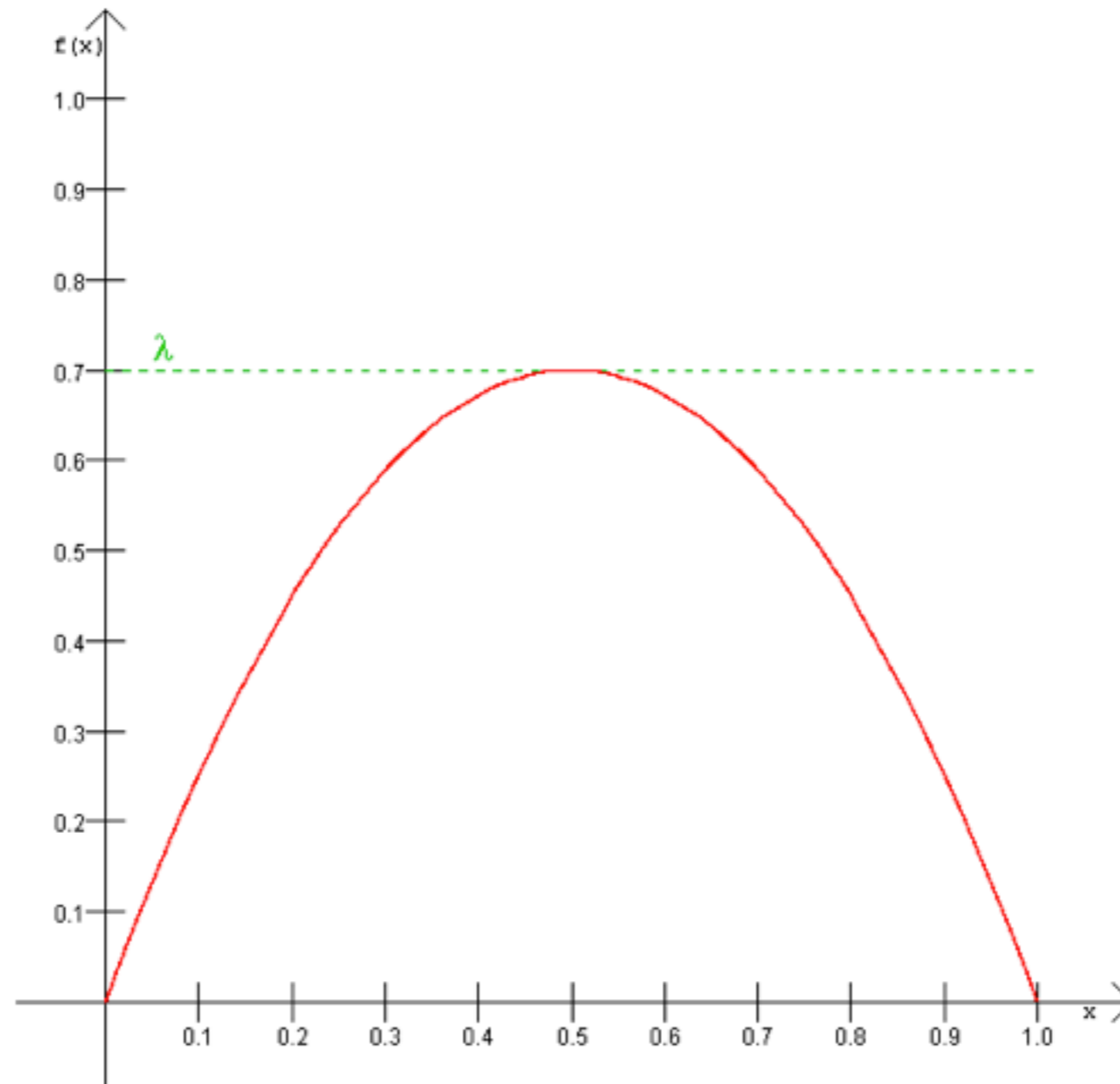
5.5.1 Logistische Rekursion

5.5.1 Logistische Rekursion

Bildlich:

5.5.1 Logistische Rekursion

Bildlich:



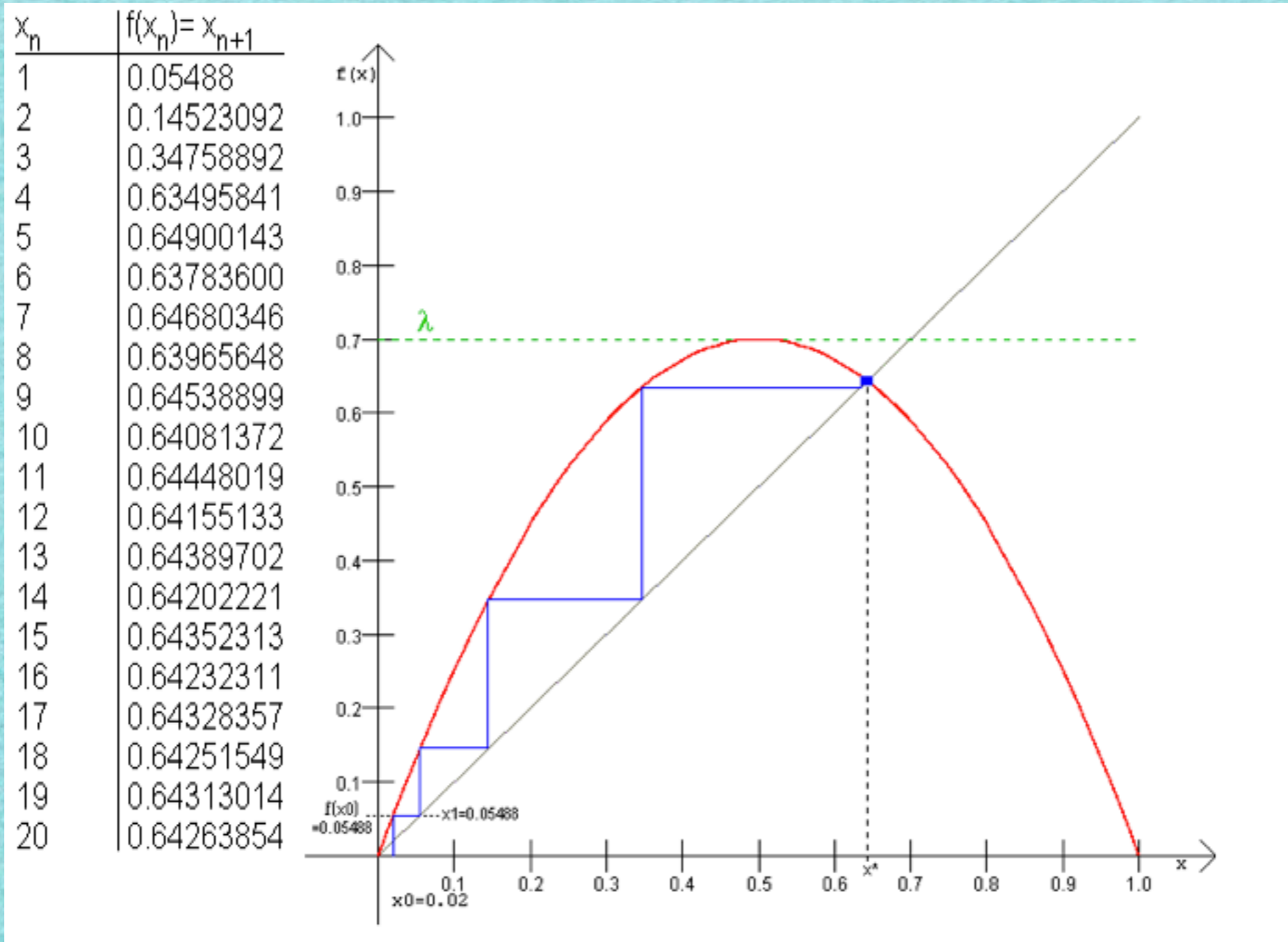
5.5.1 Logistische Rekursion

5.5.1 Logistische Rekursion

Rekursion:

5.5.1 Logistische Rekursion

Rekursion:



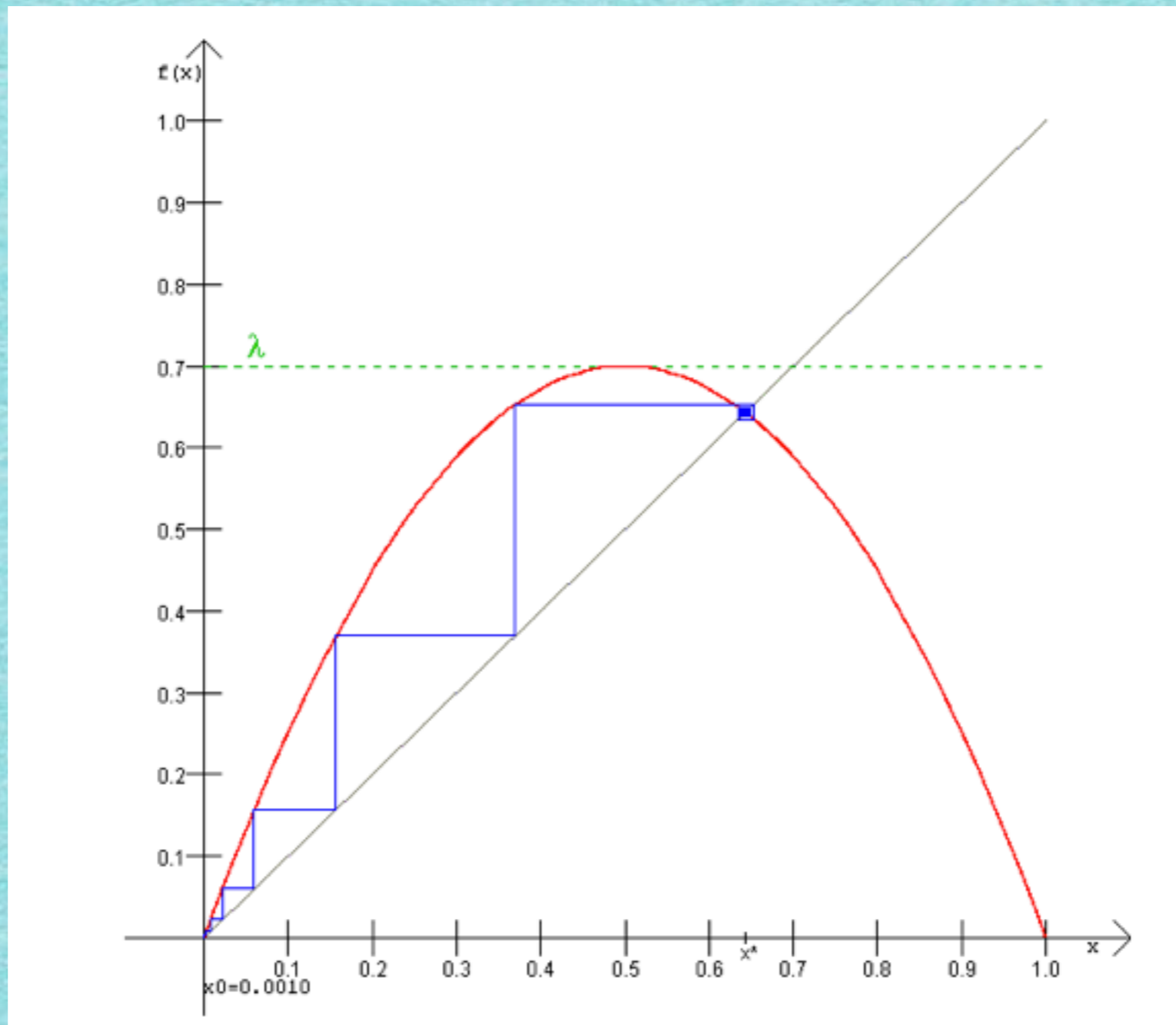
5.5.1 Logistische Rekursion

5.5.1 Logistische Rekursion

Rekursion strebt gegen Fixpunkt:

5.5.1 Logistische Rekursion

Rekursion strebt gegen Fixpunkt:



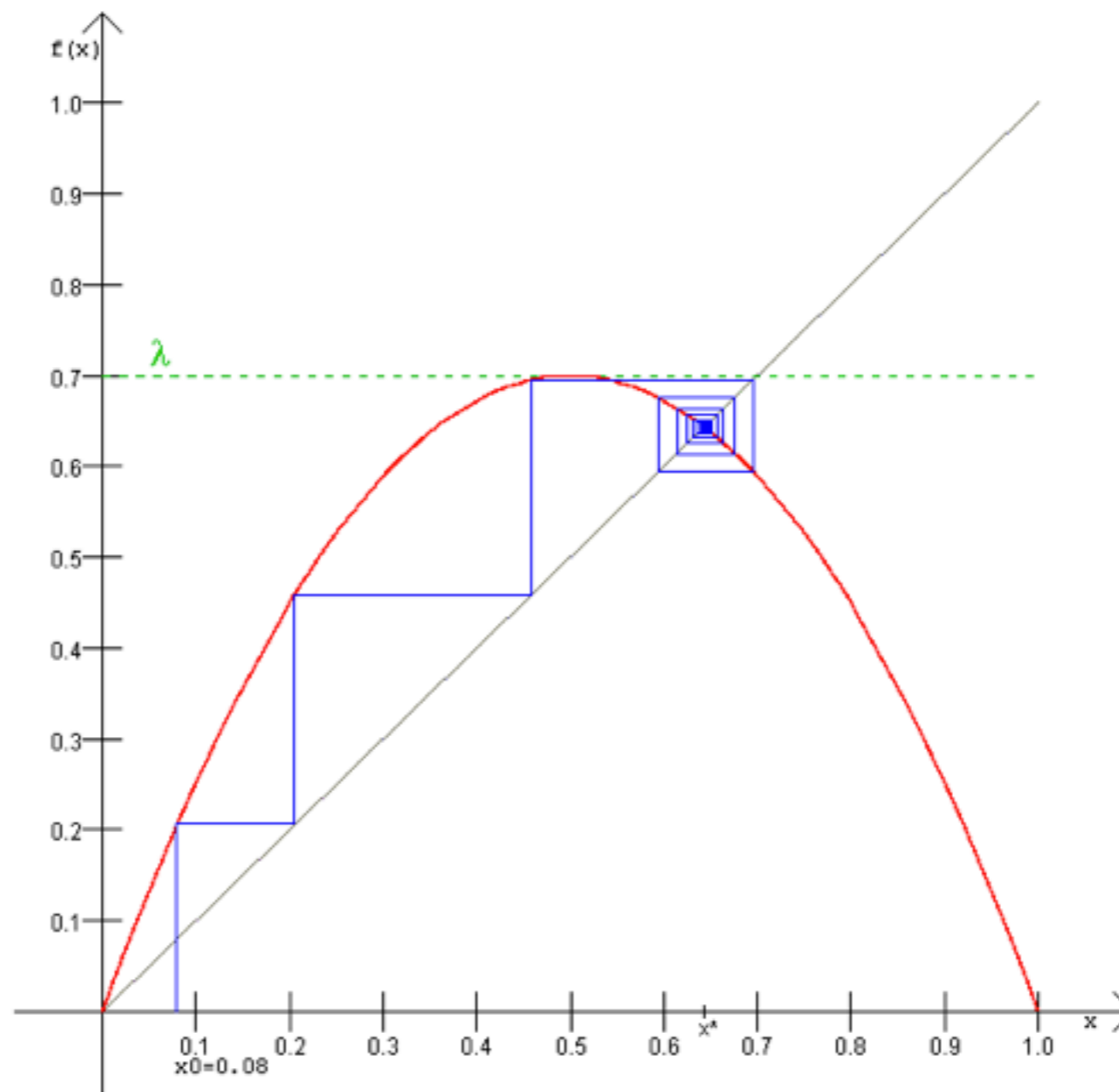
5.5.1 Logistische Rekursion

5.5.1 Logistische Rekursion

Rekursion strebt gegen Fixpunkt:

5.5.1 Logistische Rekursion

Rekursion strebt gegen Fixpunkt:



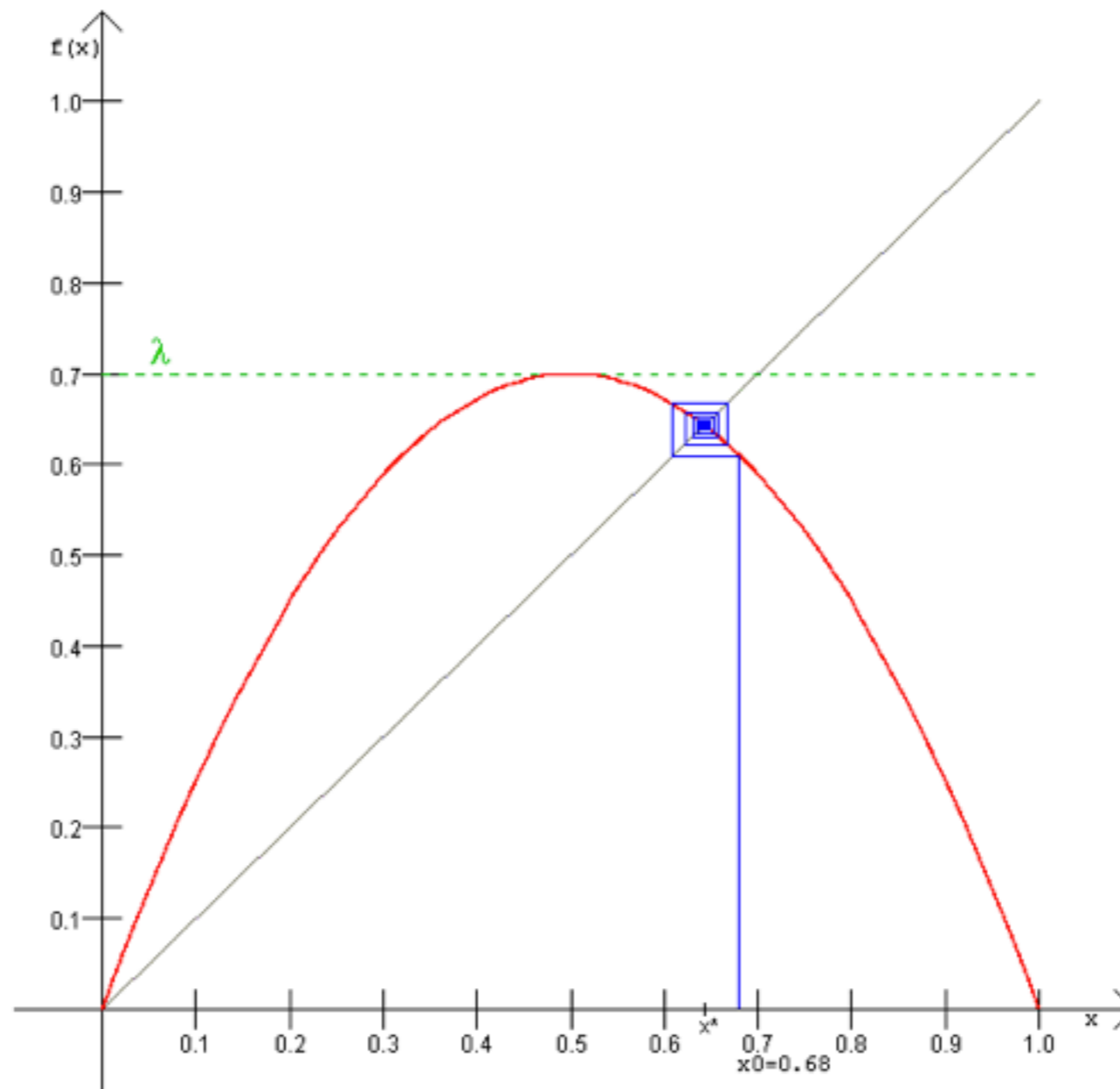
5.5.1 Logistische Rekursion

5.5.1 Logistische Rekursion

Rekursion strebt gegen Fixpunkt:

5.5.1 Logistische Rekursion

Rekursion strebt gegen Fixpunkt:



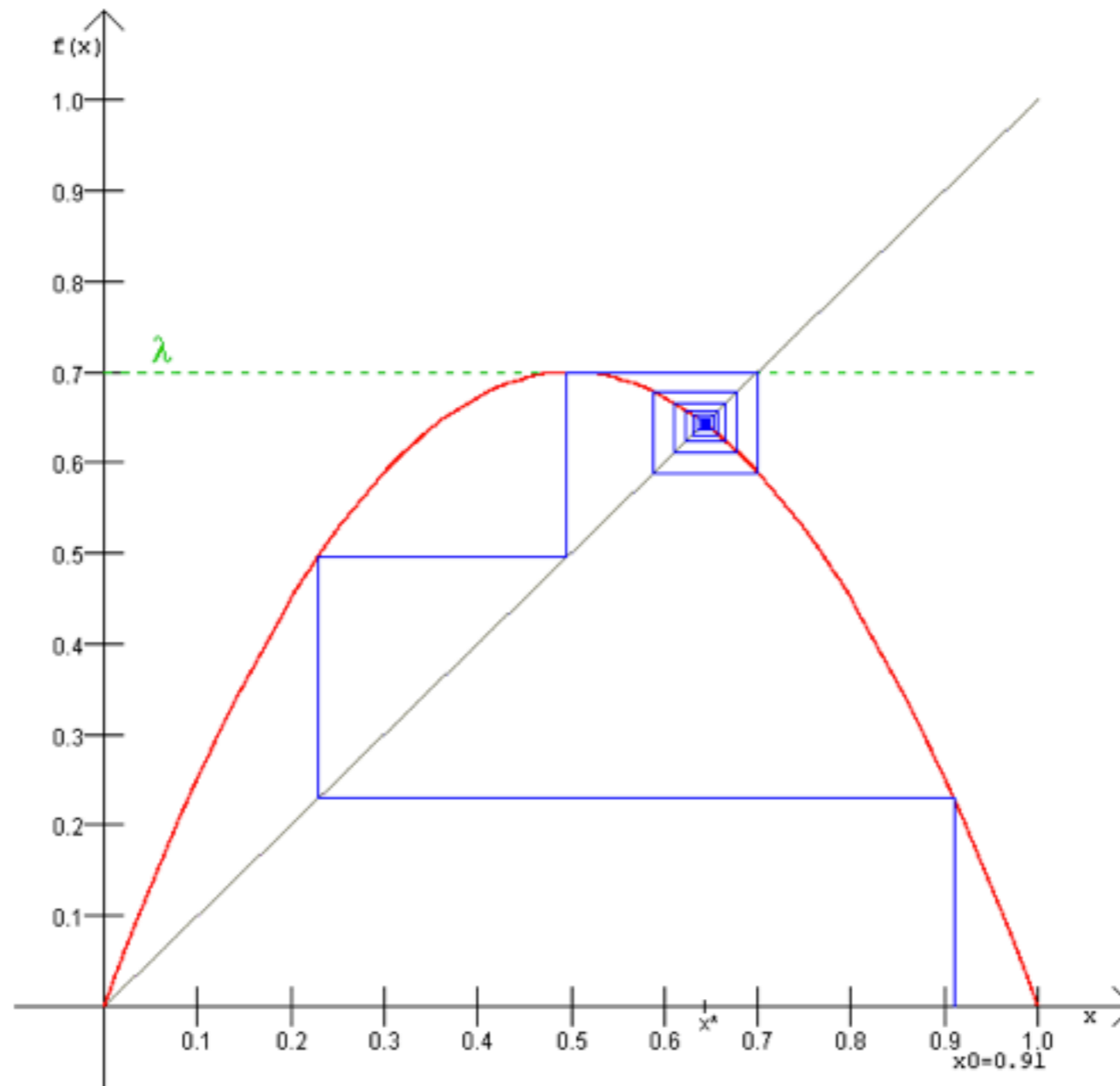
5.5.1 Logistische Rekursion

5.5.1 Logistische Rekursion

Rekursion strebt gegen Fixpunkt:

5.5.1 Logistische Rekursion

Rekursion strebt gegen Fixpunkt:



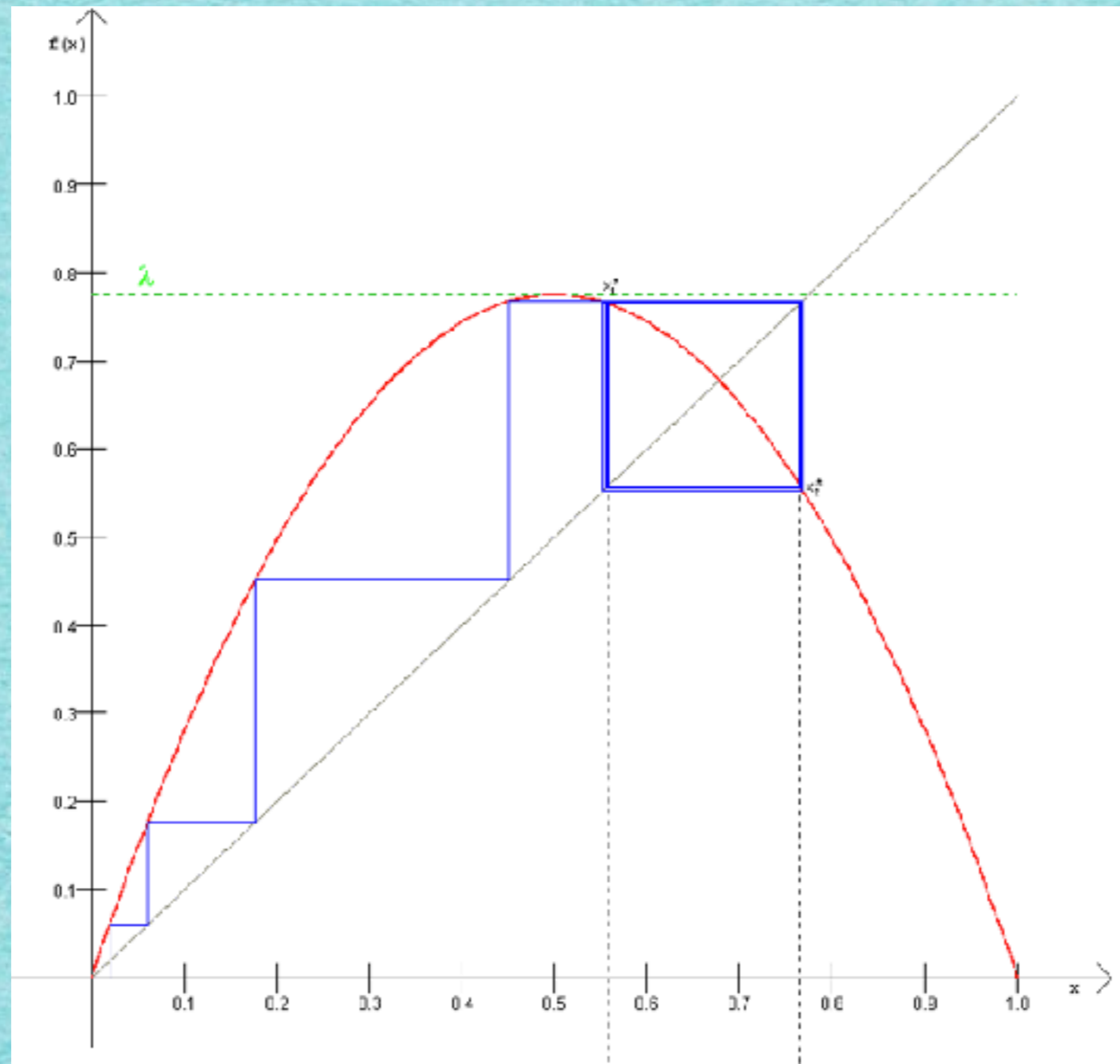
5.5.1 Logistische Rekursion

5.5.1 Logistische Rekursion

Zwei Fixpunkte!

5.5.1 Logistische Rekursion

Zwei Fixpunkte!



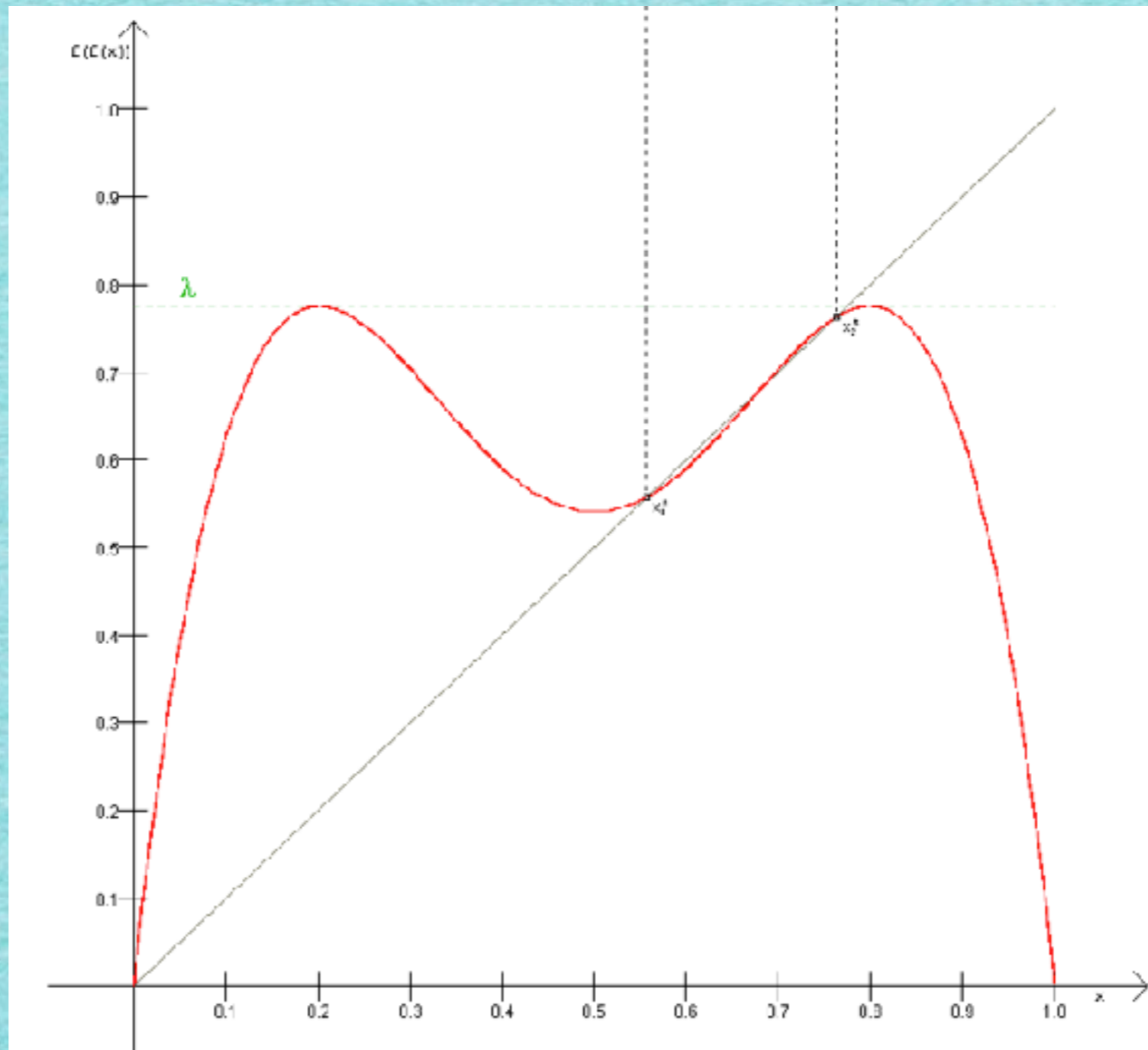
5.5.1 Logistische Rekursion

5.5.1 Logistische Rekursion

Zwei Fixpunkte!

5.5.1 Logistische Rekursion

Zwei Fixpunkte!



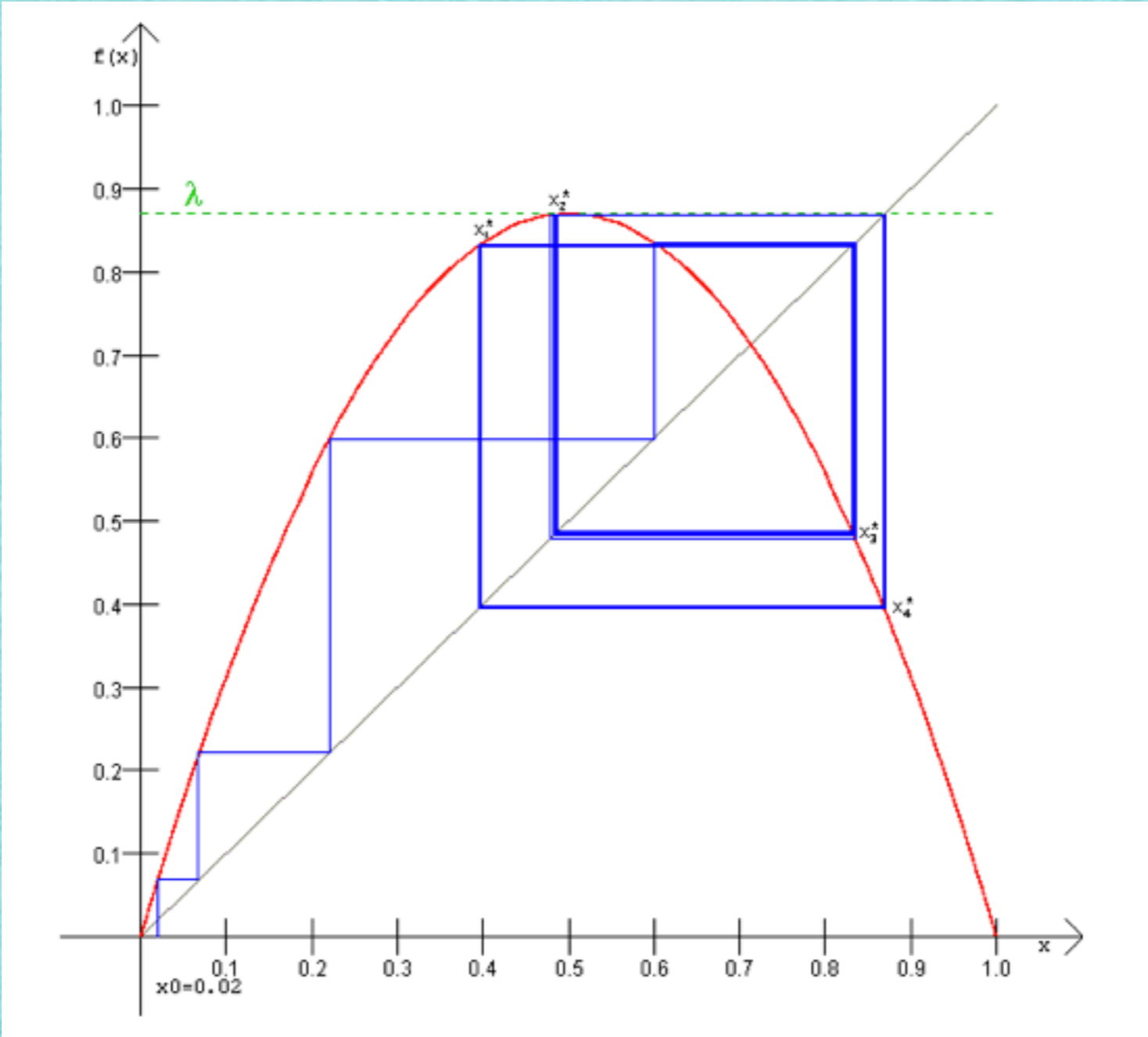
5.5.1 Logistische Rekursion

5.5.1 Logistische Rekursion

Vier Fixpunkte!

5.5.1 Logistische Rekursion

Vier Fixpunkte!



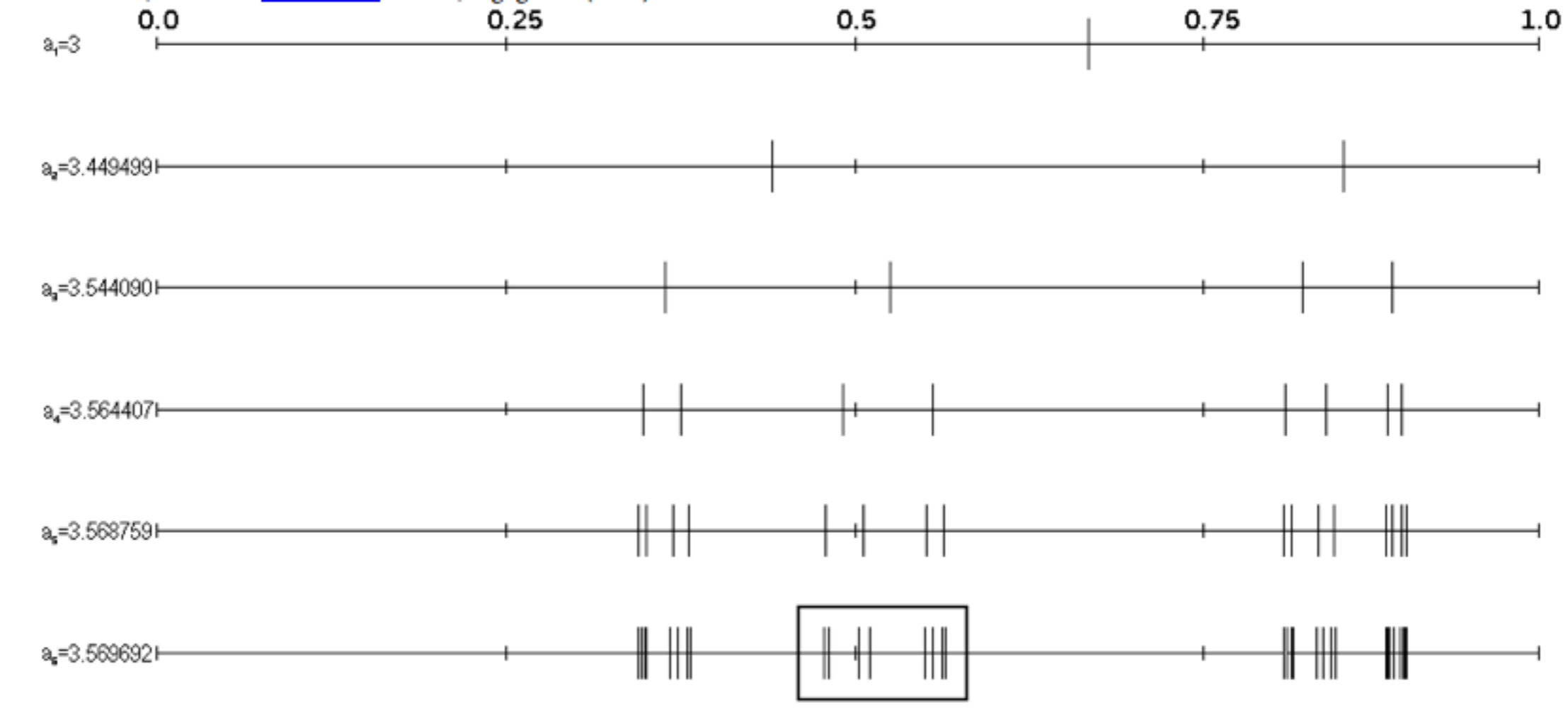
5.5.1 Logistische Rekursion

5.5.1 Logistische Rekursion

Entwicklung der Fixpunkte:

5.5.1 Logistische Rekursion

Entwicklung der Fixpunkte:



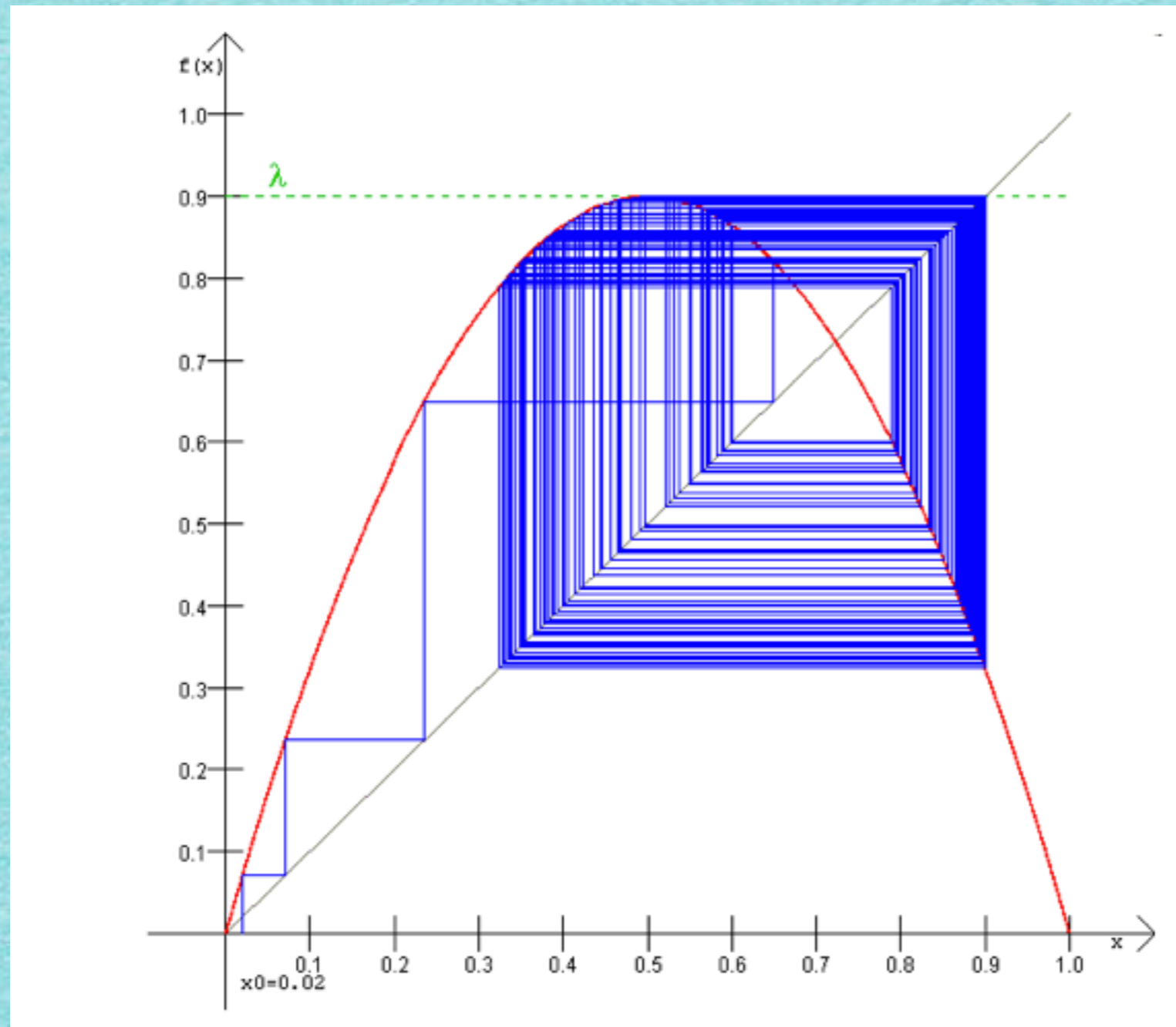
5.5.1 Logistische Rekursion

5.5.1 Logistische Rekursion

**Keinerlei Fixpunkte -
deterministisches Chaos:**

5.5.1 Logistische Rekursion

**Keinerlei Fixpunkte -
deterministisches Chaos:**



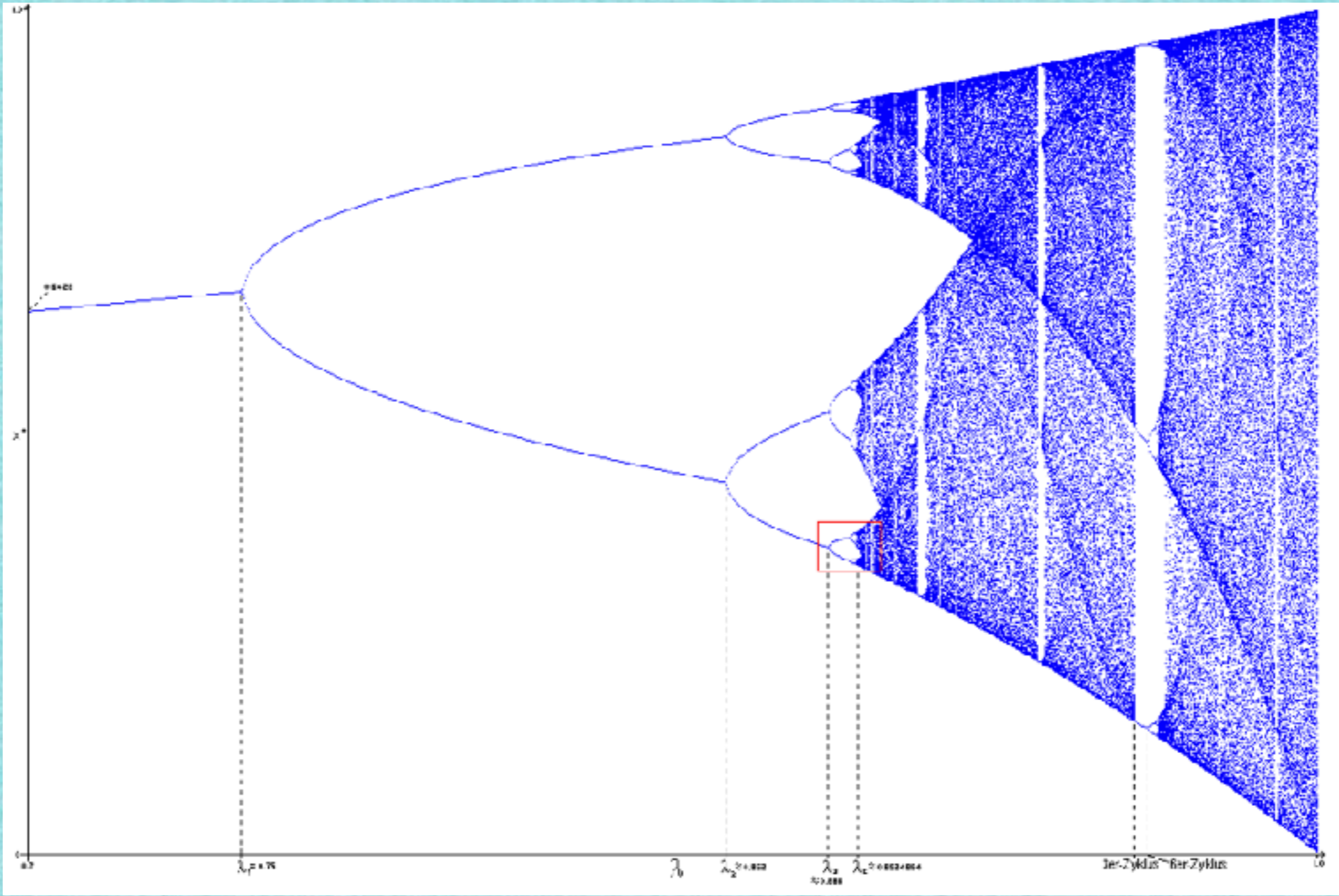
5.5.1 Logistische Rekursion

5.5.1 Logistische Rekursion

Bifurkationsdiagramm:

5.5.1 Logistische Rekursion

Bifurkationsdiagramm:



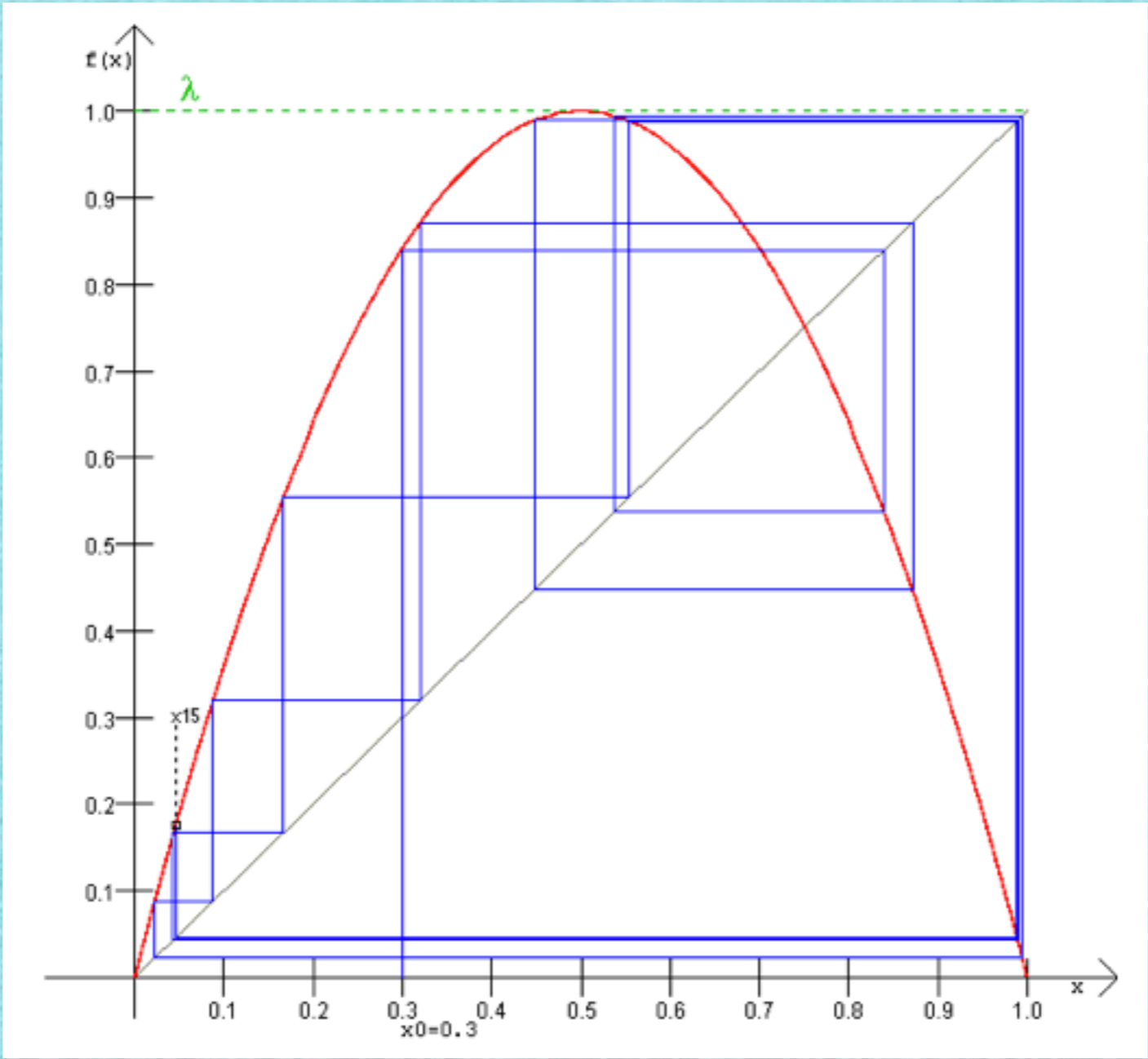
5.5.1 Logistische Rekursion

5.5.1 Logistische Rekursion

Kausalität?!

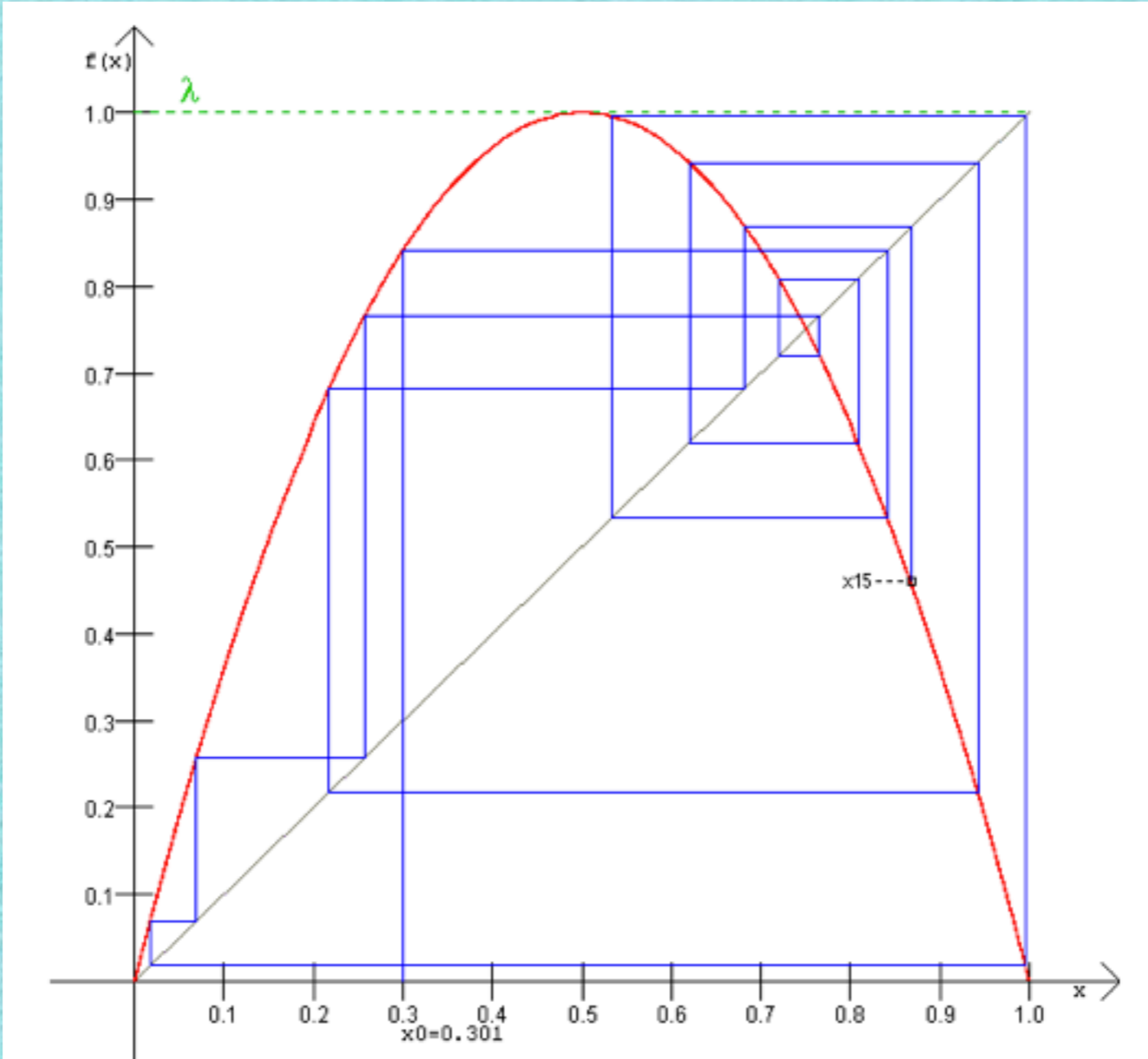
5.5.1 Logistische Rekursion

Kausalität?!



5.5.1 Logistische Rekursion

Kausalität?!



5.5.1 Logistische Rekursion

5.5.1 Logistische Rekursion



5.5.1 Logistische Rekursion



Edward Lorenz
(1917-2008)

5.5.1 Logistische Rekursion

Grenzen der Kausalität!



Edward Lorenz
(1917-2008)

5.5.1 Logistische Rekursion



Edward Lorenz
(1917-2008)

Grenzen der Kausalität!

Predictability: Does the flap of a butterfly's wings in Brazil set off a tornado in Texas?

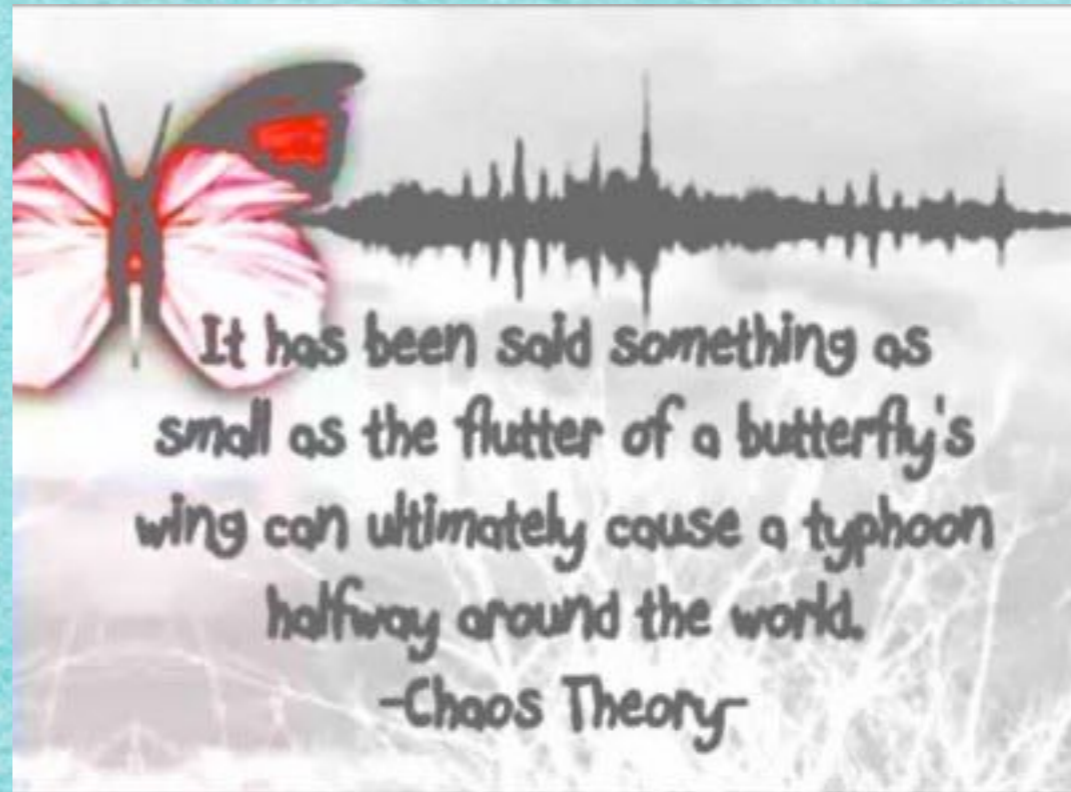
5.5.1 Logistische Rekursion



Edward Lorenz
(1917-2008)

Grenzen der Kausalität!

Predictability: Does the flap of a butterfly's wings in Brazil set off a tornado in Texas?



5.5.2 Frühkindliche Bildung

5.5.2 Frühkindliche Bildung



5.5.2 Frühkindliche Bildung



5.5.2 Frühkindliche Bildung



Pappbilderbuch, 16 Seiten
erschienen 1993

Nur wer viel spricht, lernt sprechen! Entsprechend schnell wachsen Sprachverständnis und Wortschatz von Kleinkindern, je mehr Gelegenheit Eltern ihnen zum Üben geben. Die Bilderbücher von Helmut Spanner eignen sich hervorragend zur spielerischen Sprachförderung, denn durch Zeigen und Benennen von Alltagsgegenständen wird der passive Wortschatz in aktiv nutzbare Wörter umgewandelt. Mehr als 250 Dinge, die Kindern ab einem Jahr vertraut sind, wurden hier, nach Themen geordnet, auf großen Doppelseiten zusammengestellt. Ab und zu entdeckt man auch einen kleinen Bären oder ein Mäuschen, die mit den Dingen spielen.

[»> Lesermeynungen zu diesem Buch](#)



5.5.2 Frühkindliche Bildung



5.5.2 Frühkindliche Bildung



Luftmatratze

5.5.2 Frühkindliche Bildung



$$X_{n+1} = X_n^2 - Y_n^2 - C_x$$

$$Y_{n+1} = 2X_n Y_n - C_y$$

5.5.2 Frühkindliche Bildung



$$X_{n+1} = X_n^2 - Y_n^2 - C_x$$

$$Y_{n+1} = 2X_n Y_n - C_y$$

$$Z_n = X_n + iY_n$$

$$C = C_x + iC_y$$

5.5.2 Frühkindliche Bildung



$$X_{n+1} = X_n^2 - Y_n^2 - C_x$$

$$Y_{n+1} = 2X_n Y_n - C_y$$

$$Z_n = X_n + iY_n$$

$$C = C_x + iC_y$$

$$Z_{n+1} = Z_n^2 - C$$

5.5.2 Die Mandelbrotmenge

5.5.2 Die Mandelbrotmenge

Noch einmal quadratische Rekursion:

5.5.2 Die Mandelbrotmenge

Noch einmal quadratische Rekursion:

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

5.5.2 Die Mandelbrotmenge

Noch einmal quadratische Rekursion:

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

$$z_0 = 0$$

5.5.2 Die Mandelbrotmenge

Noch einmal quadratische Rekursion:

$$z_{n+1} = z_n^2 + c \quad z_0 = 0$$

Für welche Werte c bleibt das beschränkt?

5.5.2 Die Mandelbrotmenge

Noch einmal quadratische Rekursion:

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

$$z_0 = 0$$

Für welche Werte c bleibt das beschränkt?

$$c = -2 : 0, -2, 2, 2, \dots$$

5.5.2 Die Mandelbrotmenge

Noch einmal quadratische Rekursion:

$$z_{n+1} = z_n^2 + c \quad z_0 = 0$$

Für welche Werte c bleibt das beschränkt?

$$c = -2 : 0, -2, 2, 2, \dots$$

$$c = 1/4 : 0, 0.25, 0.3125, 0.3476, 0.3708, 0.3875, 0.4001, 0.4101, \dots$$

5.5.2 Die Mandelbrotmenge

Noch einmal quadratische Rekursion:

$$z_{n+1} = z_n^2 + c \quad z_0 = 0$$

Für welche Werte c bleibt das beschränkt?

$$c = -2 : 0, -2, 2, 2, \dots$$

$$c = 1/4 : 0, 0.25, 0.3125, 0.3476, 0.3708, 0.3875, 0.4001, 0.4101, \dots$$

Man kann das auf die logistische Iteration abbilden...

5.5.2 Die Mandelbrotmenge

Noch einmal quadratische Rekursion:

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

$$z_0 = 0$$

5.5.2 Die Mandelbrotmenge

Noch einmal quadratische Rekursion:

$$z_{n+1} = z_n^2 + c \quad z_0 = 0$$

Für welche *komplexen* Werte c bleibt das beschränkt?

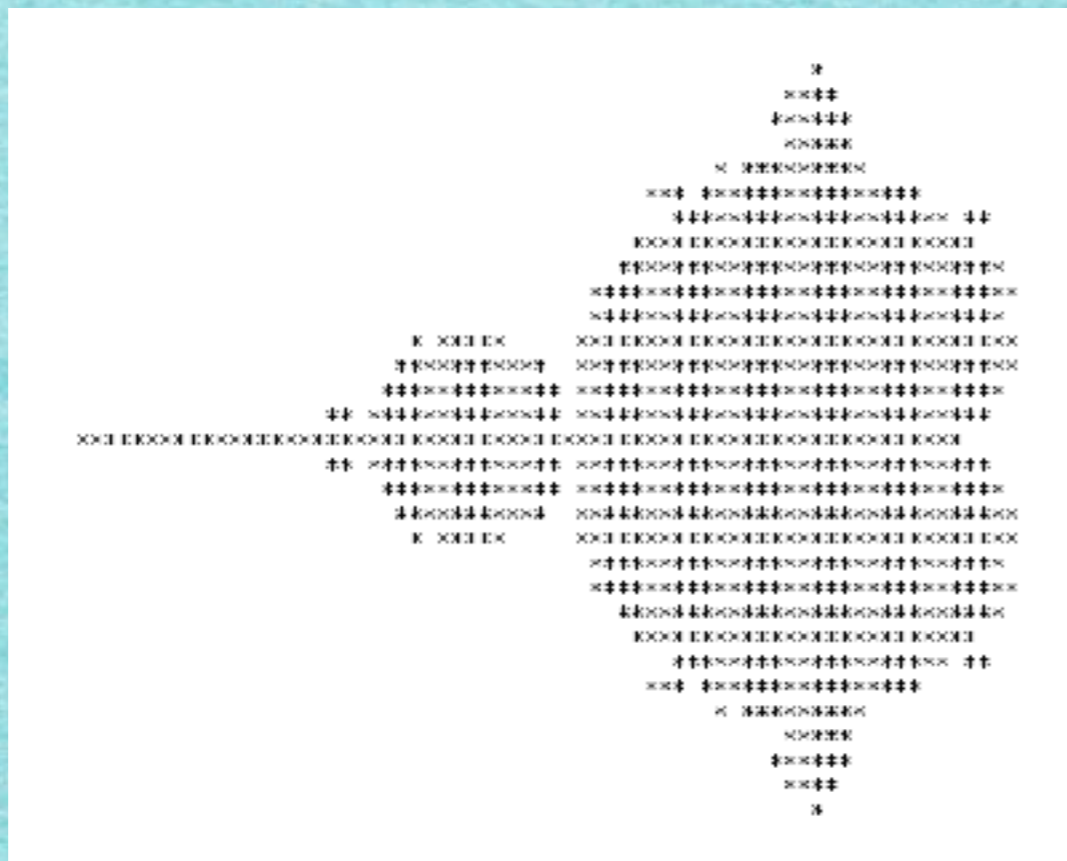
5.5.2 Die Mandelbrotmenge

Noch einmal quadratische Rekursion:

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

$$z_0 = 0$$

Für welche *komplexen* Werte c bleibt das beschränkt?



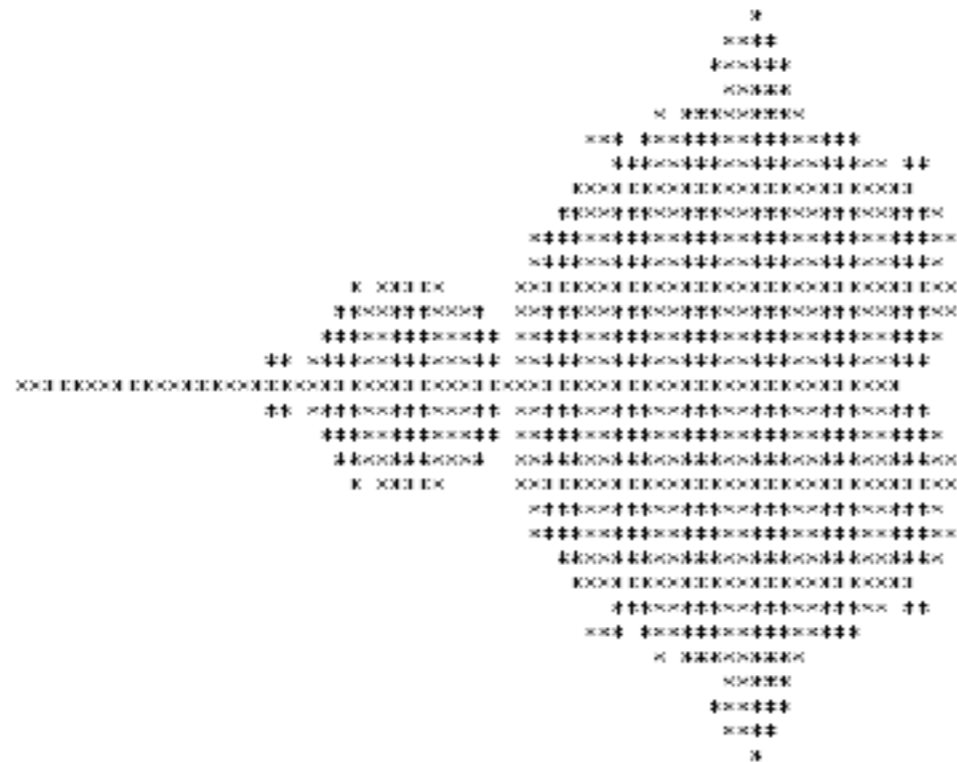
5.5.2 Die Mandelbrotmenge

Noch einmal quadratische Rekursion:

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

$$z_0 = 0$$

Für welche *komplexen* Werte c bleibt das beschränkt?



Brooks & Matelsky
(1978)

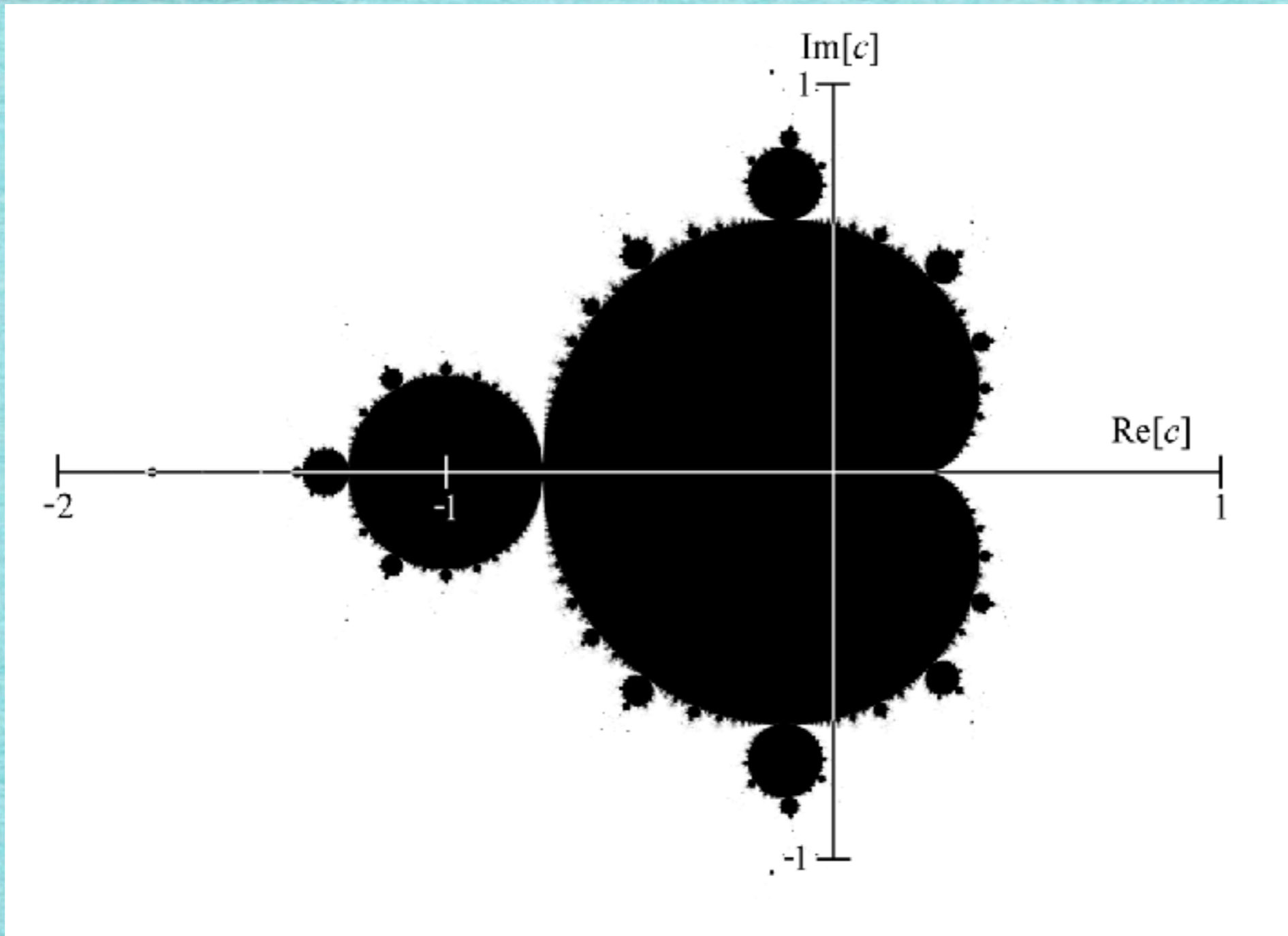
5.5.2 Die Mandelbrotmenge

5.5.2 Die Mandelbrotmenge

Besser aufgelöst:

5.5.2 Die Mandelbrotmenge

Besser aufgelöst:



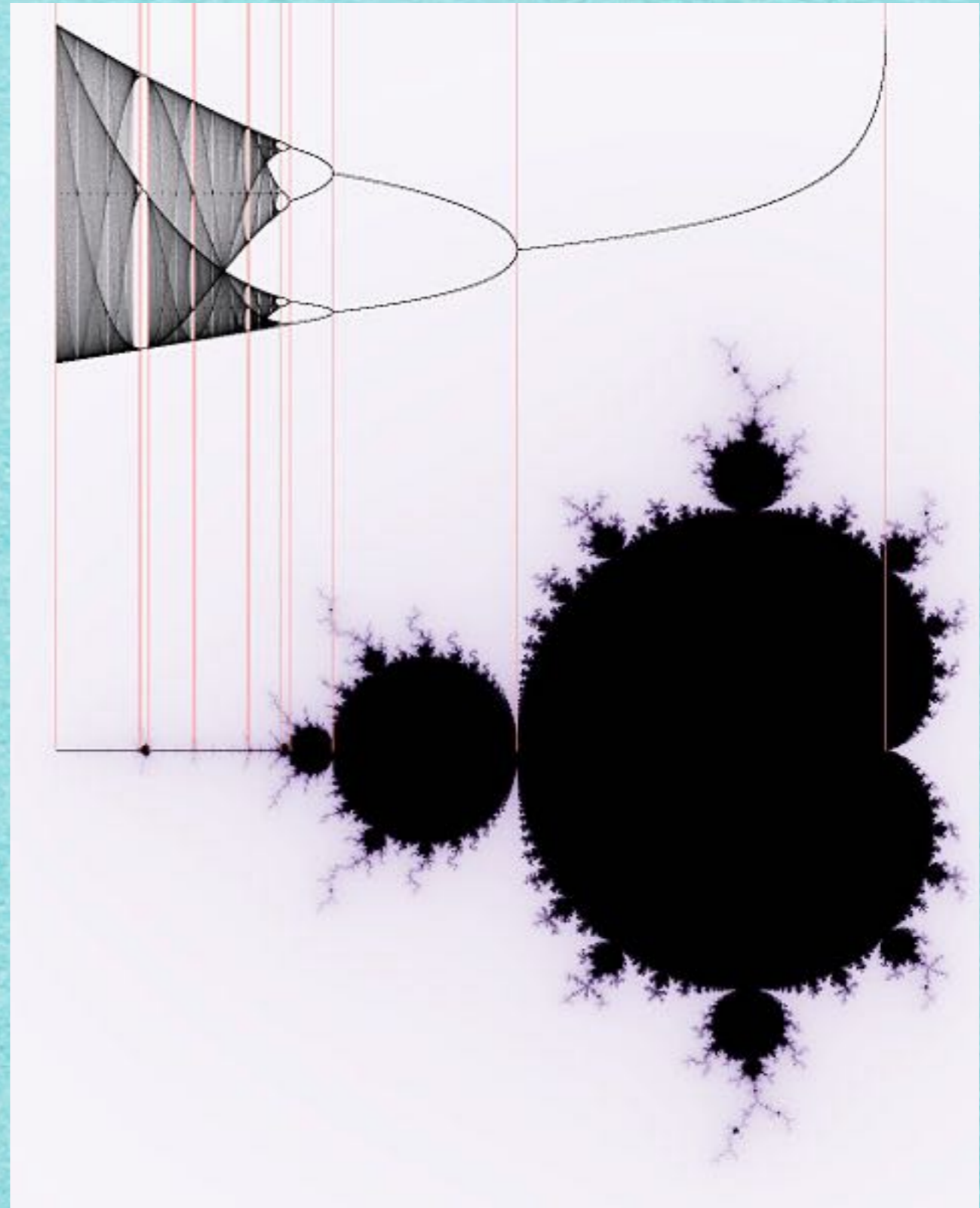
5.5.2 Die Mandelbrotmenge

5.5.2 Die Mandelbrotmenge

**Realteil auf die
logistische Iteration
abgebildet:**

5.5.2 Die Mandelbrotmenge

**Realteil auf die
logistische Iteration
abgebildet:**



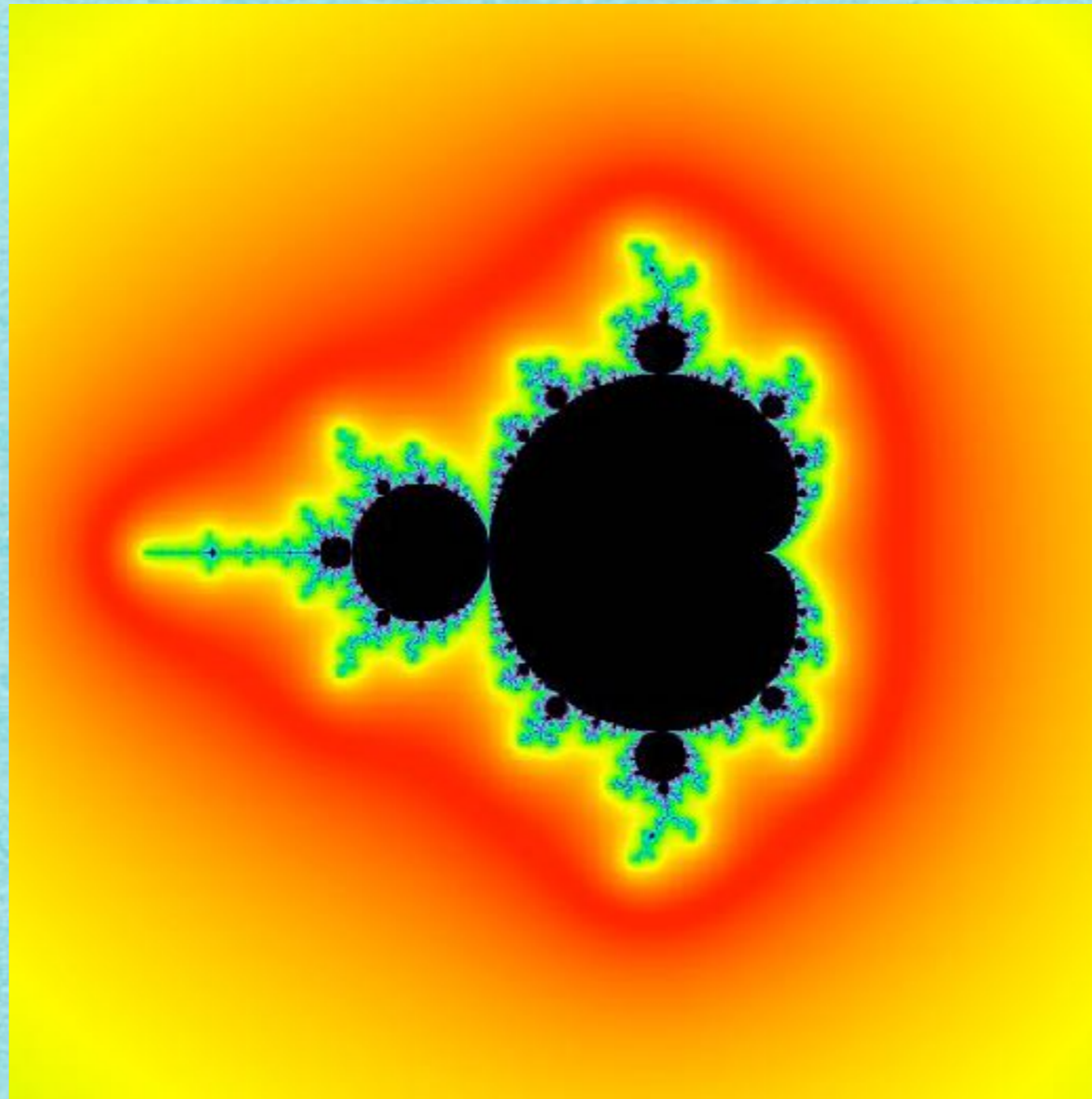
5.5.2 Die Mandelbrotmenge

5.5.2 Die Mandelbrotmenge

Farbig:

5.5.2 Die Mandelbrotmenge

Farbig:



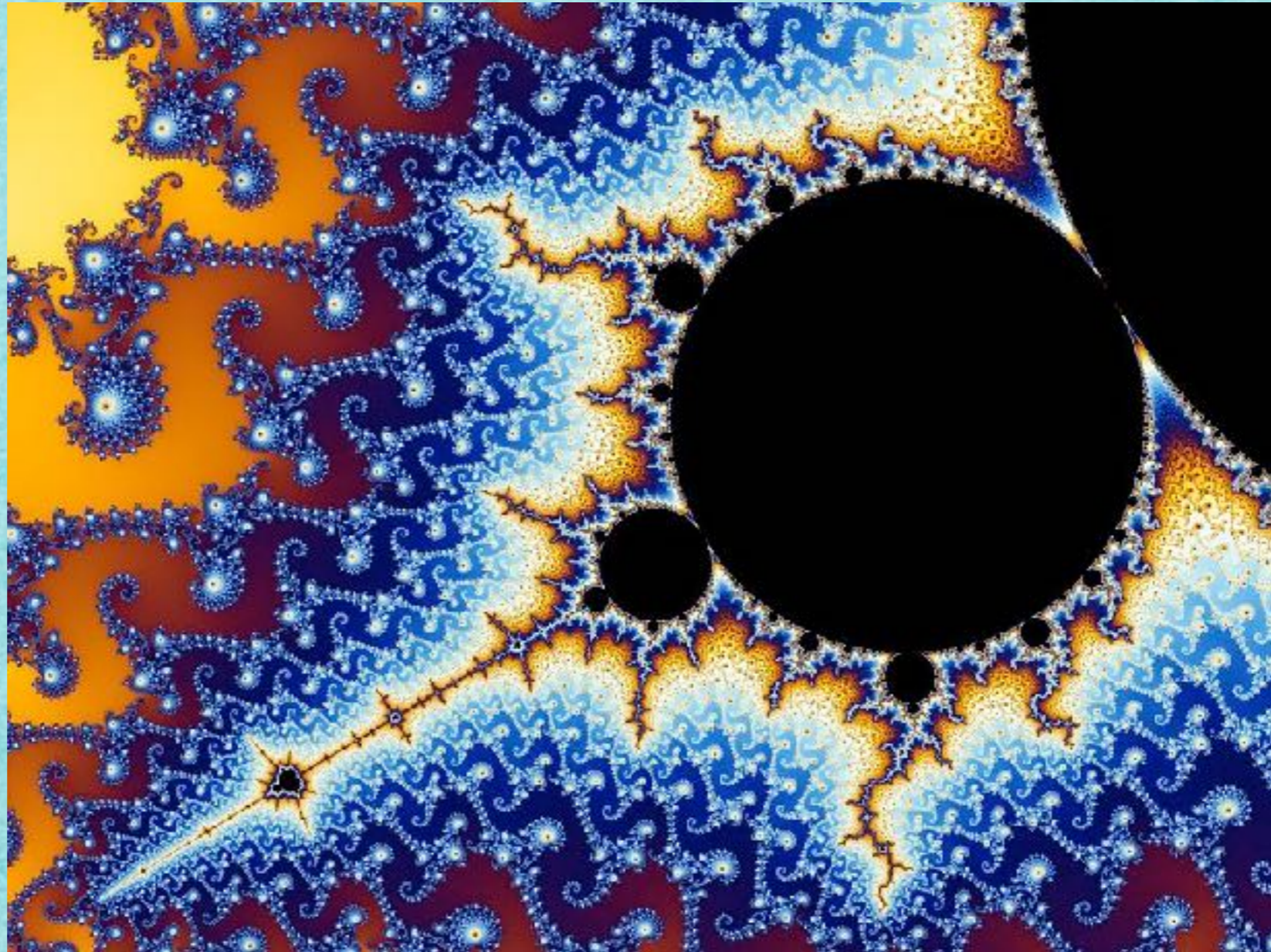
5.5.2 Die Mandelbrotmenge

5.5.2 Die Mandelbrotmenge

Ausschnitt:

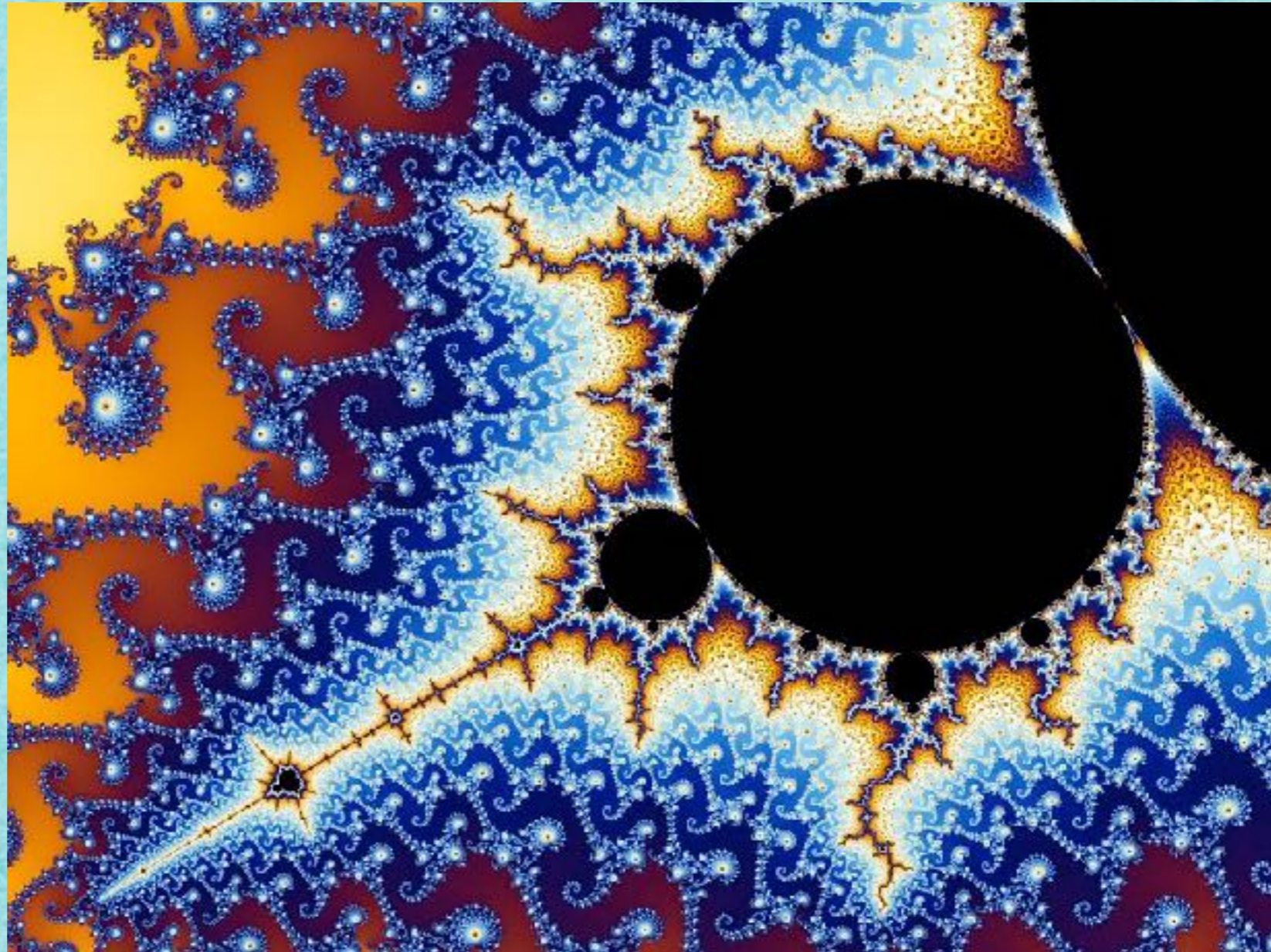
5.5.2 Die Mandelbrotmenge

Ausschnitt:



5.5.2 Die Mandelbrotmenge

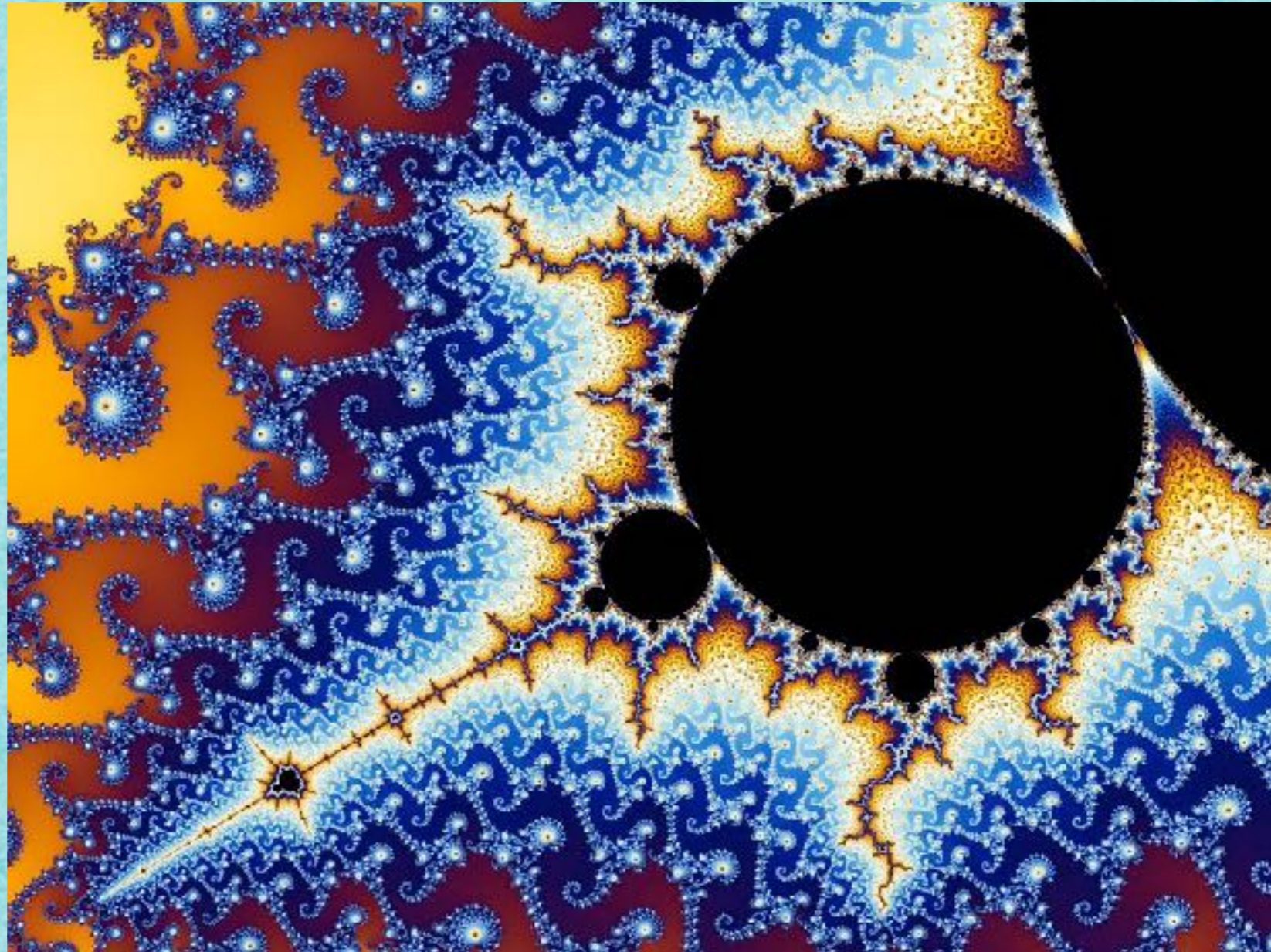
Ausschnitt:



-> Film:

5.5.2 Die Mandelbrotmenge

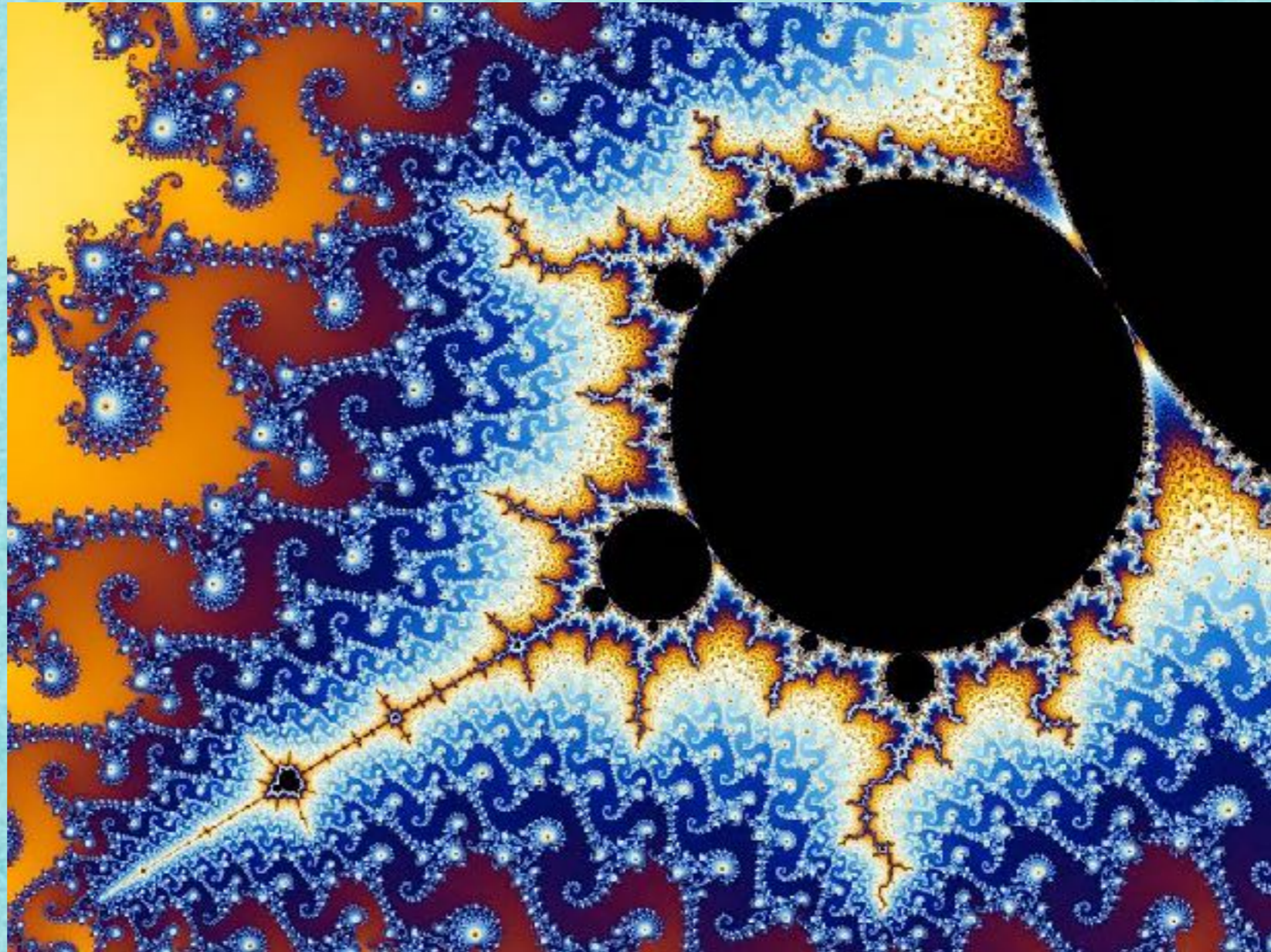
Ausschnitt:



-> Film:
• Video von tthsqe12

5.5.2 Die Mandelbrotmenge

Ausschnitt:

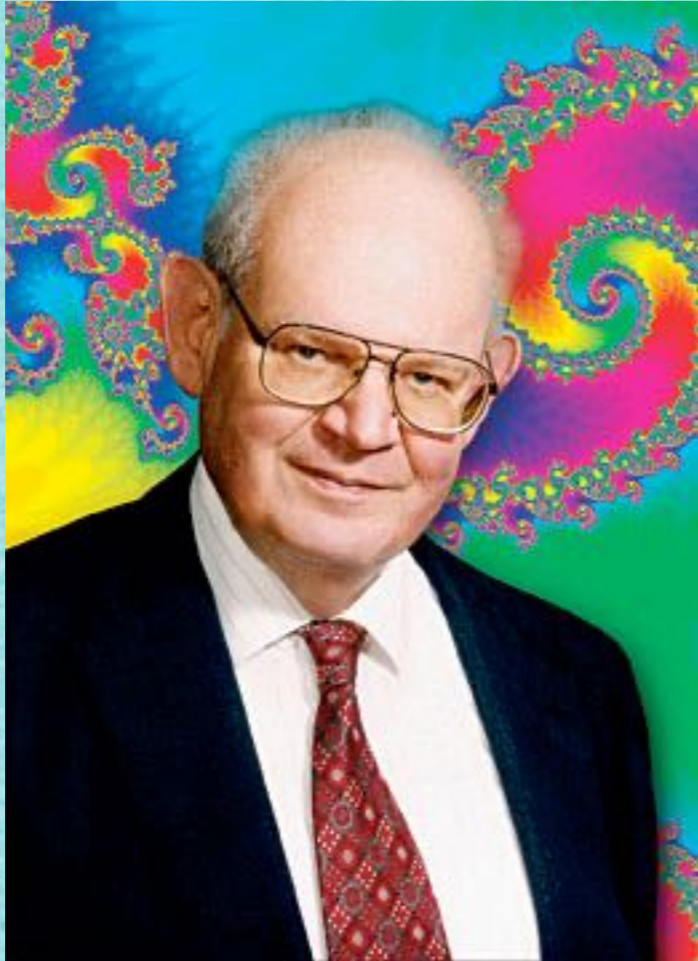


-> Film:

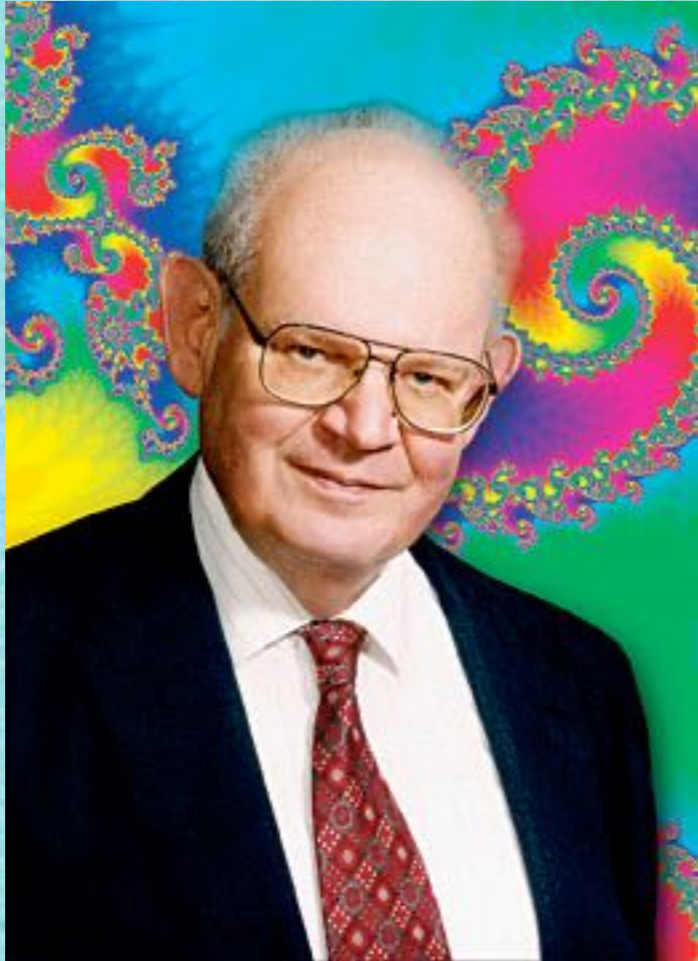
- **Video von tthsqe12**
- **Musik „Research Lab“ von Dark Flow**

5.5.2 Die Mandelbrotmenge

5.5.2 Die Mandelbrotmenge

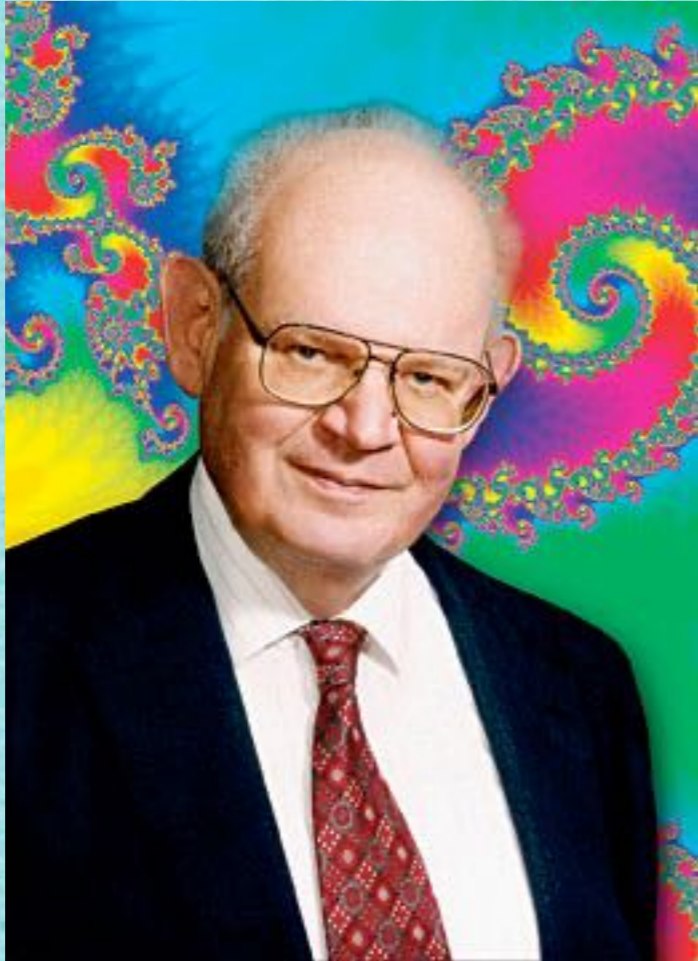


5.5.2 Die Mandelbrotmenge



Benoît Mandelbrot
(1924-2010)

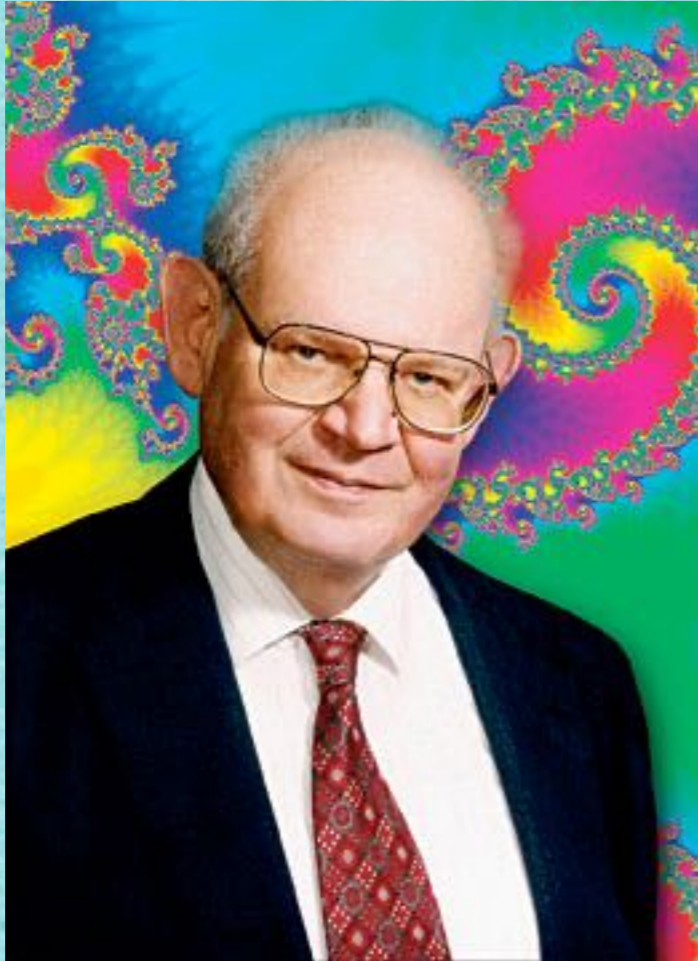
5.5.2 Die Mandelbrotmenge



Benoît Mandelbrot
(1924-2010)

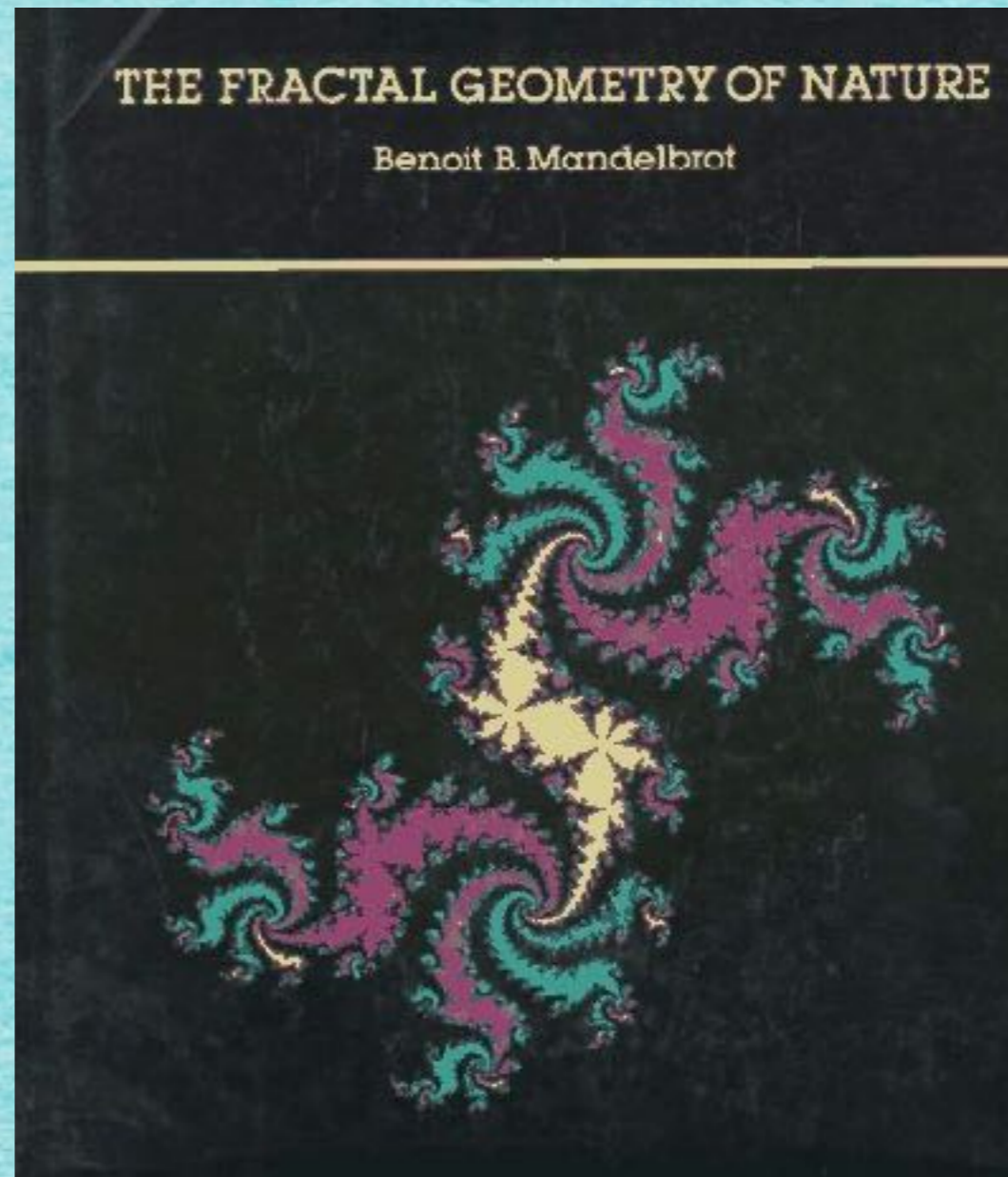
Fractal Geometry of Nature
(1982)

5.5.2 Die Mandelbrotmenge

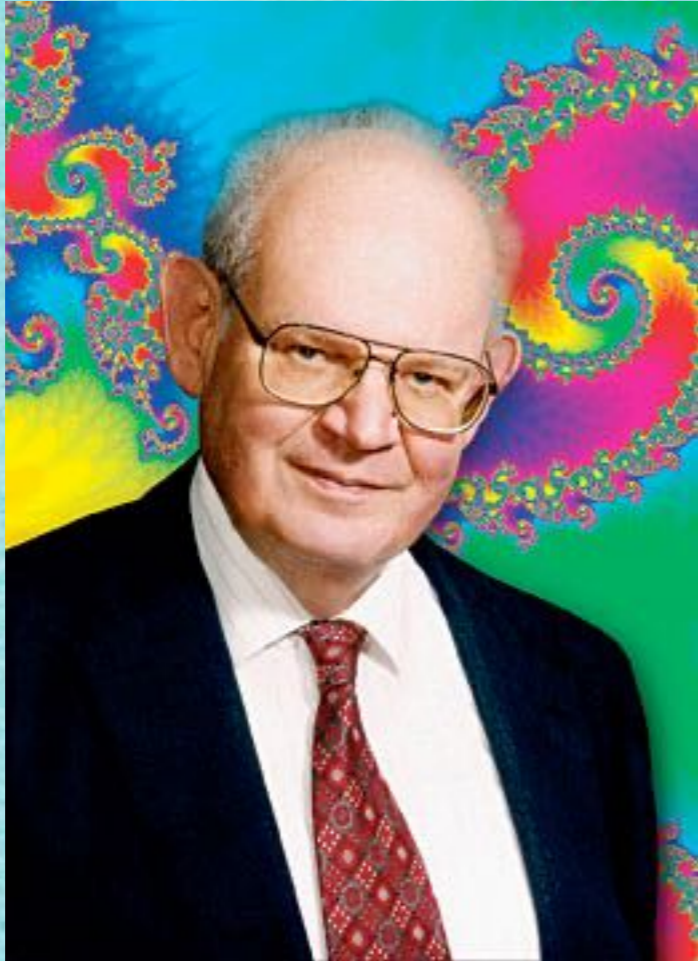


Benoît Mandelbrot
(1924-2010)

Fractal Geometry of Nature
(1982)



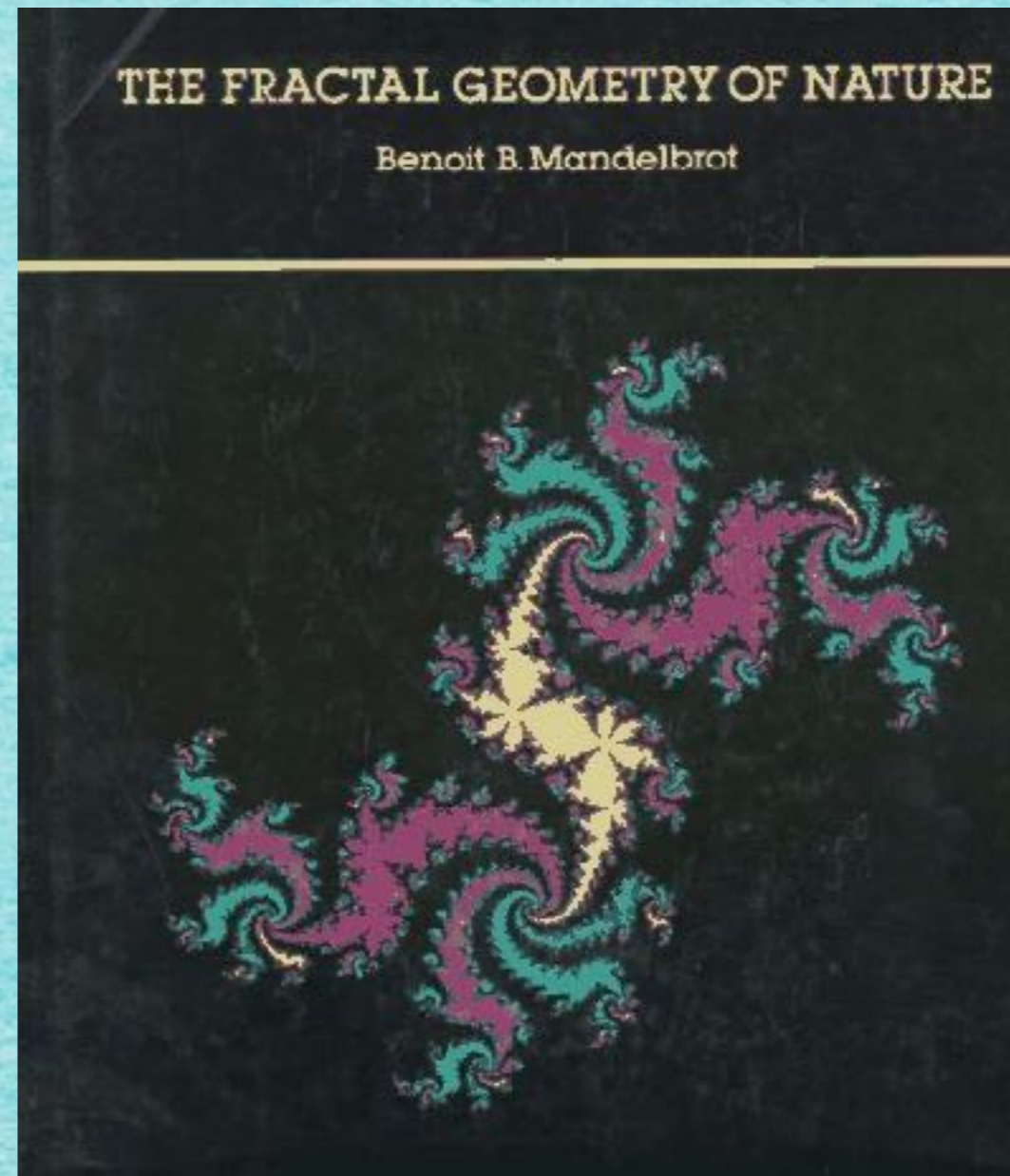
5.5.2 Die Mandelbrotmenge



Benoît Mandelbrot
(1924-2010)

Erste Dauerprofessur:
1999

Fractal Geometry of Nature
(1982)



5.5.3 Fraktale

5.5.3 Fraktale

Mandelbrot
(1967)

5.5.3 Fraktale

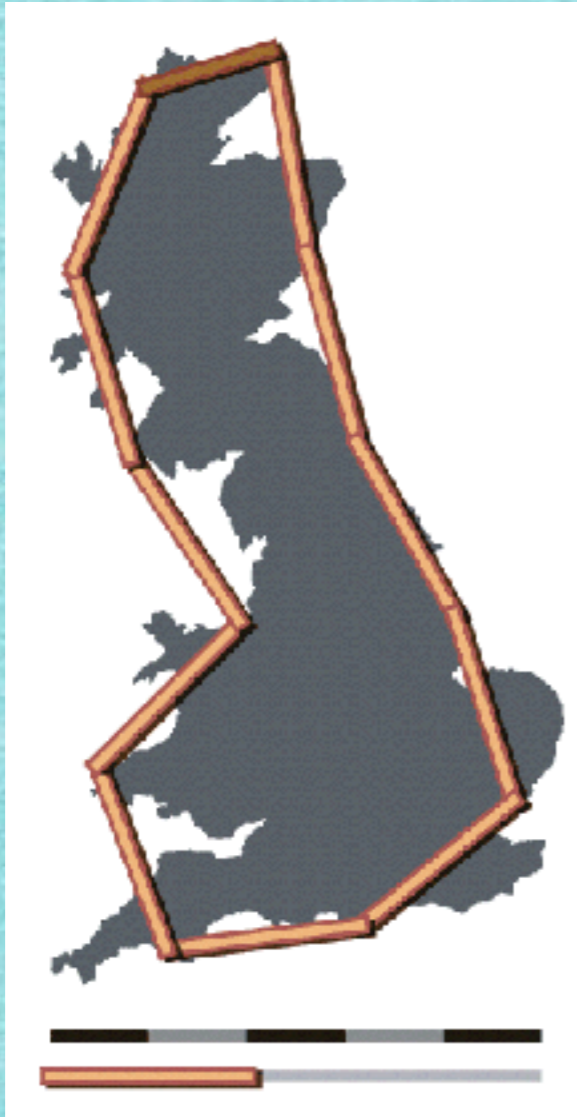
Mandelbrot
(1967)

How long is the coast line of Britain?

5.5.3 Fraktale

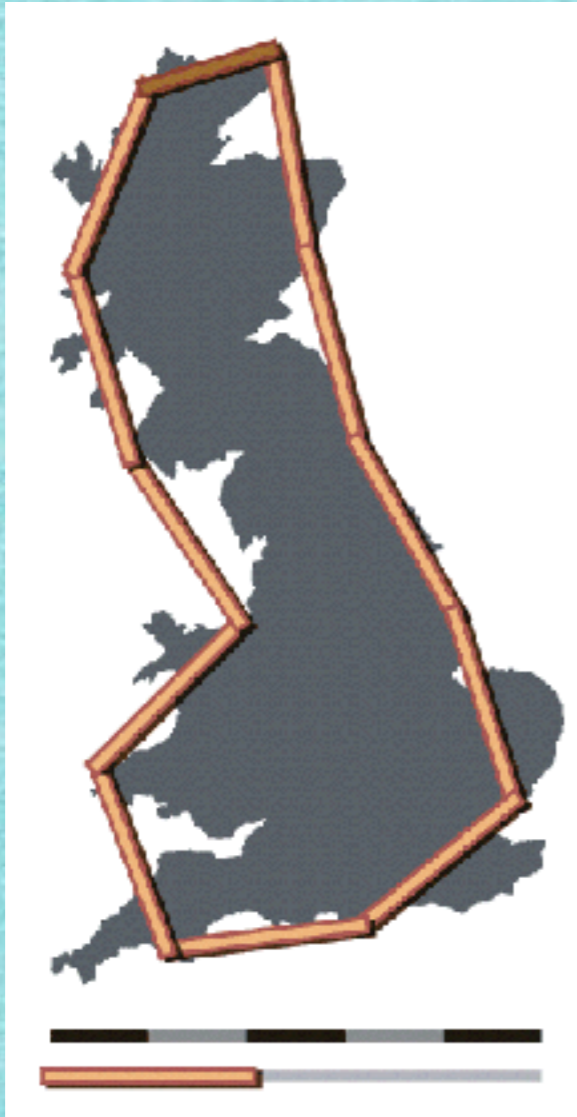
Mandelbrot
(1967)

How long is the coast line of Britain?



5.5.3 Fraktale

Mandelbrot
(1967)



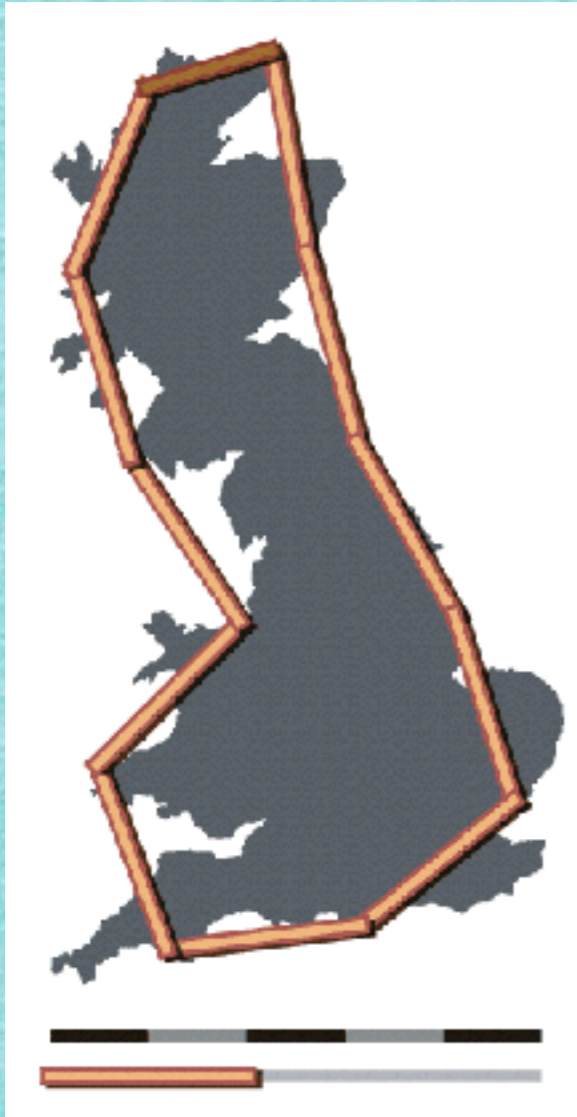
Maßstab 200km:
2350km

How long is the coast line of Britain?

5.5.3 Fraktale

Mandelbrot
(1967)

How long is the coast line of Britain?

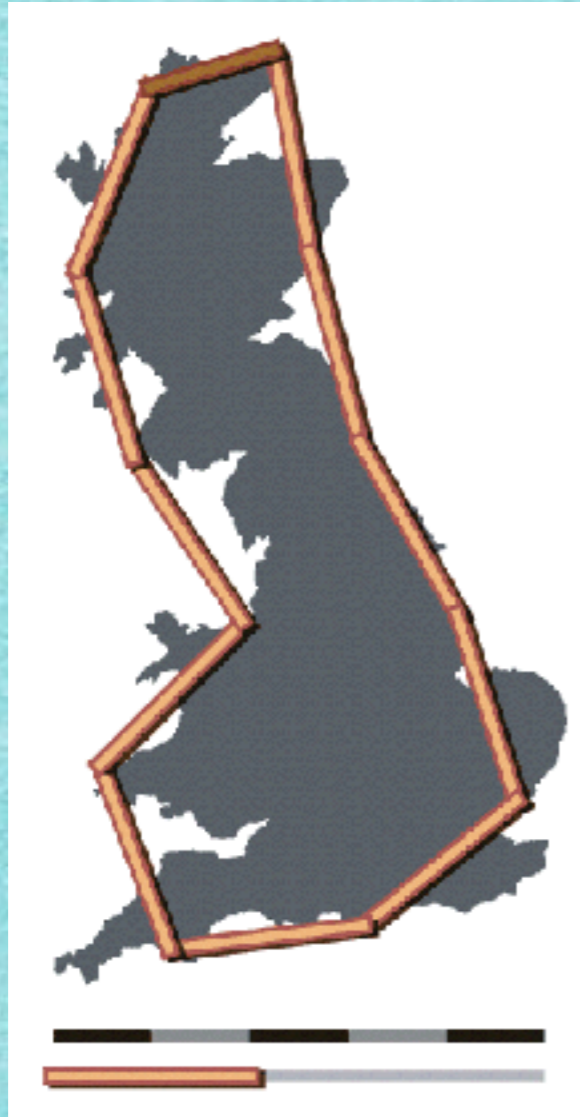


Maßstab 200km:
2350km

5.5.3 Fraktale

Mandelbrot
(1967)

How long is the coast line of Britain?



Maßstab 200km:
2350km

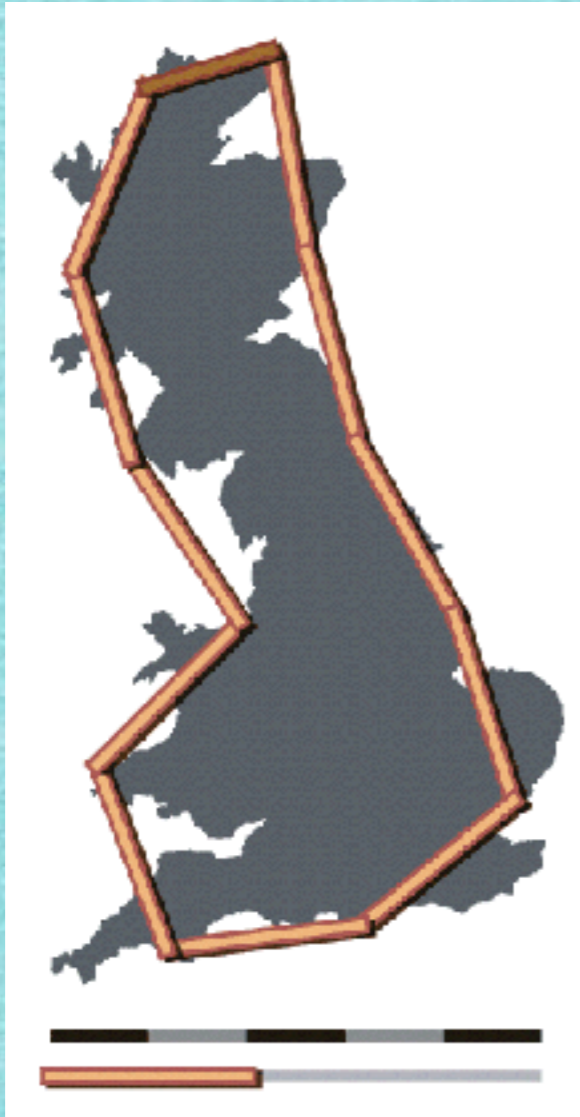


Maßstab 100km:
2775km

5.5.3 Fraktale

Mandelbrot
(1967)

How long is the coast line of Britain?



Maßstab 200km:
2350km



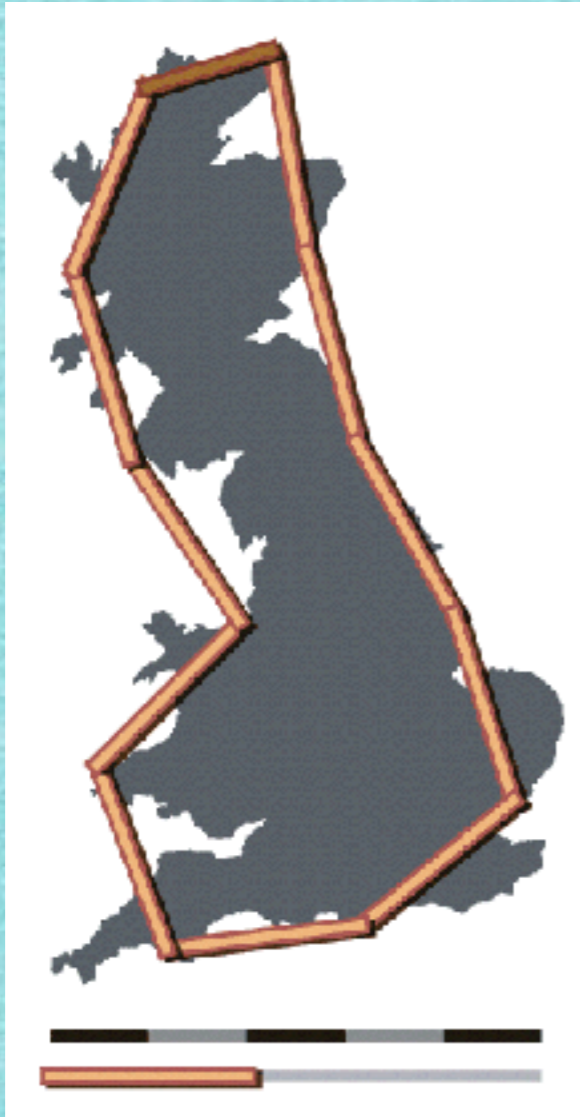
Maßstab 100km:
2775km



5.5.3 Fraktale

Mandelbrot
(1967)

How long is the coast line of Britain?



Maßstab 200km:
2350km



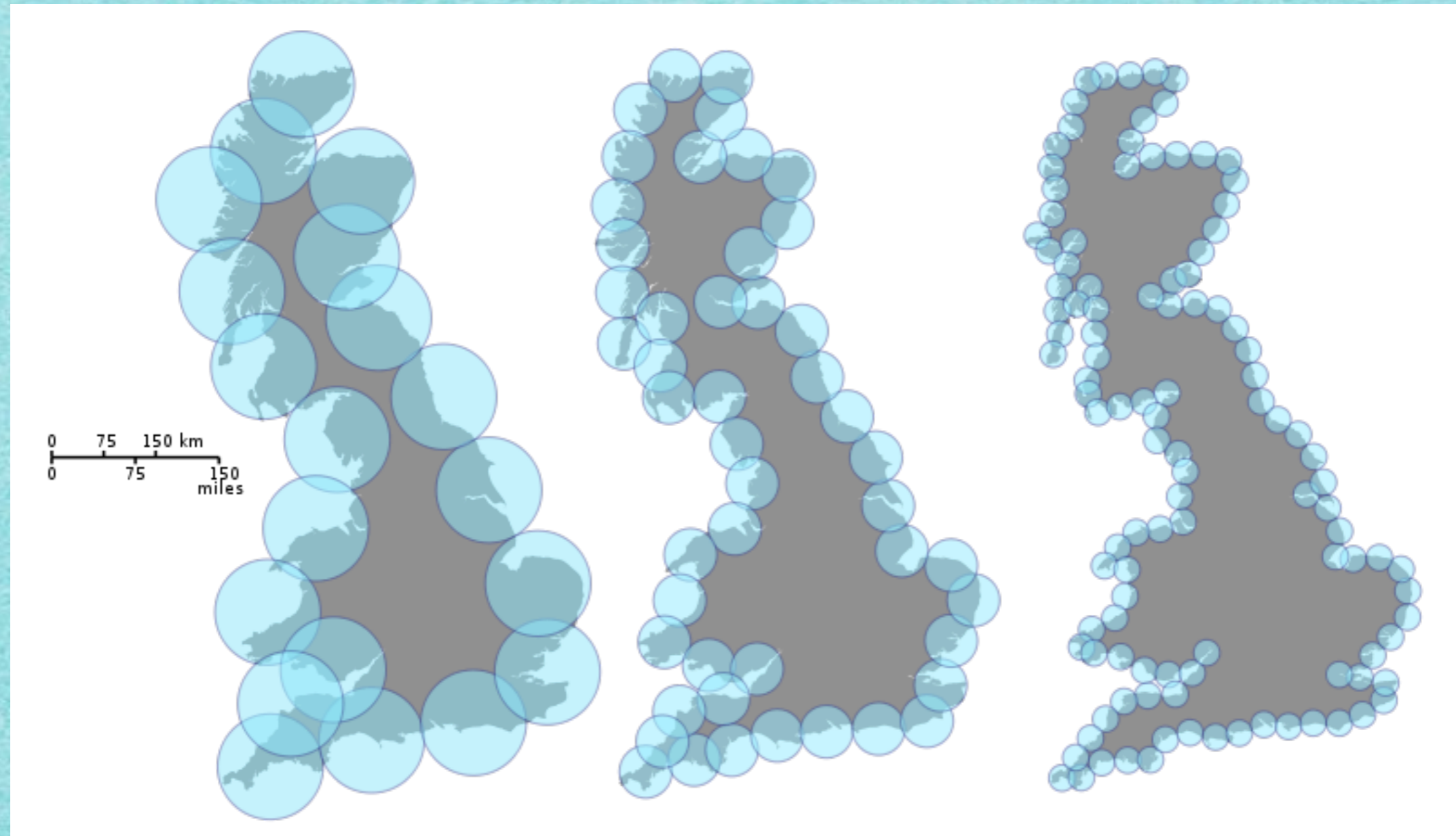
Maßstab 100km:
2775km



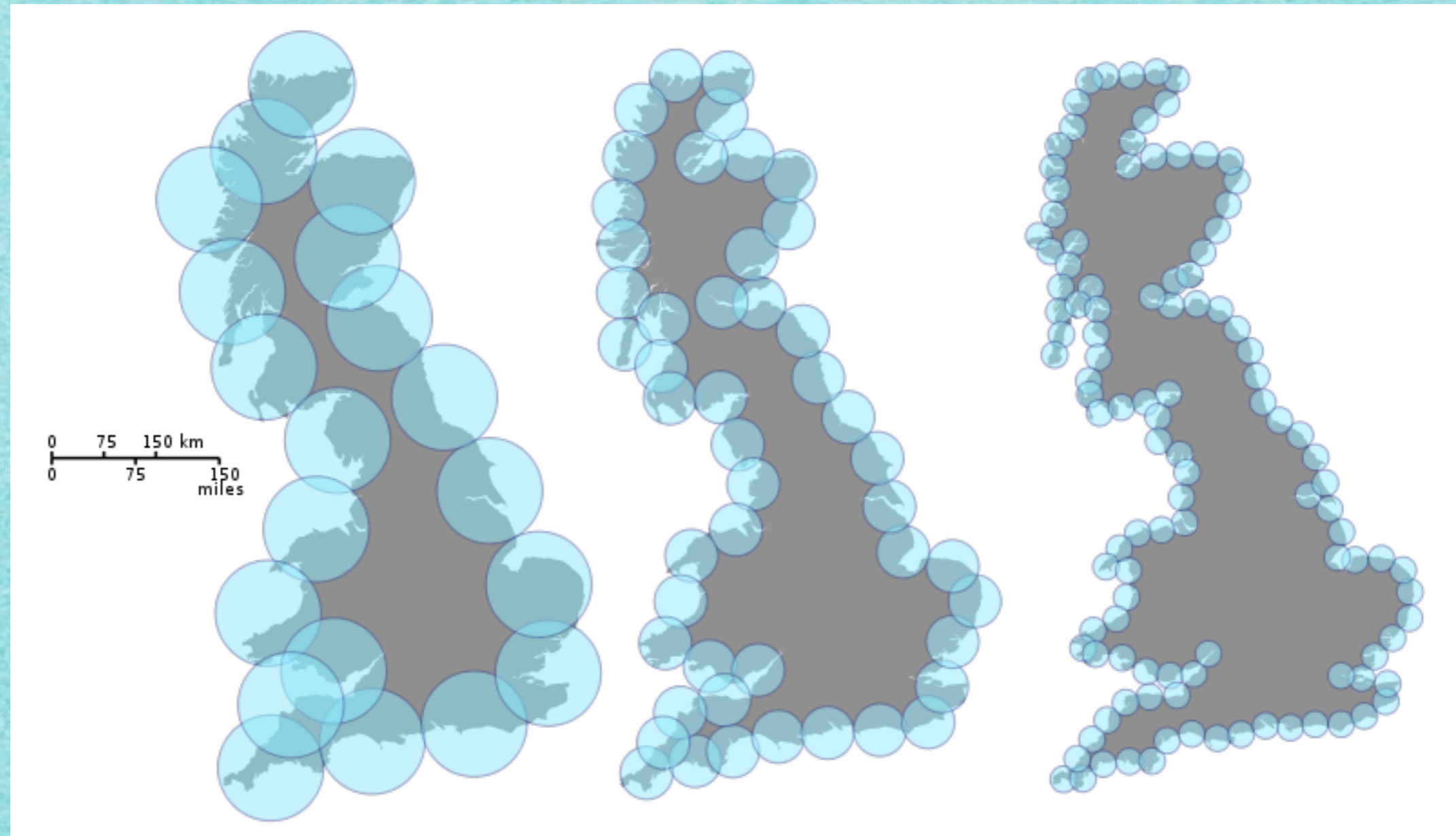
Maßstab 50km:
3425km

5.5.3 Fraktale

5.5.3 Fraktale



5.5.3 Fraktale



*Hausdorff-Dimension:
Wie wächst das Gesamtmaß in Abhängigkeit von der Größe?*

5.5.3 Fraktale

5.5.3 Fraktale



5.5.3 Fraktale



Niels Fabian Helge
Hartmut von Koch
(1870-1924)

5.5.3 Fraktale



Niels Fabian Helge
Hartmut von Koch
(1870-1924)

Schneeflockenkurve

5.5.3 Fraktale



Niels Fabian Helge
Hartmut von Koch
(1870-1924)

Schneeflockenkurve

(1904)

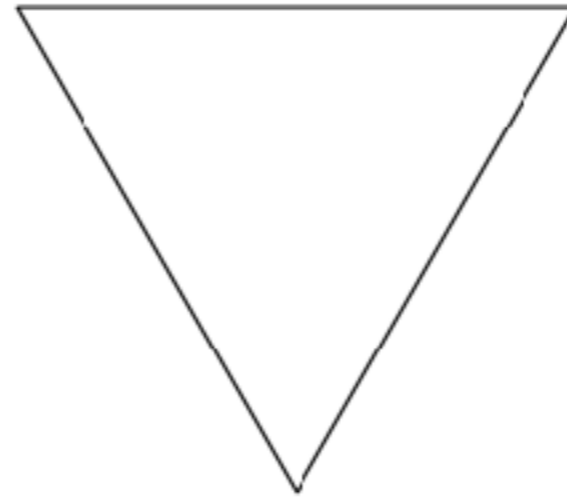
5.5.3 Fraktale



Niels Fabian Helge
Hartmut von Koch
(1870-1924)

Schneeflockenkurve

(1904)



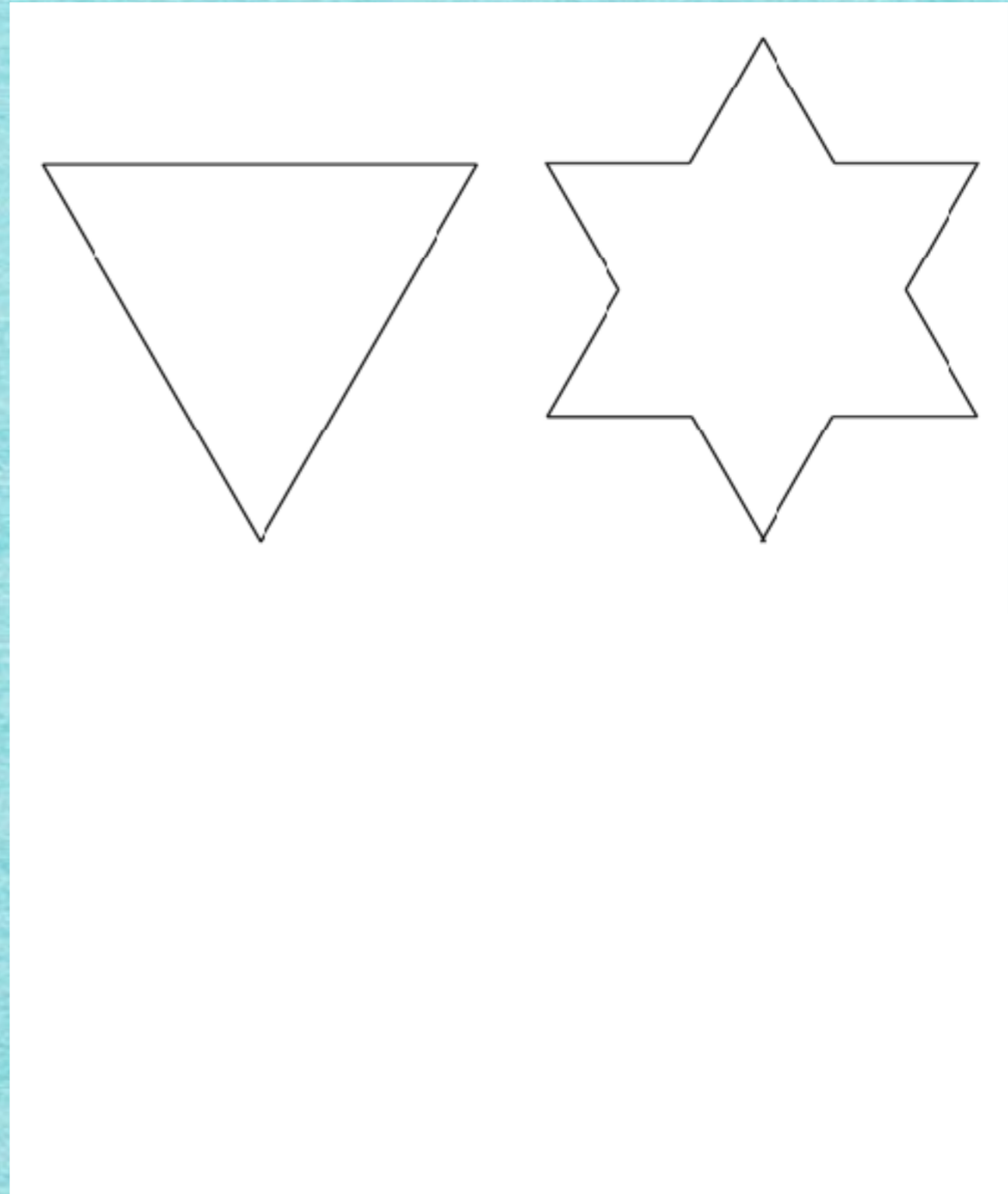
5.5.3 Fraktale



Niels Fabian Helge
Hartmut von Koch
(1870-1924)

Schneeflockenkurve

(1904)



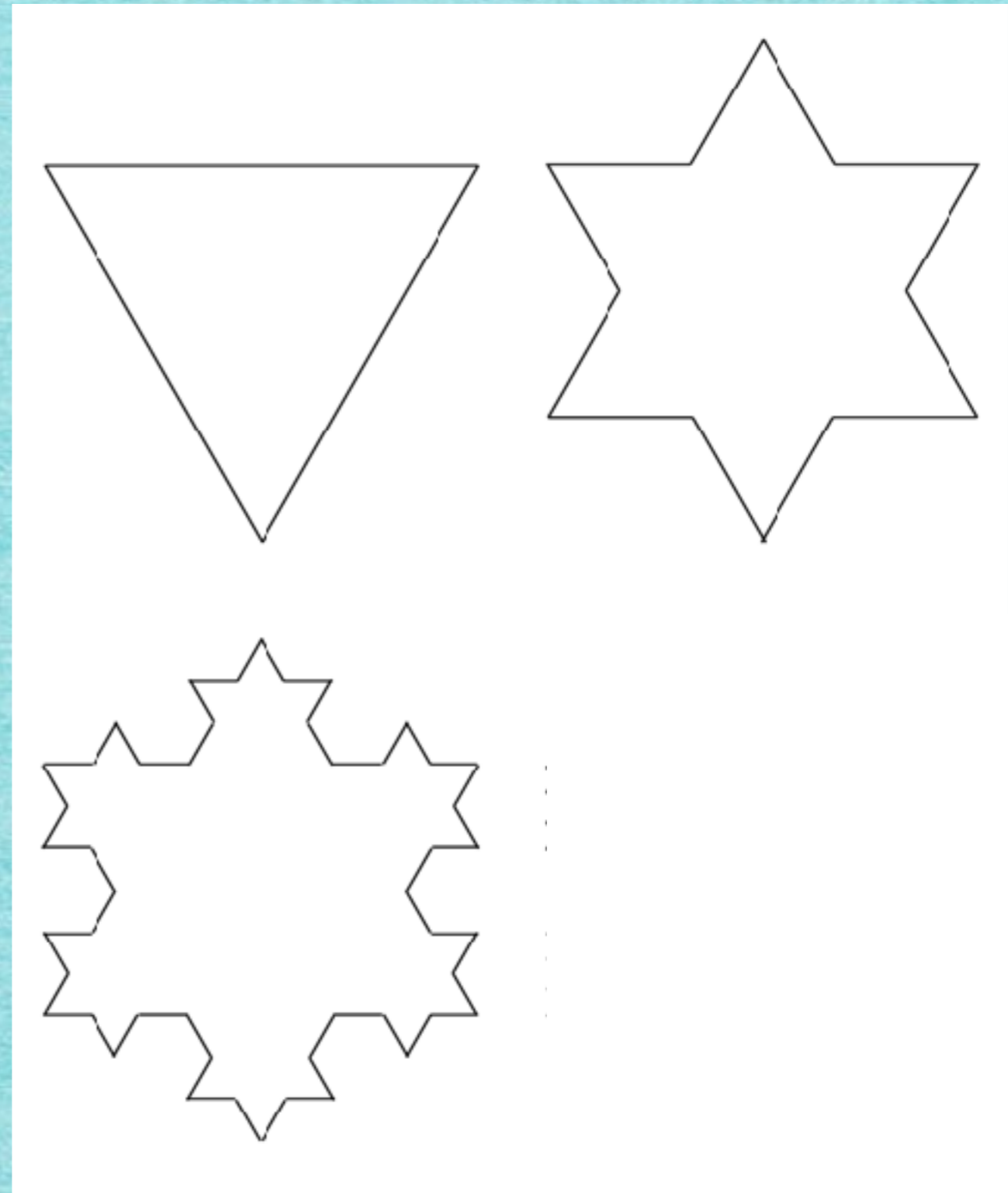
5.5.3 Fraktale



Niels Fabian Helge
Hartmut von Koch
(1870-1924)

Schneeflockenkurve

(1904)



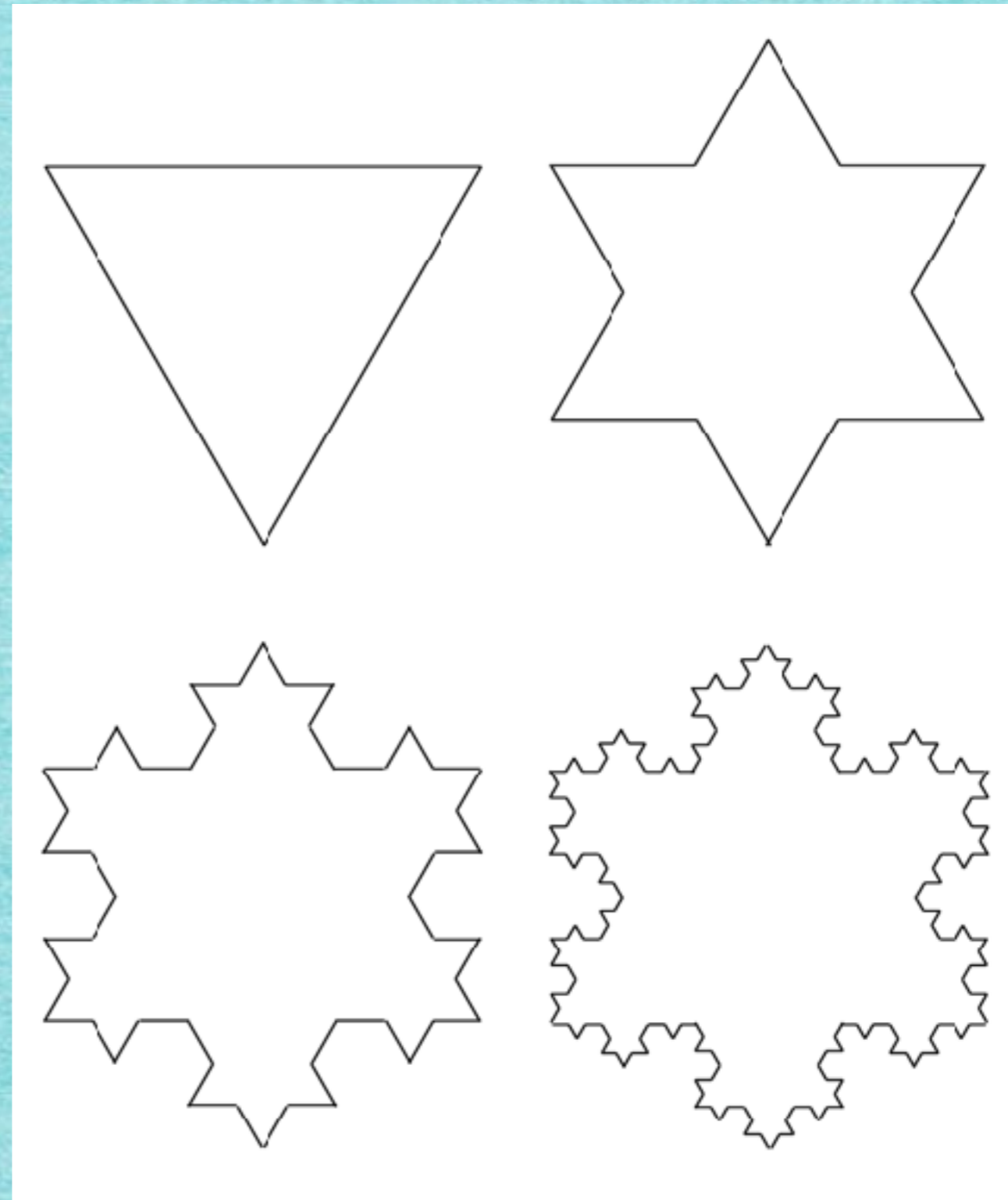
5.5.3 Fraktale



Niels Fabian Helge
Hartmut von Koch
(1870-1924)

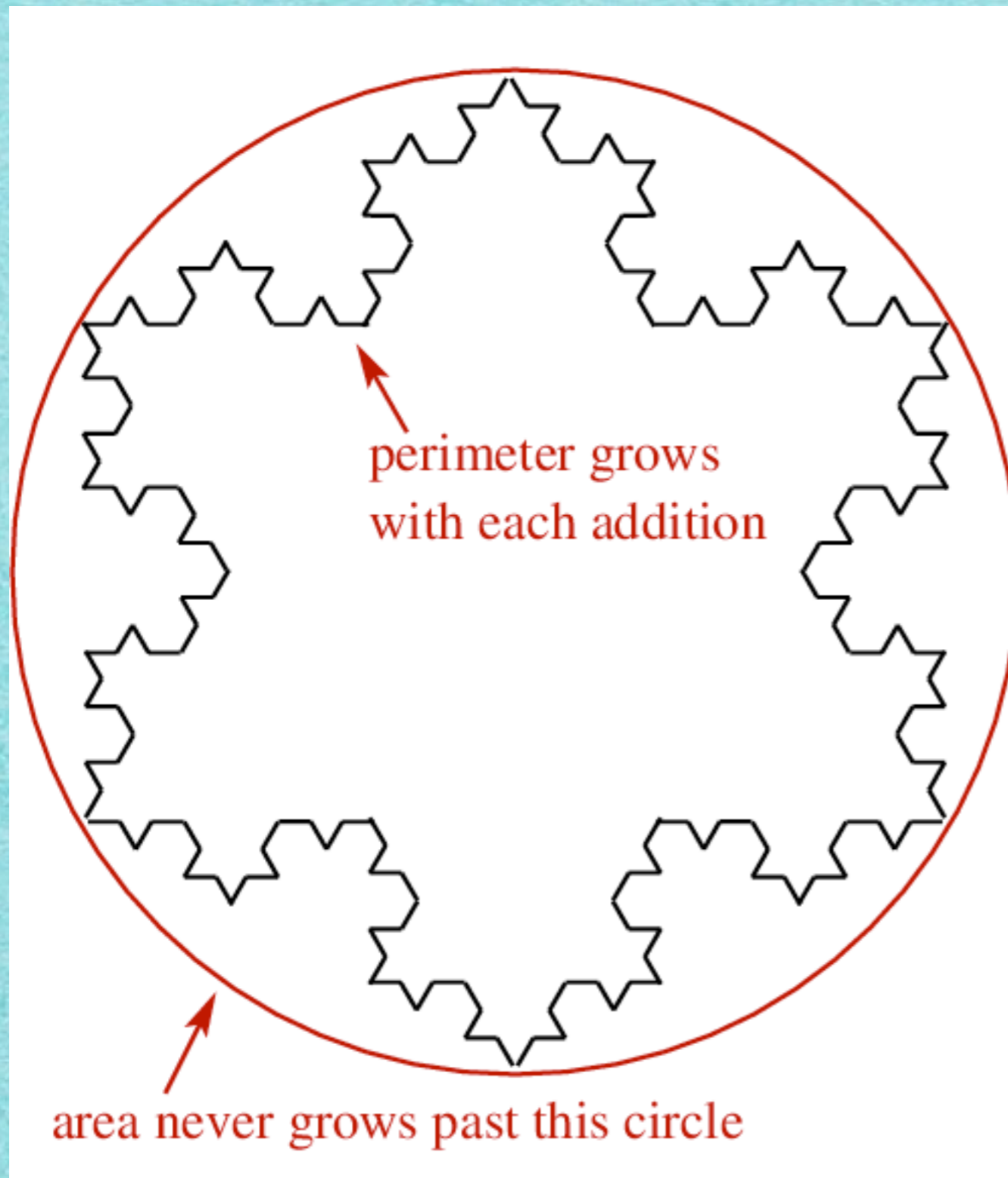
Schneeflockenkurve

(1904)



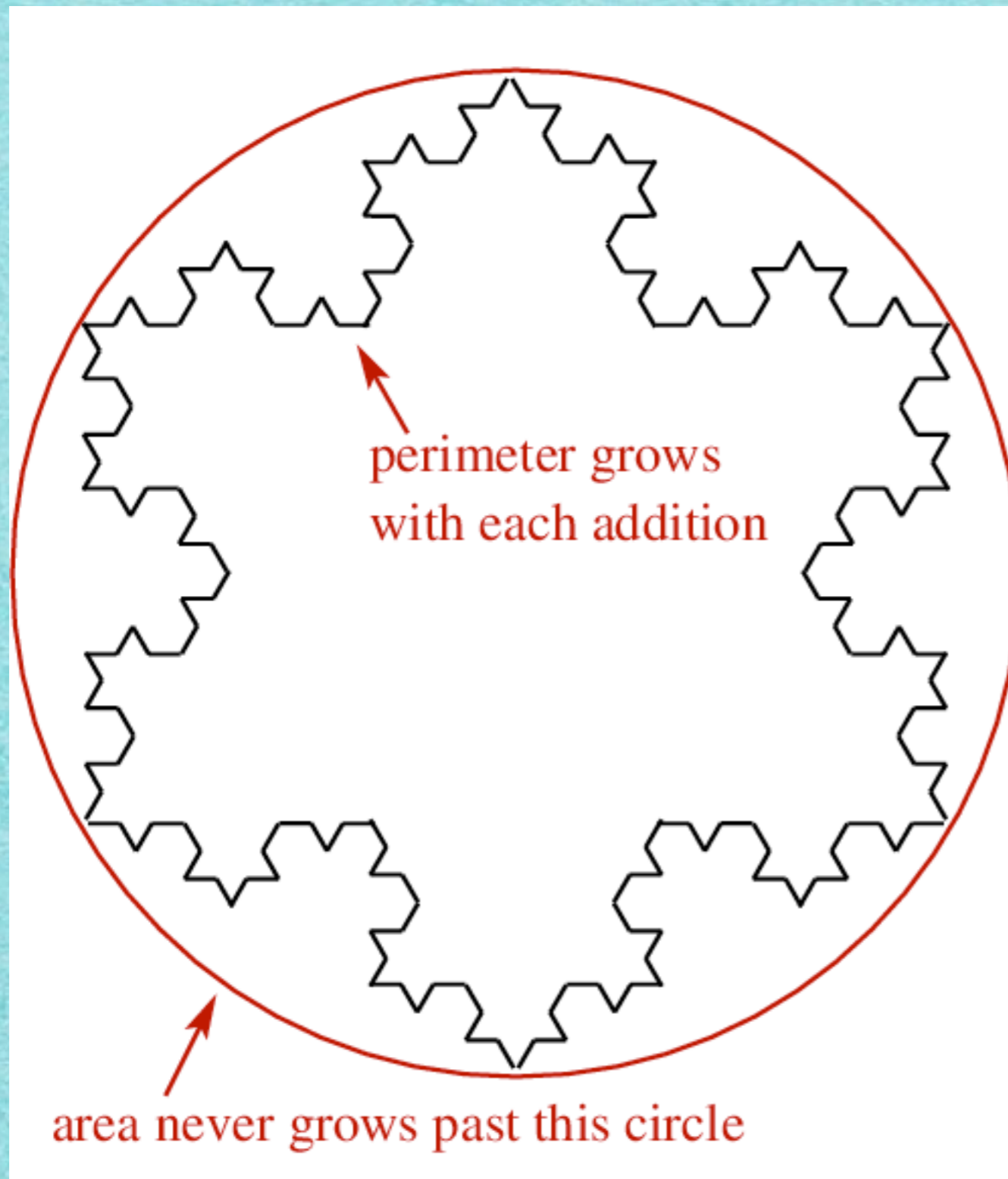
5.5.3 Fraktale

5.5.3 Fraktale

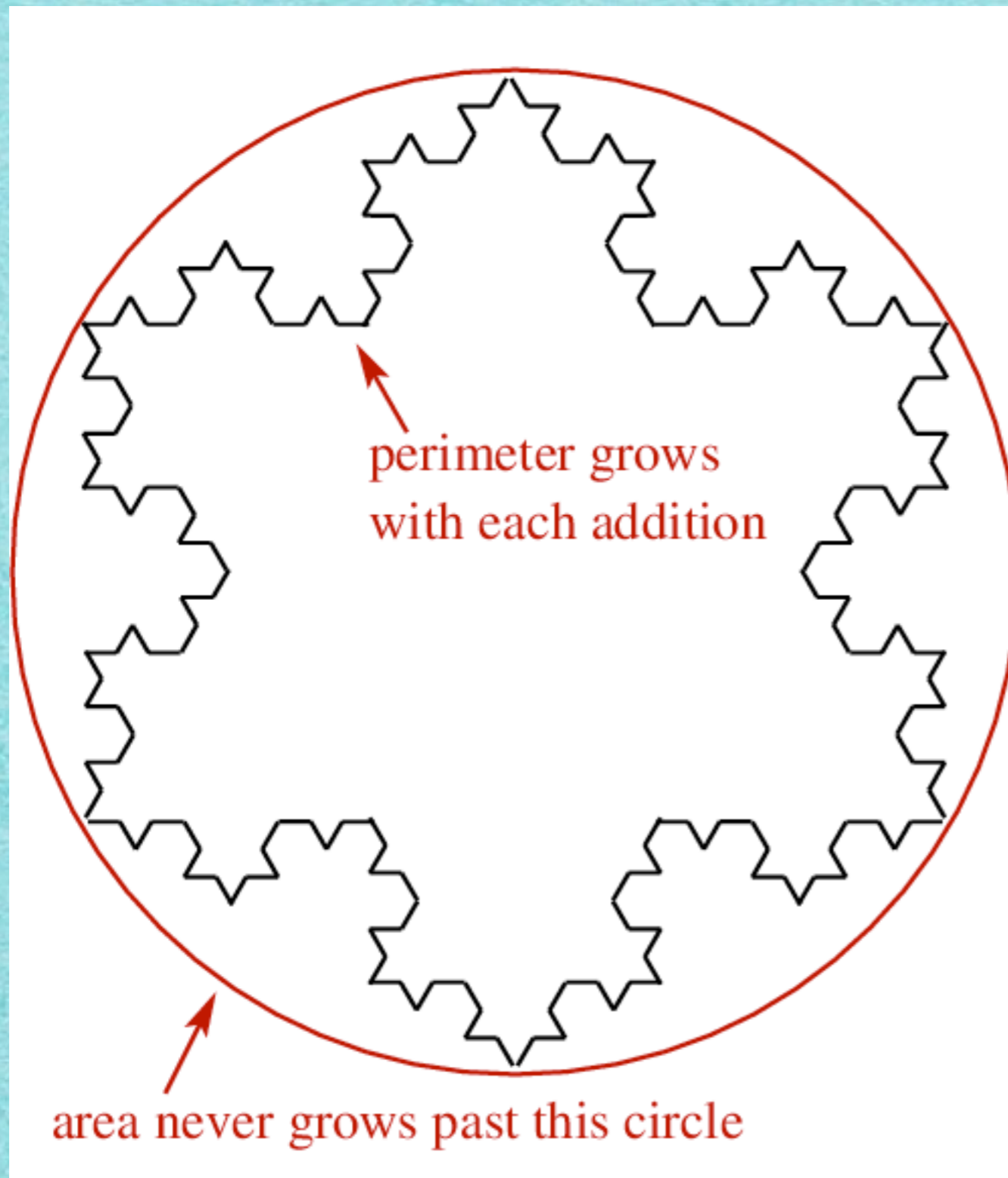


5.5.3 Fraktale

Pro Iteration:
Länge wächst um
Faktor $\frac{4}{3}$



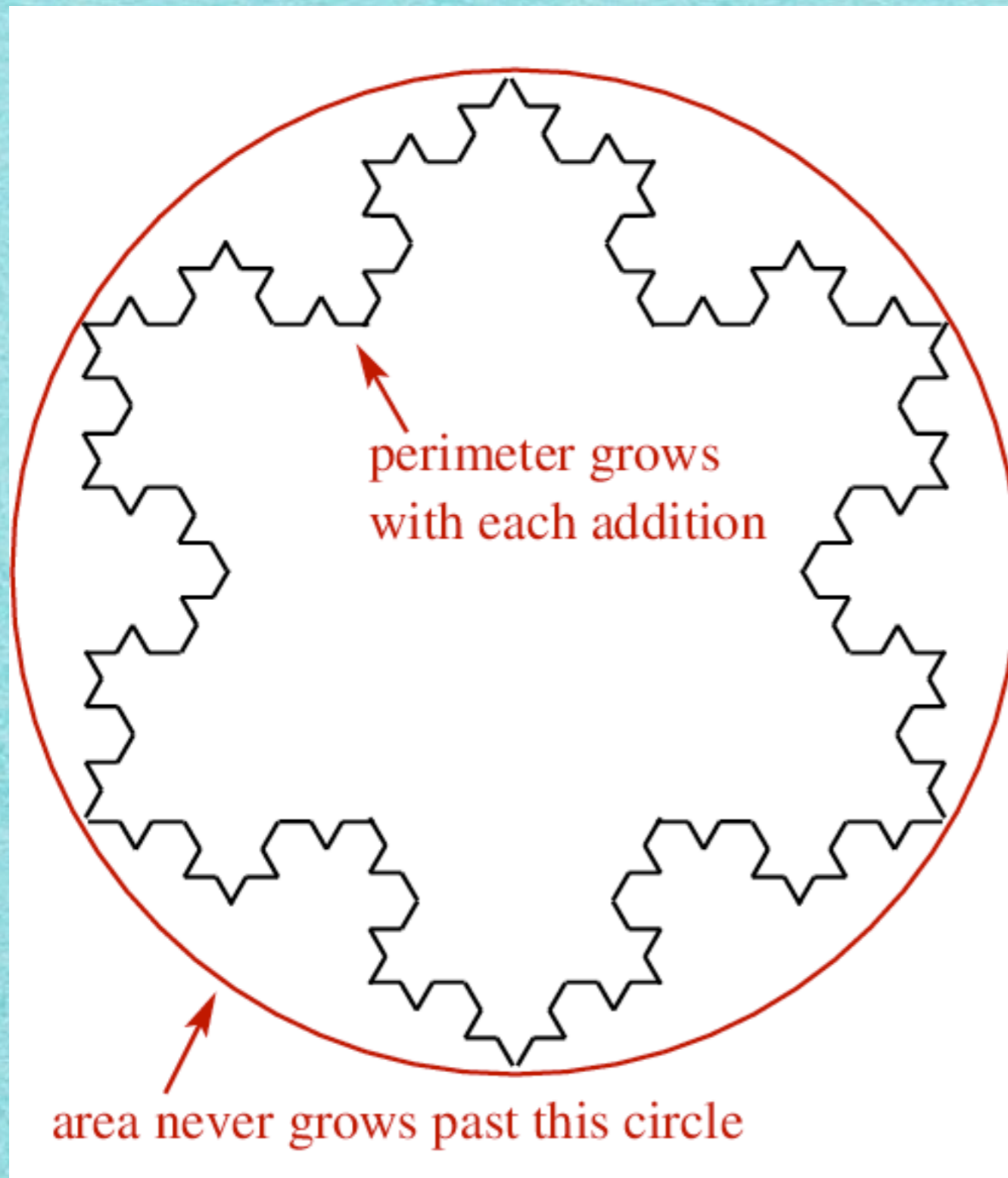
5.5.3 Fraktale



Pro Iteration:
Länge wächst um
Faktor $4/3$

Hausdorff-Dimension
des Randes:
 $\log(4)/\log(3)$
 $= 1.2618595\dots$

5.5.3 Fraktale



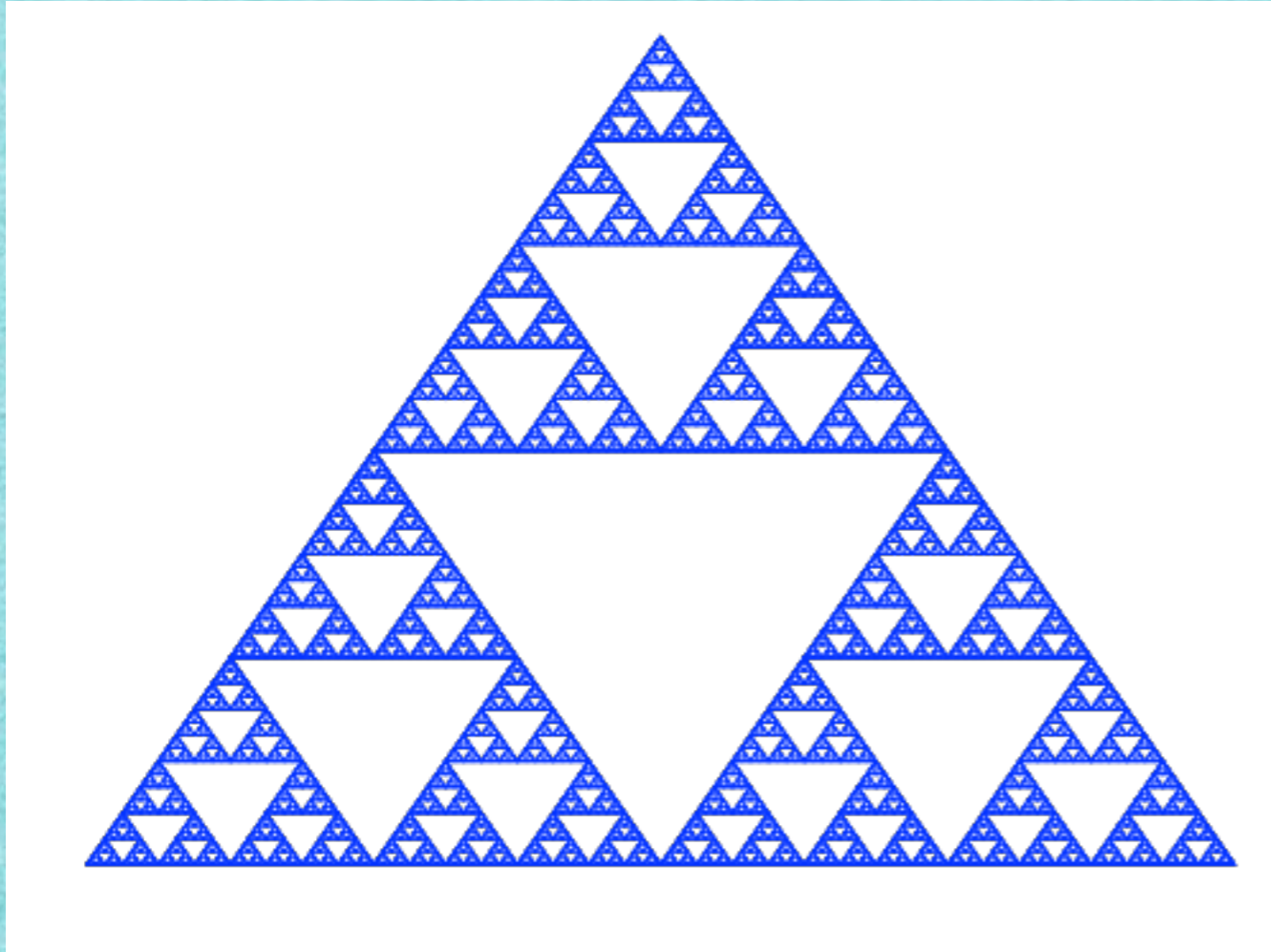
Pro Iteration:
Länge wächst um
Faktor $4/3$

Hausdorff-Dimension
des Randes:
 $\log(4)/\log(3)$
 $= 1.2618595\dots$

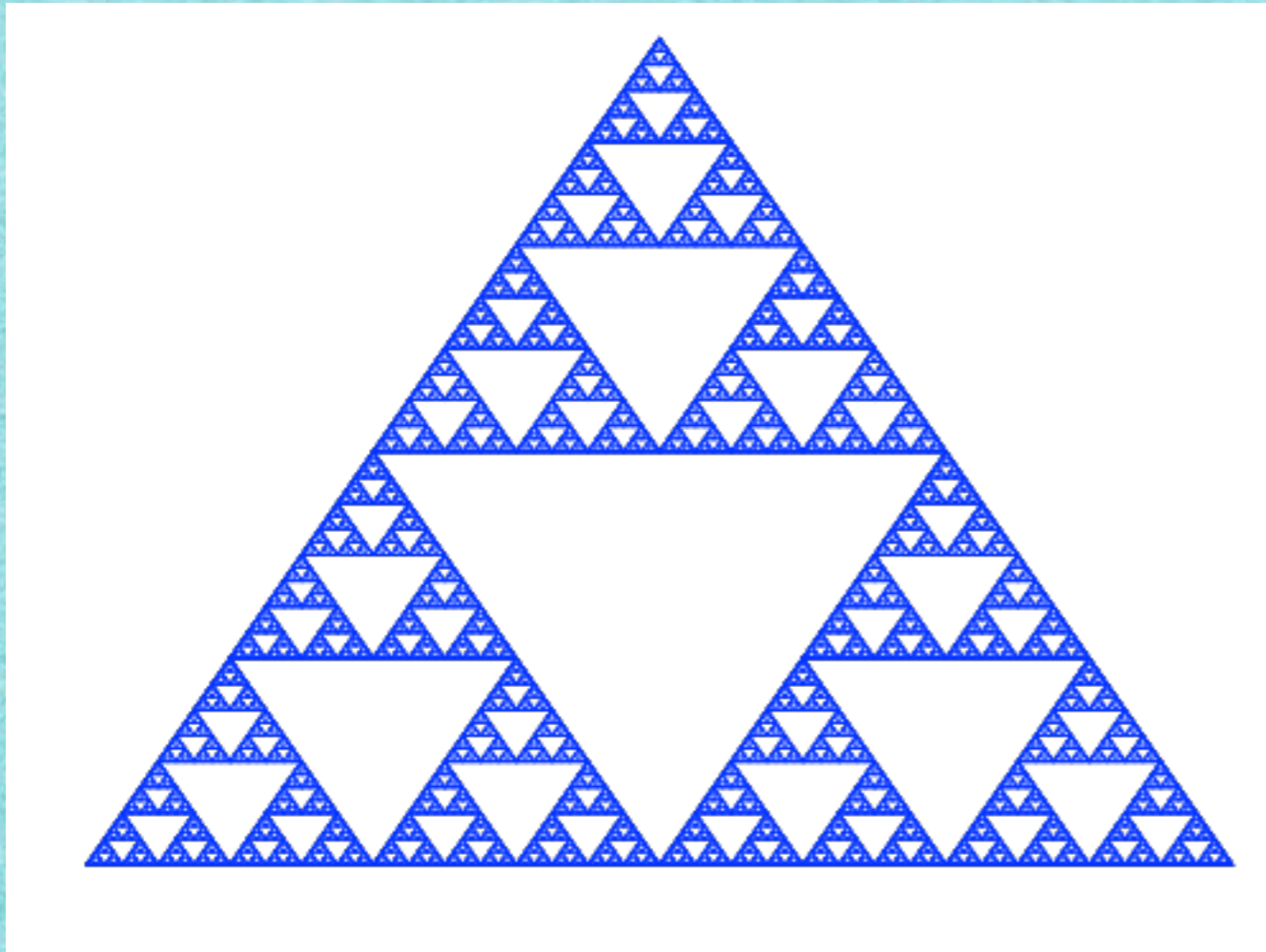
Fläche:
Länge wächst um
Faktor $4/3$

5.5.3 Fraktale

5.5.3 Fraktale

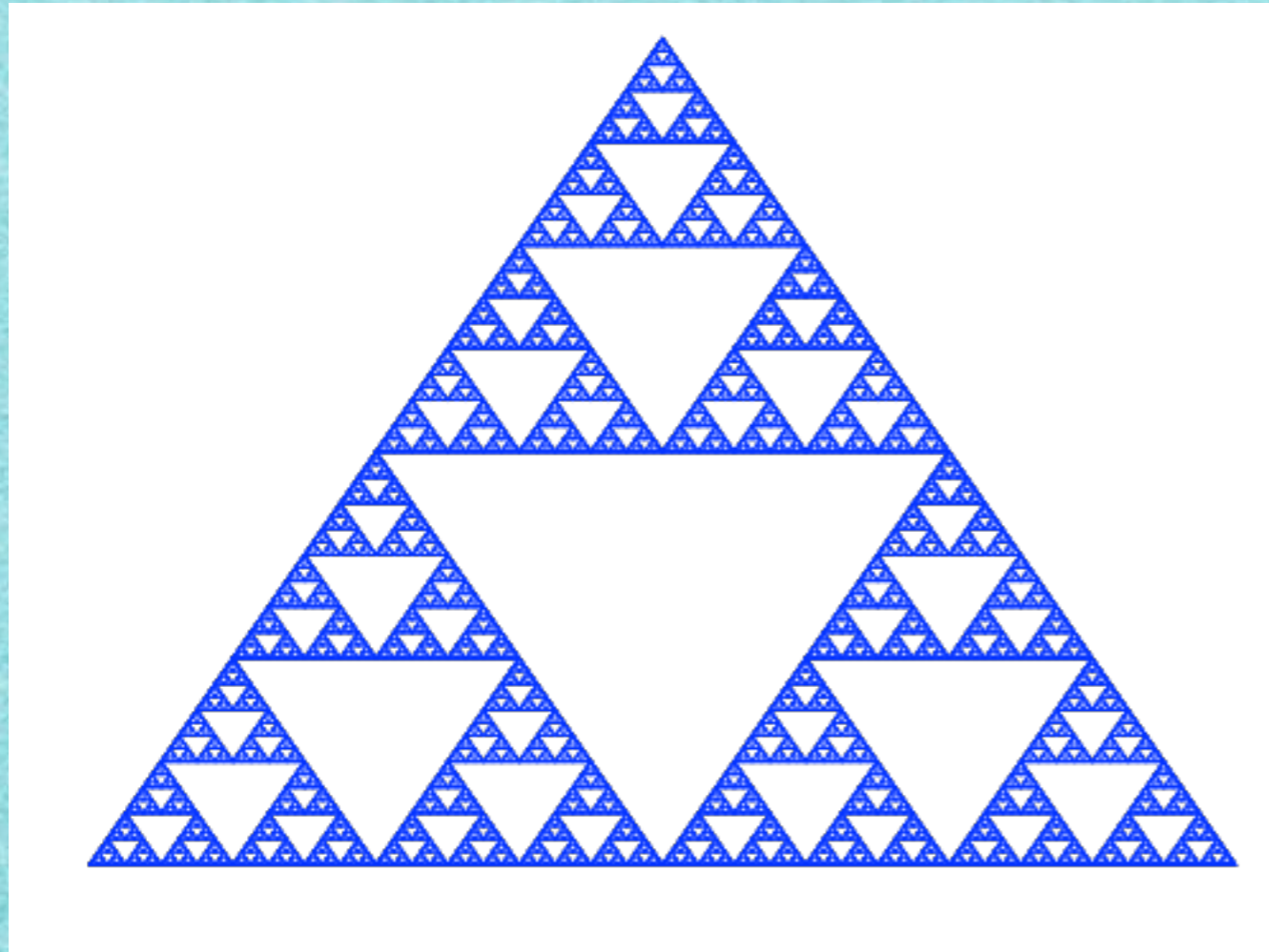


5.5.3 Fraktale



Szierpinski-Dreieck:
Fläche schrumpft um
Faktor $3/4$ pro
Iteration

5.5.3 Fraktale



Szierpinski-Dreieck:
Fläche schrumpft um
Faktor $3/4$ pro
Iteration

Hausdorff-Dimension
der Fläche:
 $\log(3)/\log(2)$
 $= 1.5849625\dots$

5.5.3 Fraktale

5.5.3 Fraktale

**Fraktale in
der Natur:**

5.5.3 Fraktale

**Fraktale in
der Natur:**



5.5.3 Fraktale

**Fraktale in
der Natur:**

Romanesco



5.5.3 Fraktale

**Fraktale in
der Natur:**

5.5.3 Fraktale

**Fraktale in
der Natur:**



5.5.3 Fraktale

**Fraktale in
der Natur:**



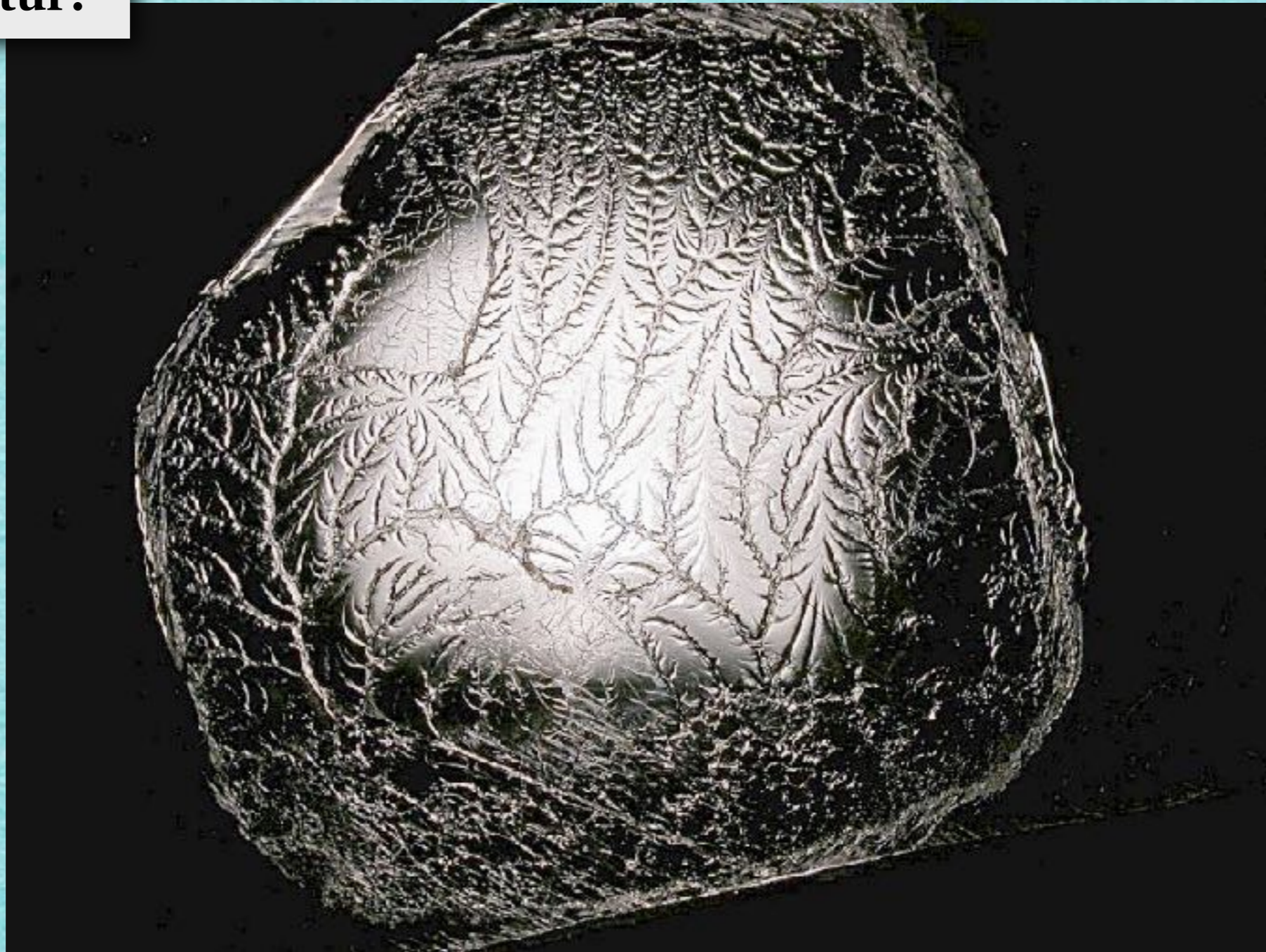
Eiskristalle

5.5.3 Fraktale

**Fraktale in
der Natur:**

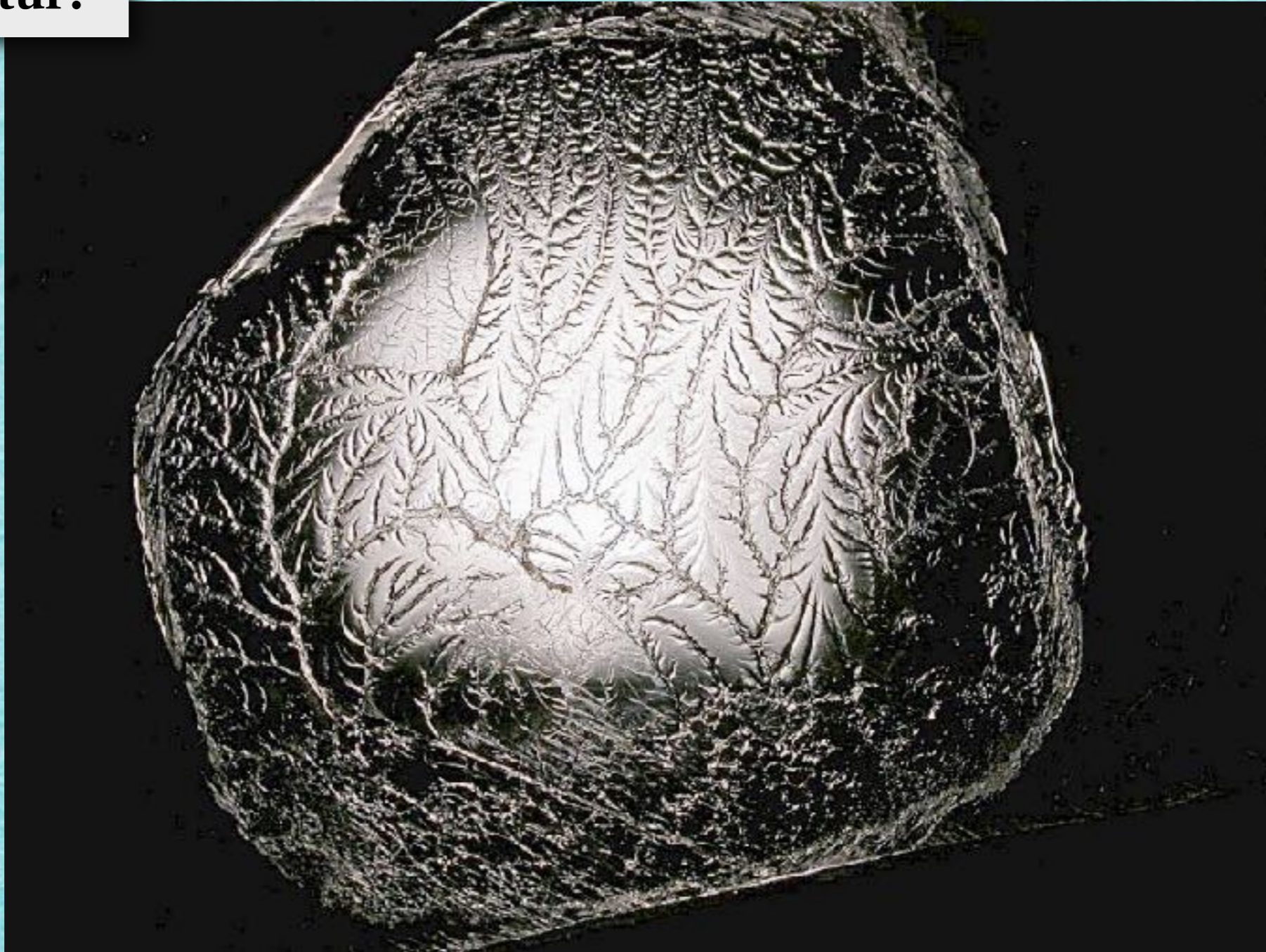
5.5.3 Fraktale

**Fraktale in
der Natur:**



5.5.3 Fraktale

**Fraktale in
der Natur:**



Adhäsionsmuster

5.5.3 Fraktale

**Fraktale in
der Natur:**

5.5.3 Fraktale

**Fraktale in
der Natur:**



5.5.3 Fraktale

Fraktale in
der Natur:



Muster elektrischer Entladung

5.5.3 Fraktale

**Fraktale in
der Natur:**

5.5.3 Fraktale

**Fraktale in
der Natur:**



5.5.3 Fraktale

Fraktale in
der Natur:



Farn

5.5.3 Fraktale

5.5.3 Fraktale

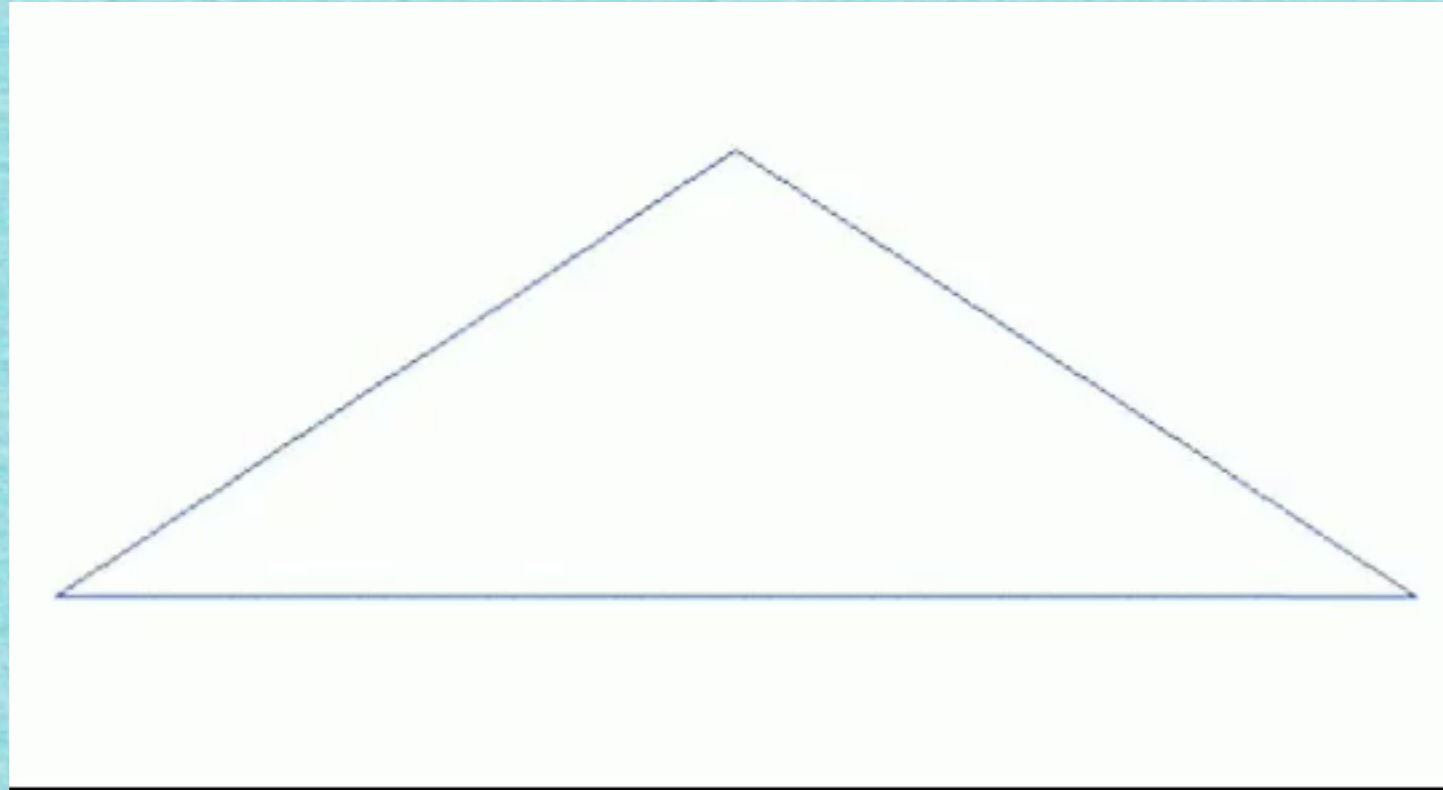


5.5.3 Fraktale

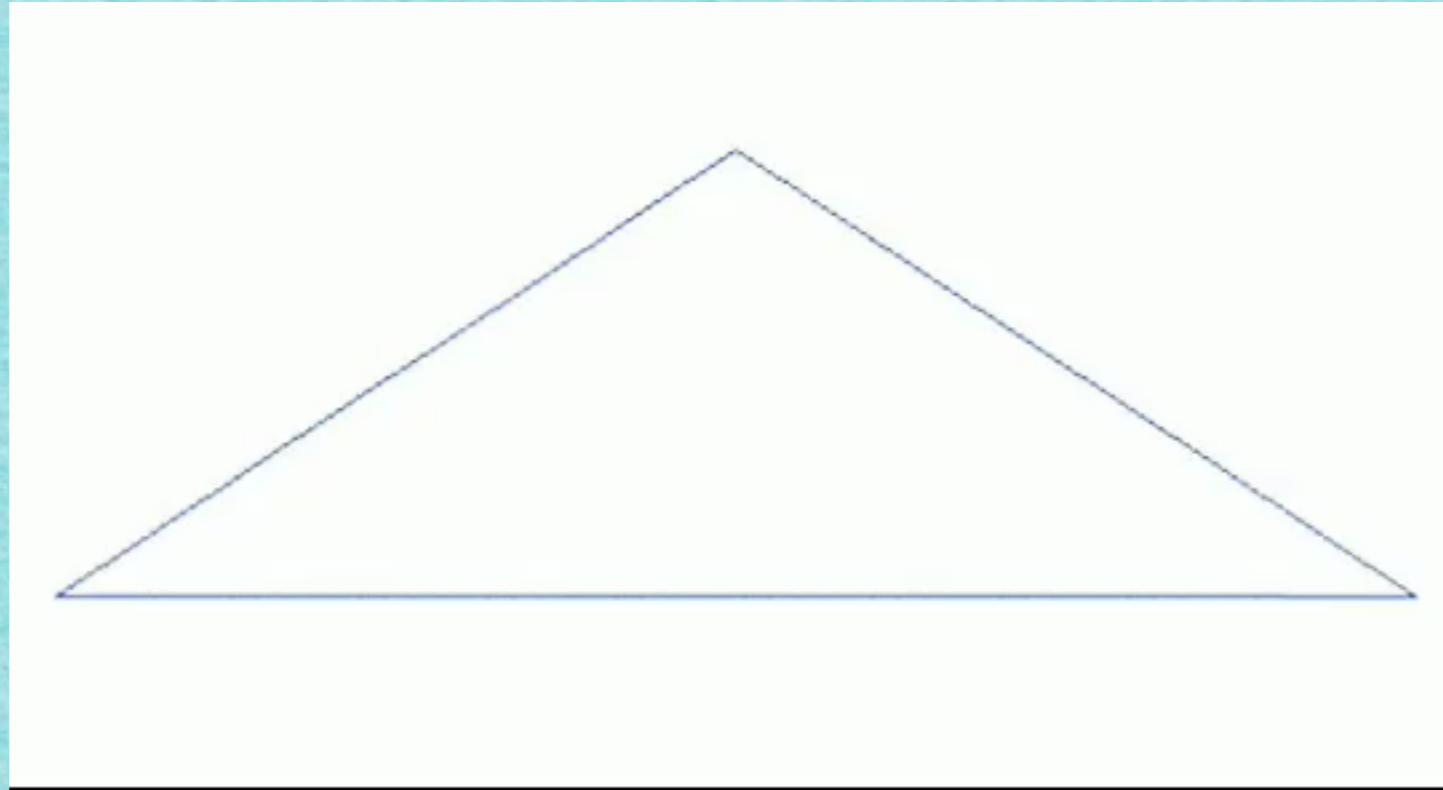


Farn (nicht echt)

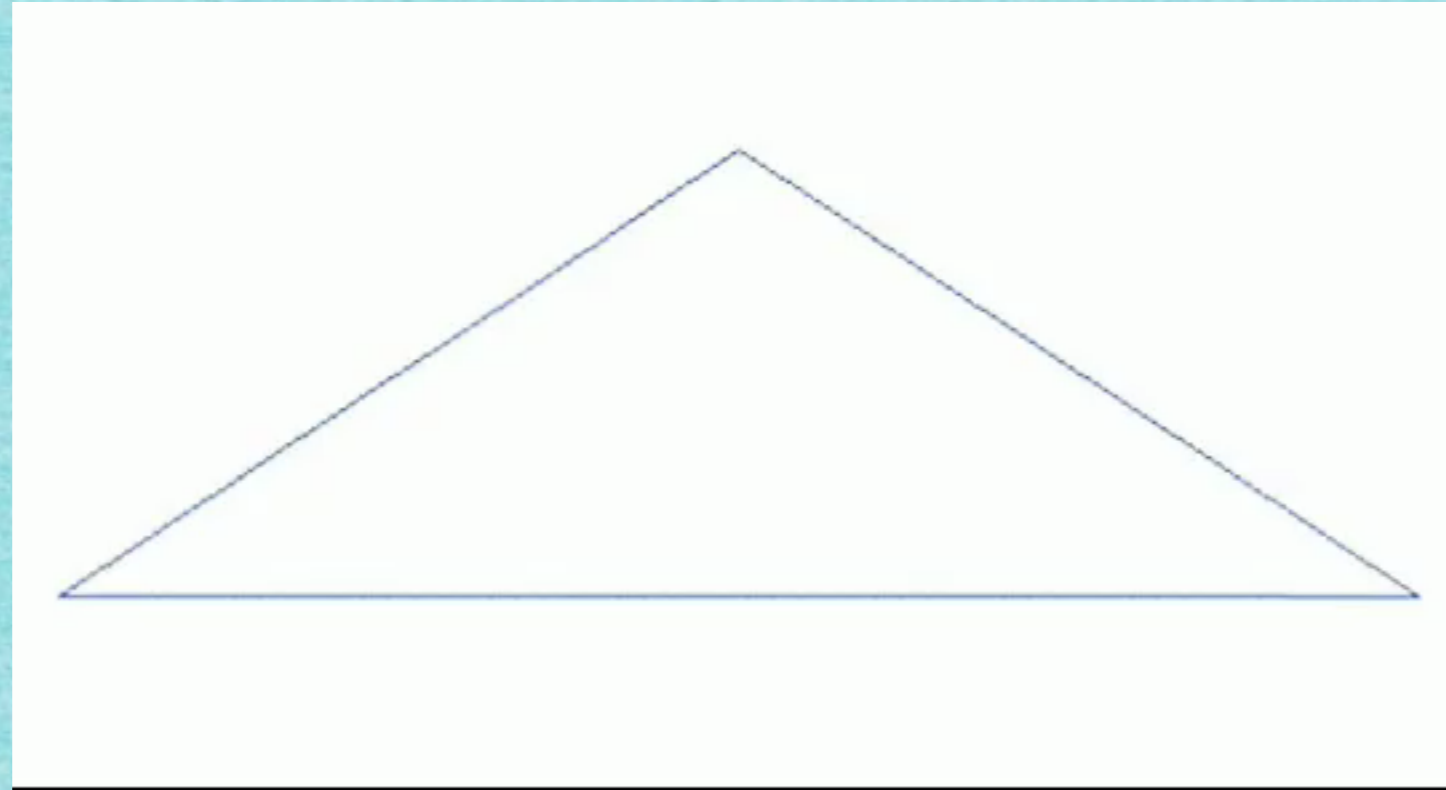
5.5.3 Fraktale



5.5.3 Fraktale



5.5.3 Fraktale



“Clouds are not spheres, mountains are not cones, coastlines are not circles, and bark is not smooth, nor does lightning travel in a straight line.” - Mandelbrot

5.54 Zelluläre Automaten

5.54 Zelluläre Automaten



5.54 Zelluläre Automaten



Stanislaw Ulam
(1909-1984)

5.54 Zelluläre Automaten



Stanislaw Ulam
(1909-1984)



5.54 Zelluläre Automaten



Stanislaw Ulam
(1909-1984)



John von Neumann
(1903-1957)

5.54 Zelluläre Automaten



Stanislaw Ulam
(1909-1984)



John von Neumann
(1903-1957)



5.54 Zelluläre Automaten



Stanislaw Ulam
(1909-1984)



John von Neumann
(1903-1957)



0 0 0 1 1 1 1 0

5.54 Zelluläre Automaten



Stanislaw Ulam
(1909-1984)



John von Neumann
(1903-1957)



0 0 0 1 1 1 1 0

“Rule 30”
 $(0*128+0*64+0*32+1*16+1*8+1*4+1*2+0*1=30)$

5.54 Zelluläre Automaten



Stanislaw Ulam
(1909-1984)

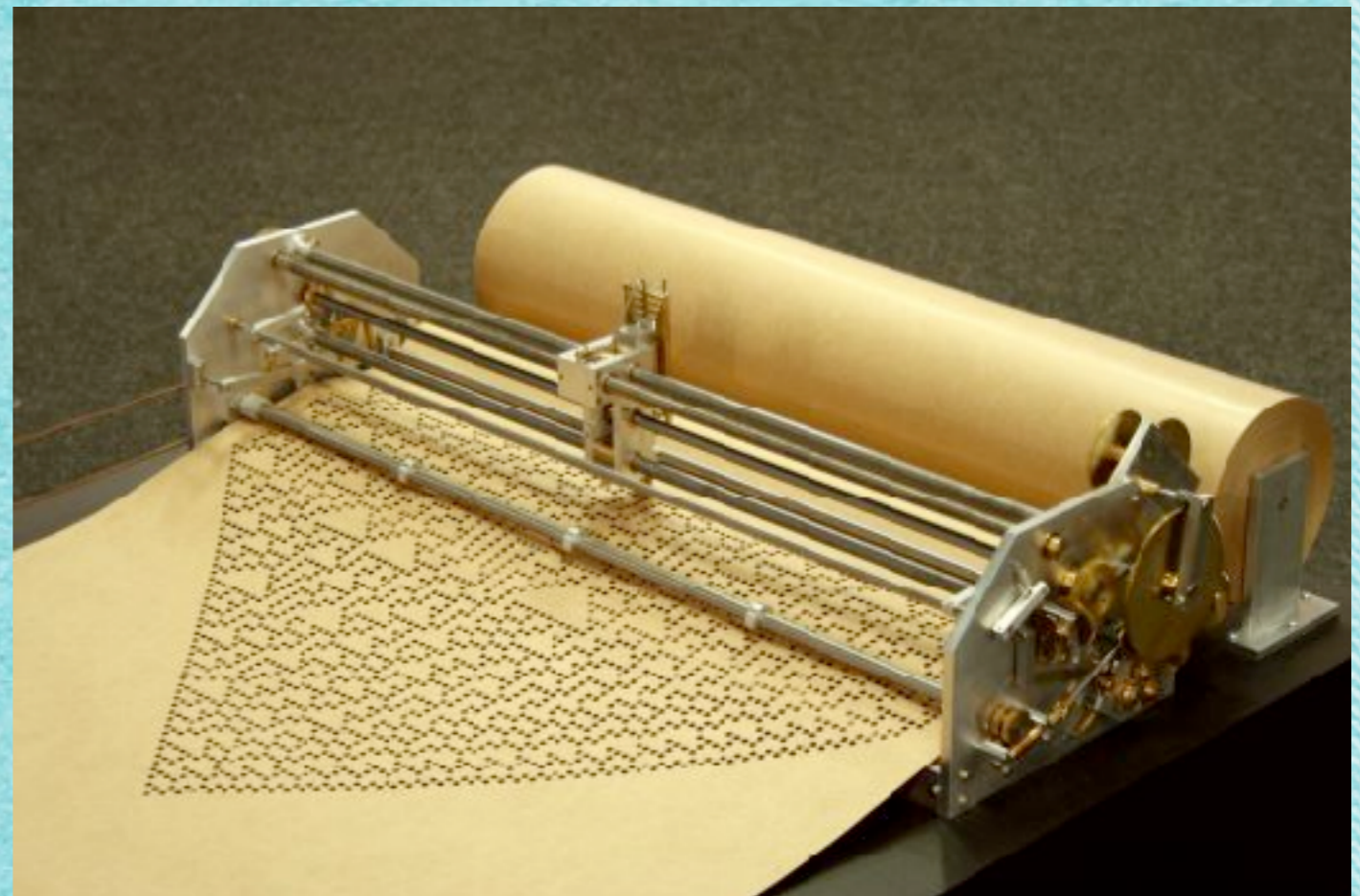


John von Neumann
(1903-1957)



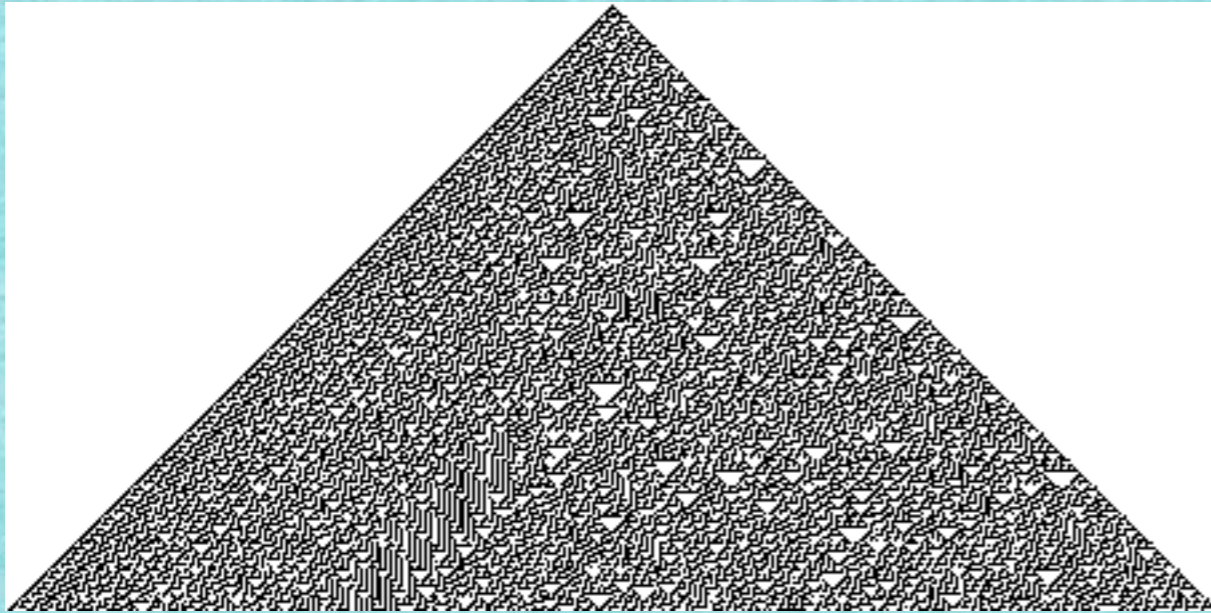
0 0 0 1 1 1 1 0

“Rule 30”
 $(0*128+0*64+0*32+1*16+1*8+1*4+1*2+0*1=30)$

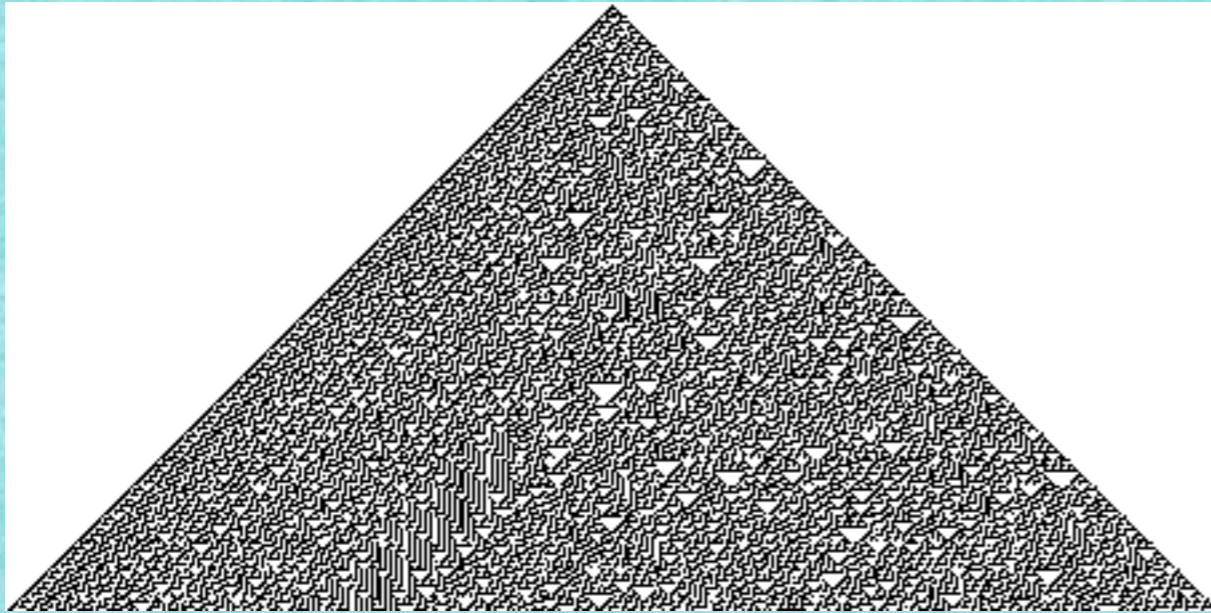


5.54 Zelluläre Automaten

5.54 Zelluläre Automaten

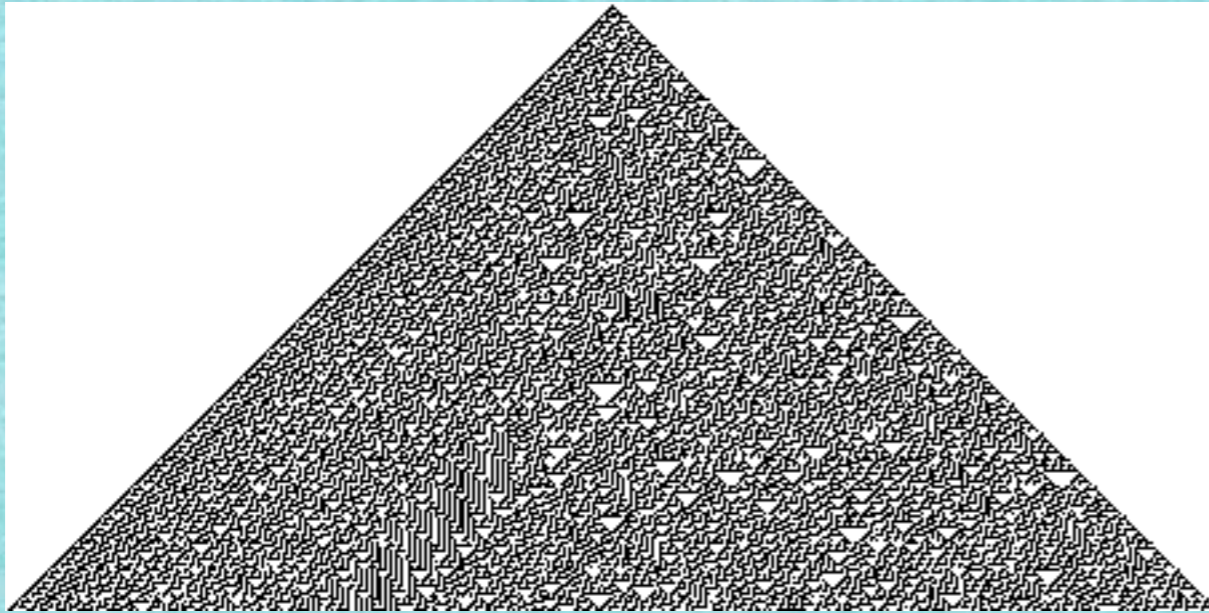


5.54 Zelluläre Automaten



Rule 30

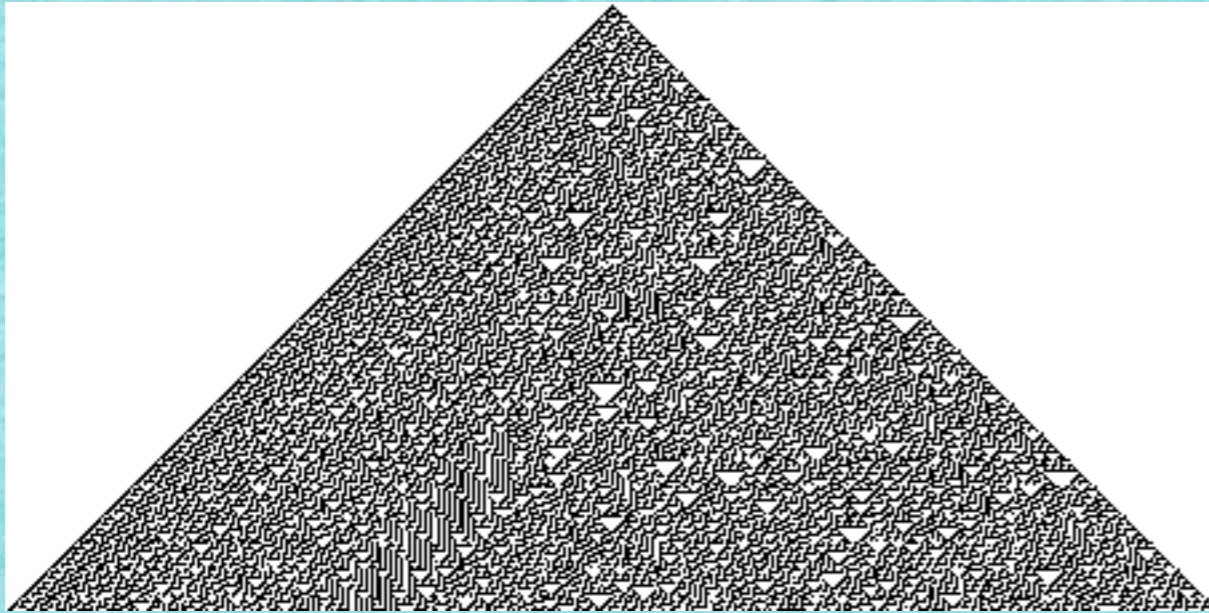
5.54 Zelluläre Automaten



Rule 30



5.54 Zelluläre Automaten



Rule 30



Kegelschnecke

5.54 Zelluläre Automaten

5.54 Zelluläre Automaten



5.54 Zelluläre Automaten

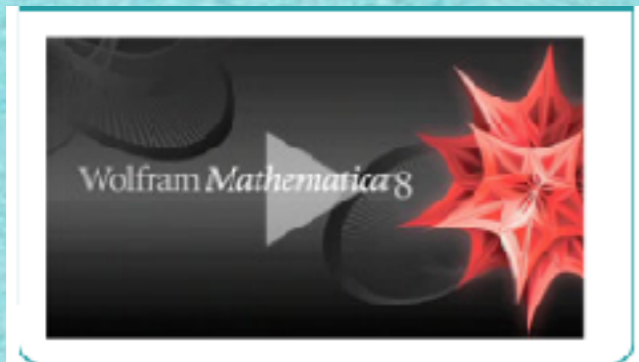


Stephen Wolfram
(1959-)

5.54 Zelluläre Automaten



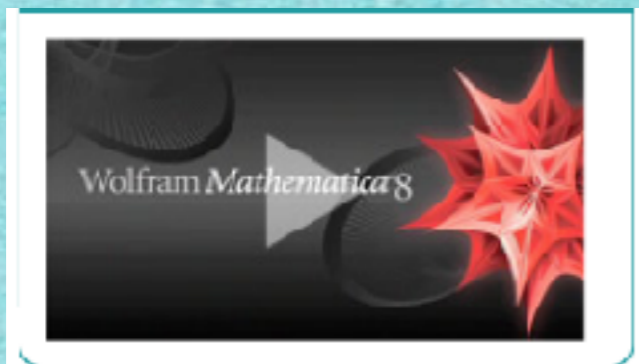
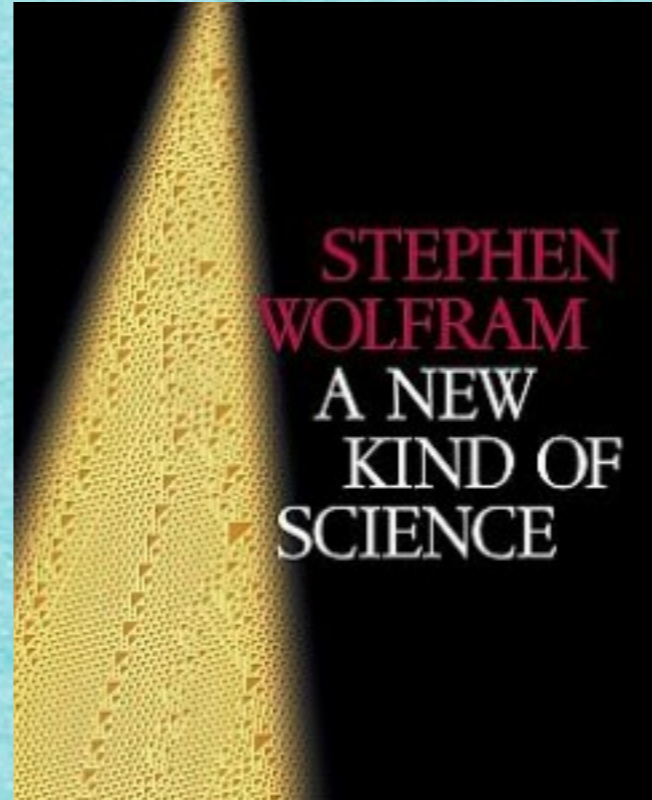
Stephen Wolfram
(1959-)



5.54 Zelluläre Automaten



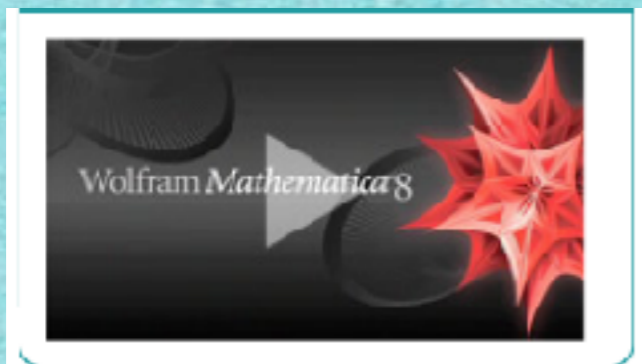
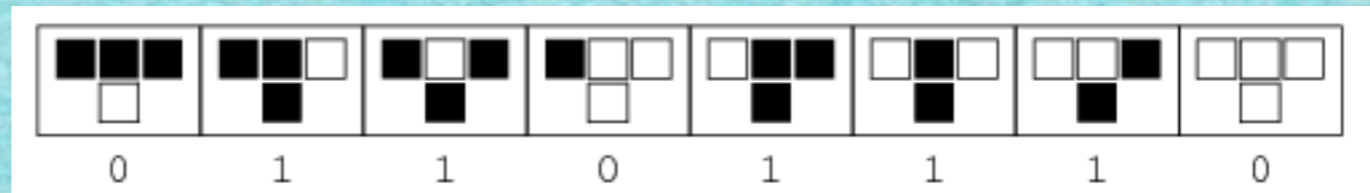
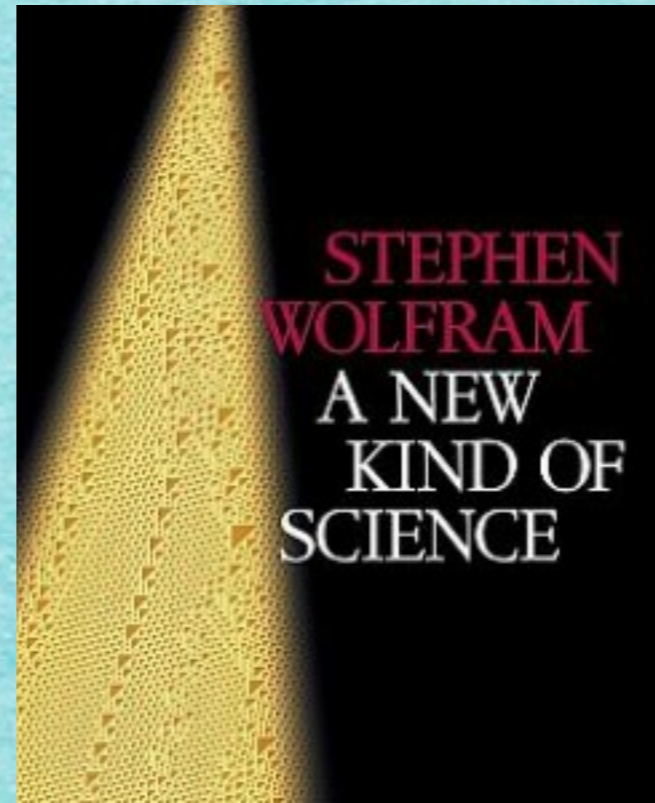
Stephen Wolfram
(1959-)



5.54 Zelluläre Automaten



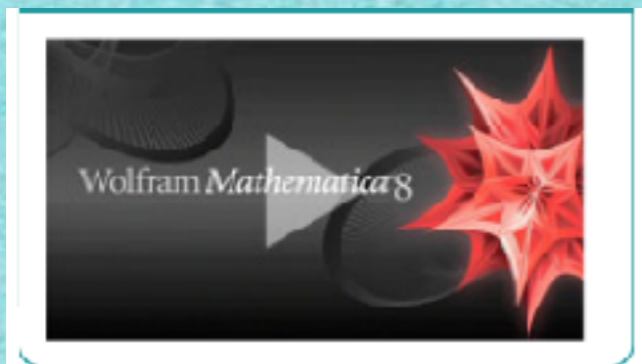
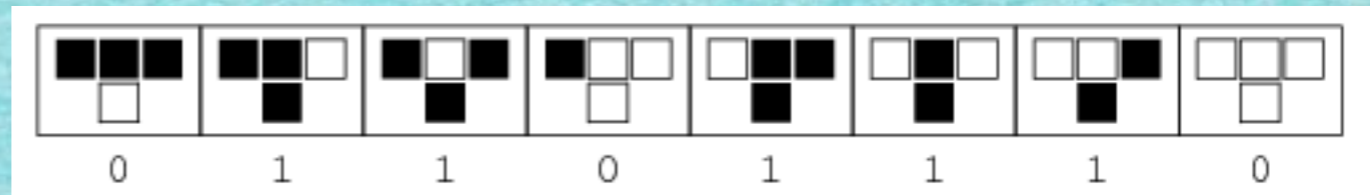
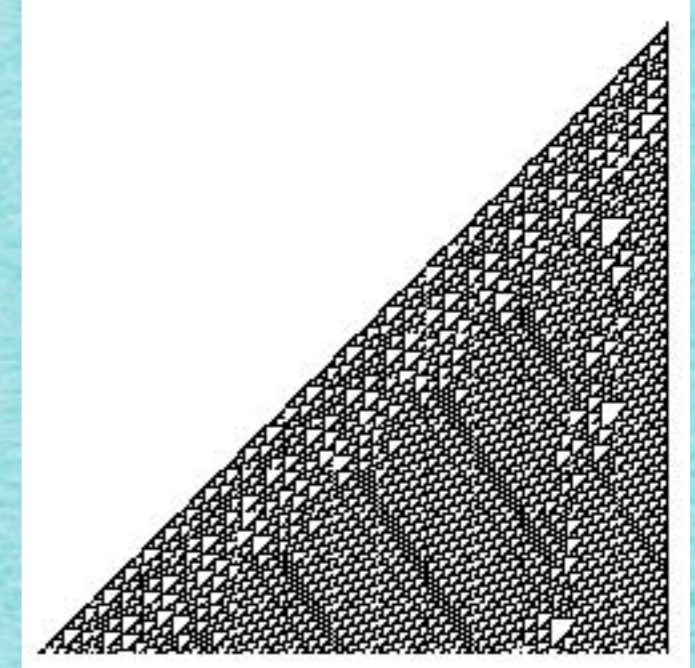
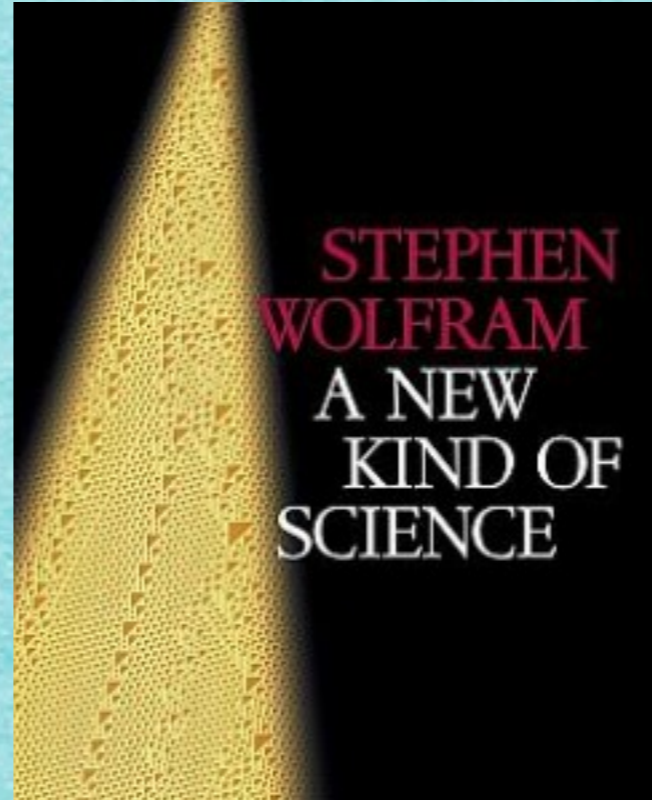
Stephen Wolfram
(1959-)



5.54 Zelluläre Automaten



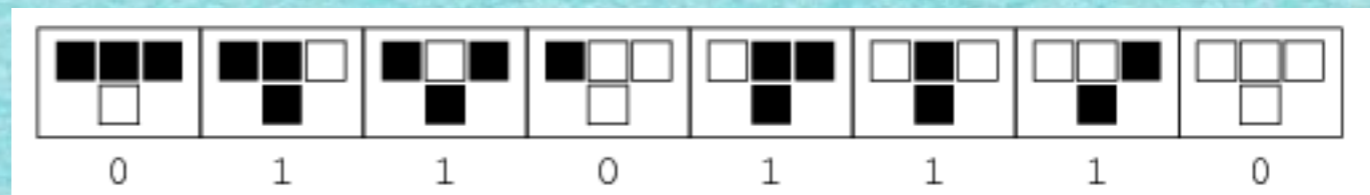
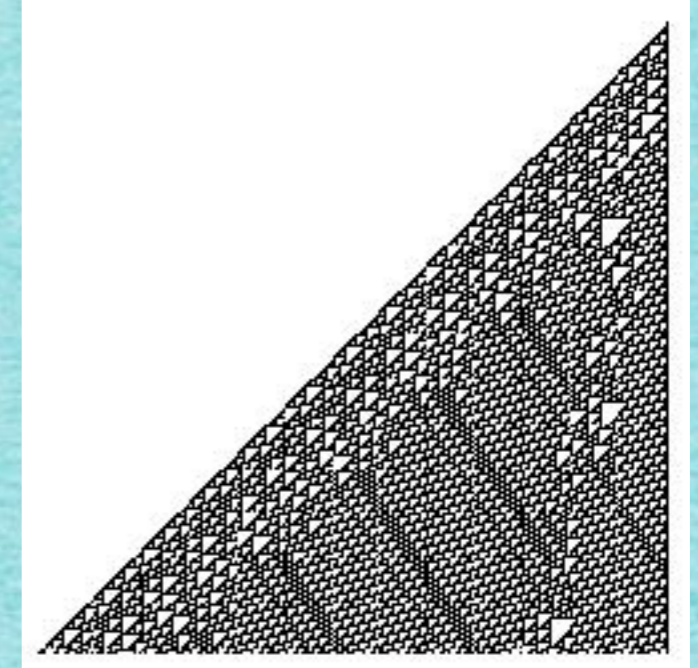
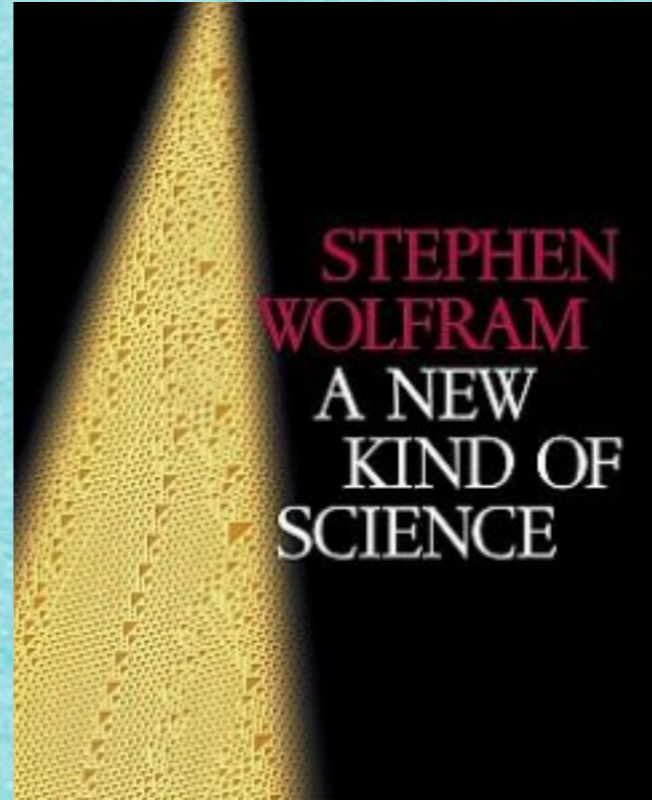
Stephen Wolfram
(1959-)



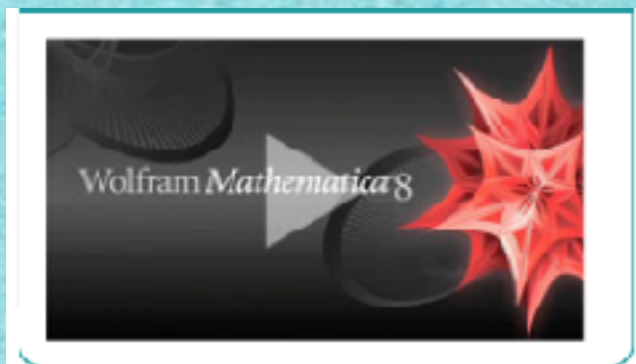
5.54 Zelluläre Automaten



Stephen Wolfram
(1959-)



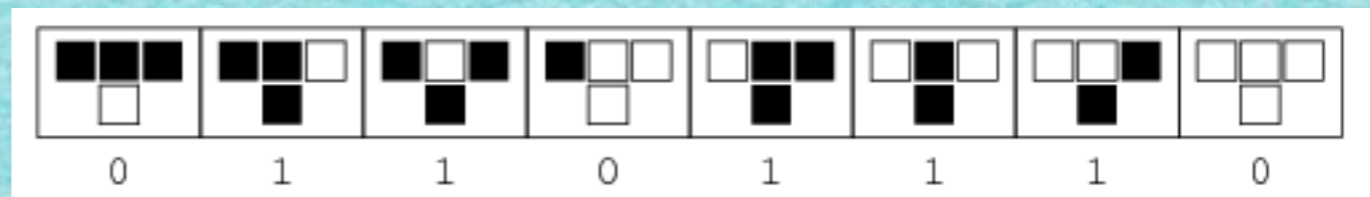
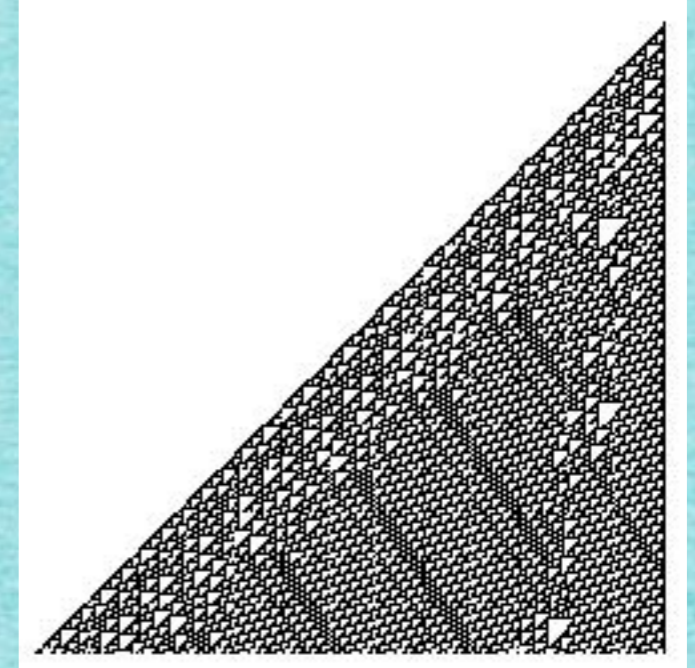
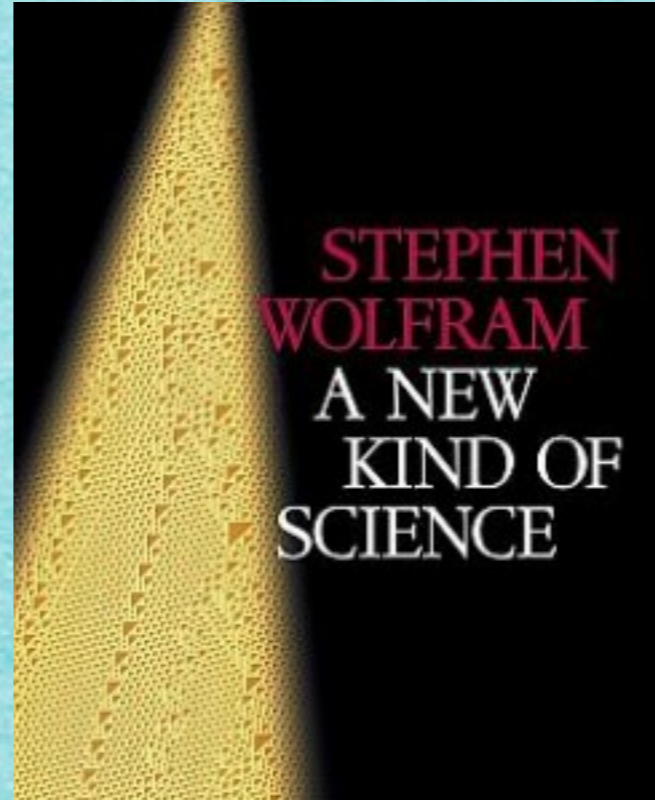
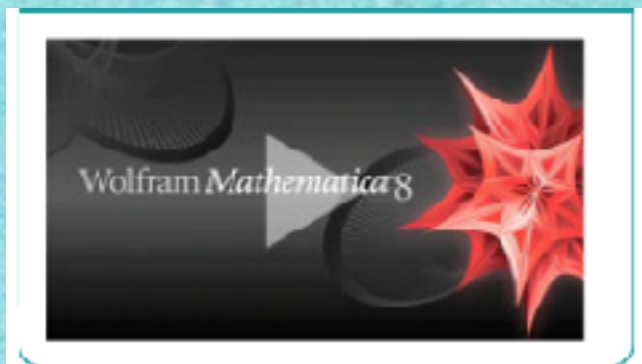
Rule 110



5.54 Zelluläre Automaten



Stephen Wolfram
(1959-)



Rule 110

Matthew Cook (1998):
Rule 110 ist "universell"

5.54 Zelluläre Automaten

5.54 Zelluläre Automaten



5.54 Zelluläre Automaten



John Conway
(1937-2020)

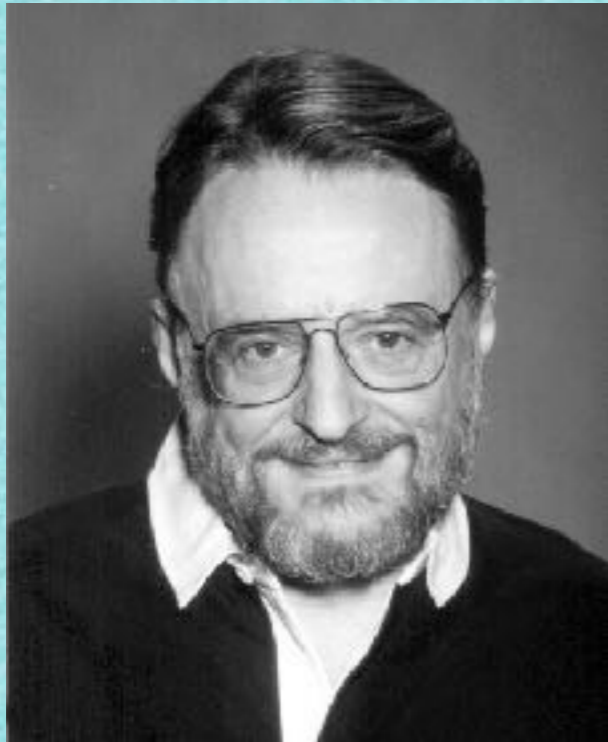
5.54 Zelluläre Automaten

Game of Life:



John Conway
(1937-2020)

5.54 Zelluläre Automaten

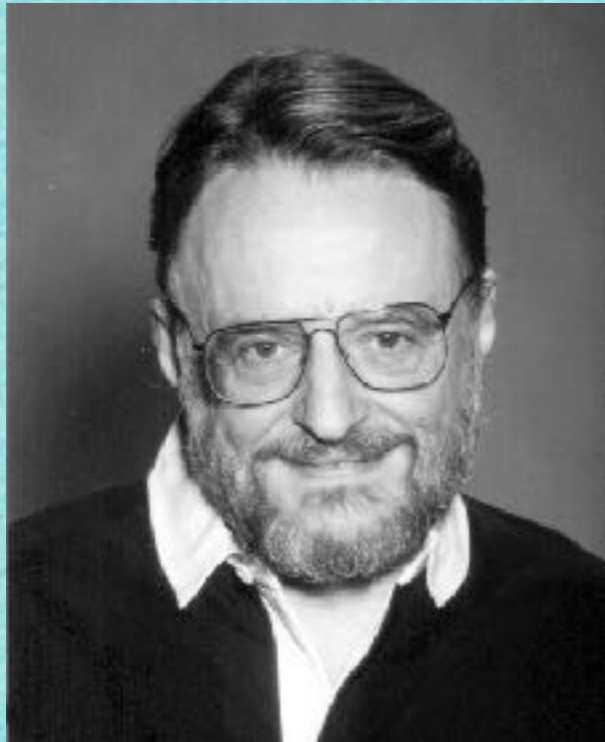


John Conway
(1937-2020)

Game of Life:

(1970)

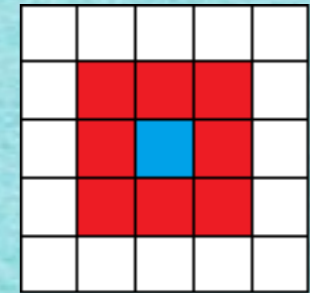
5.54 Zelluläre Automaten



John Conway
(1937-2020)

Game of Life:

(1970)



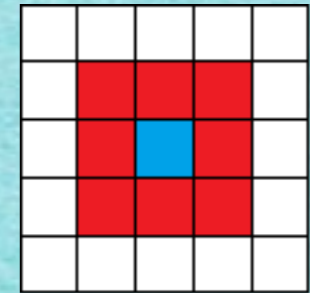
5.54 Zelluläre Automaten



John Conway
(1937-2020)

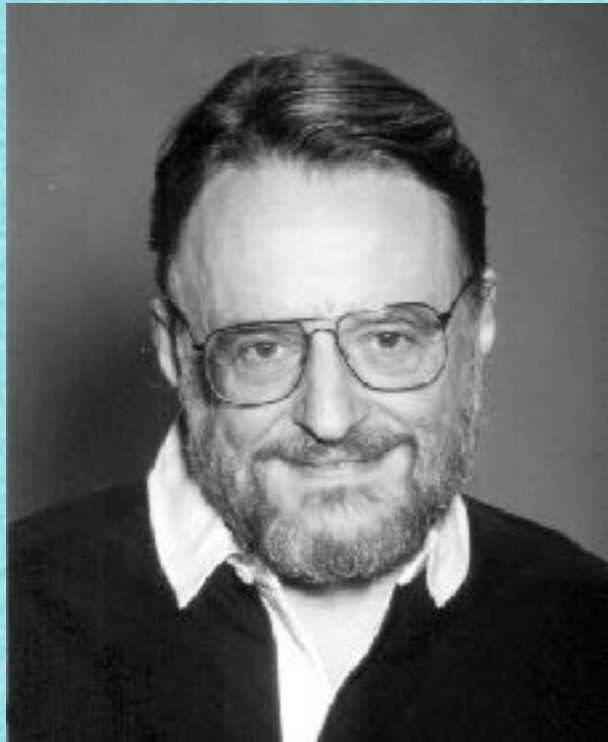
Game of Life:

(1970)



A. Jede Zelle lebt oder ist tot.

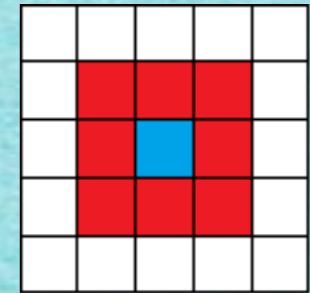
5.54 Zelluläre Automaten



John Conway
(1937-2020)

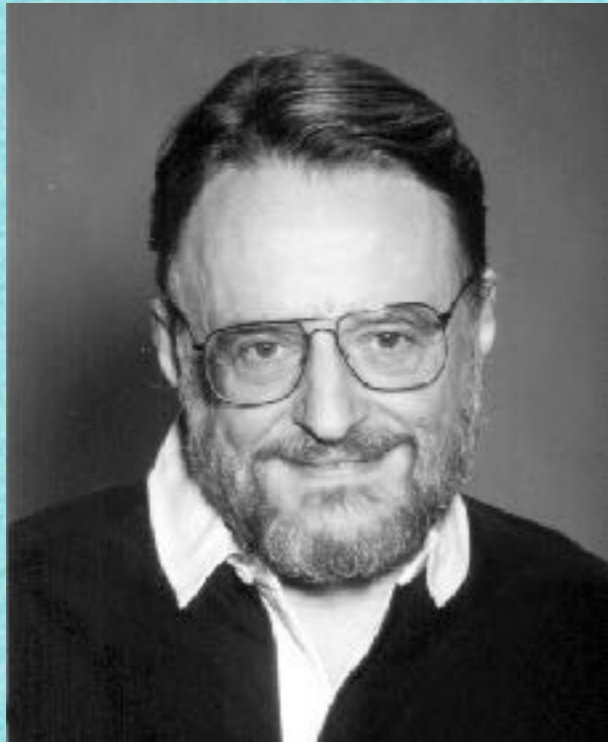
Game of Life:

(1970)



- A. Jede Zelle lebt oder ist tot.
- B. Jede Zelle hat 8 Nachbarn.

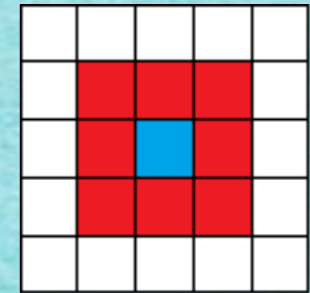
5.54 Zelluläre Automaten



John Conway
(1937-2020)

Game of Life:

(1970)

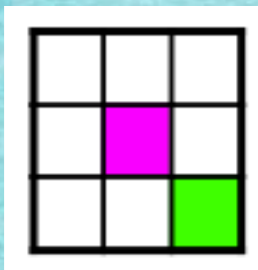


- A. Jede Zelle lebt oder ist tot.
- B. Jede Zelle hat 8 Nachbarn.

5.54 Zelluläre Automaten

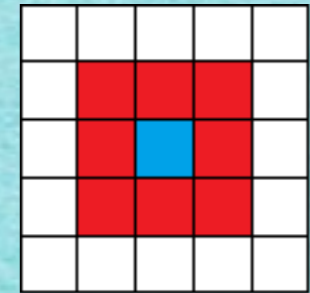


John Conway
(1937-2020)



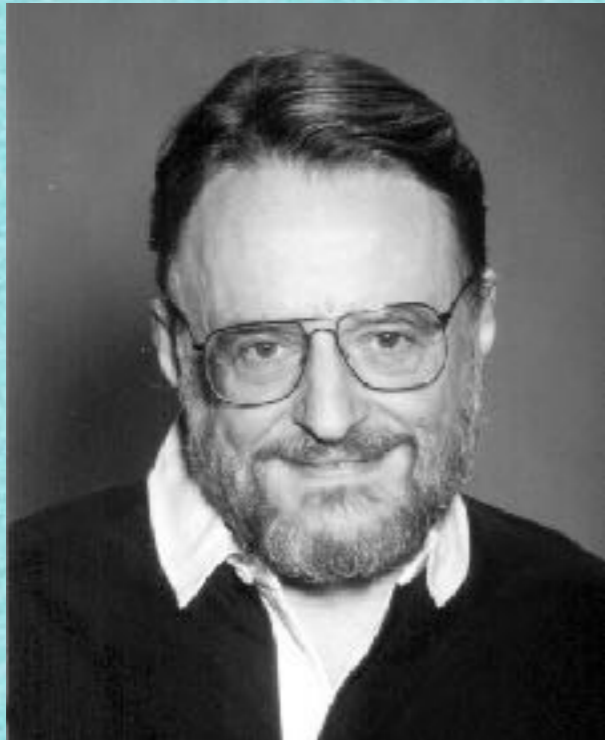
Game of Life:

(1970)

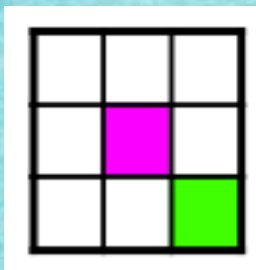


- A. Jede Zelle lebt oder ist tot.
- B. Jede Zelle hat 8 Nachbarn.

5.54 Zelluläre Automaten

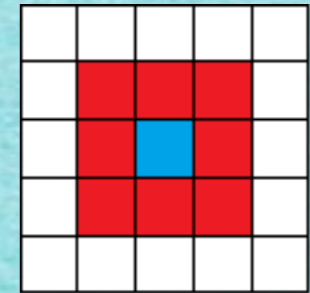


John Conway
(1937-2020)



Game of Life:

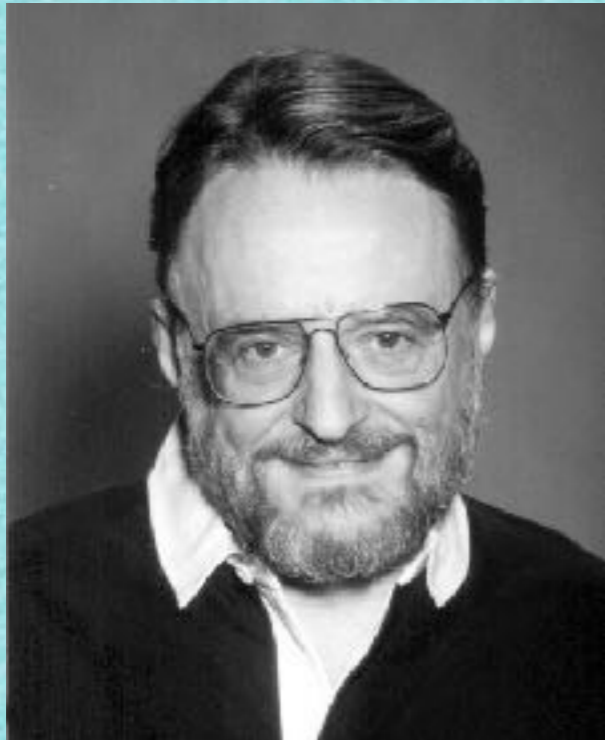
(1970)



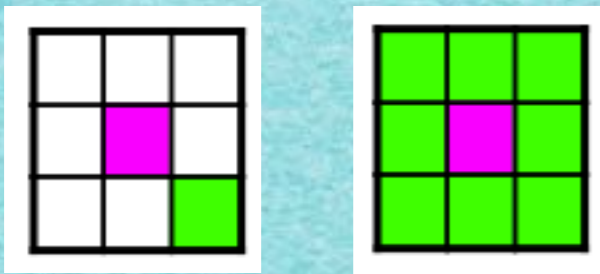
- A. Jede Zelle lebt oder ist tot.
- B. Jede Zelle hat 8 Nachbarn.

1. Eine lebende Zelle mit weniger als zwei lebenden Nachbarn stirbt.

5.54 Zelluläre Automaten

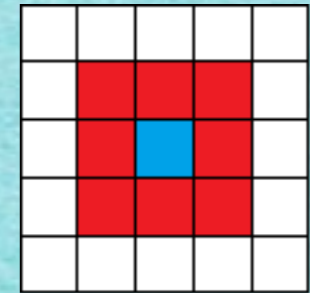


John Conway
(1937-2020)



Game of Life:

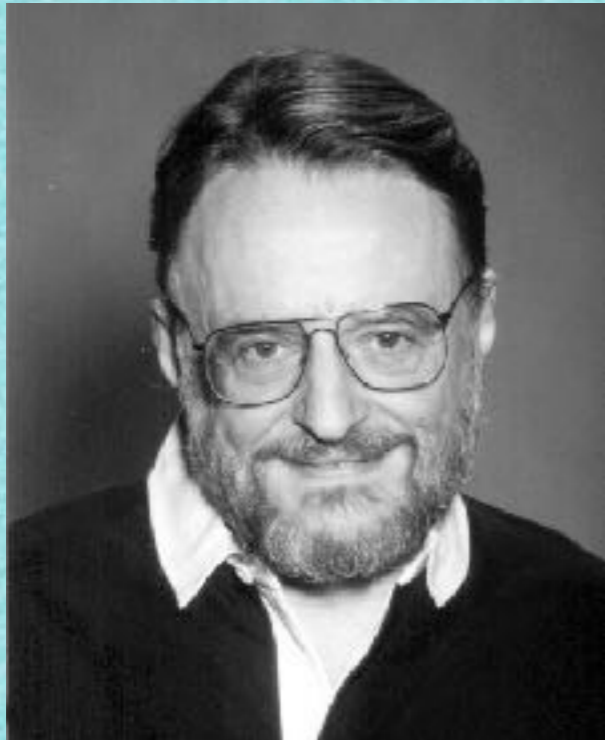
(1970)



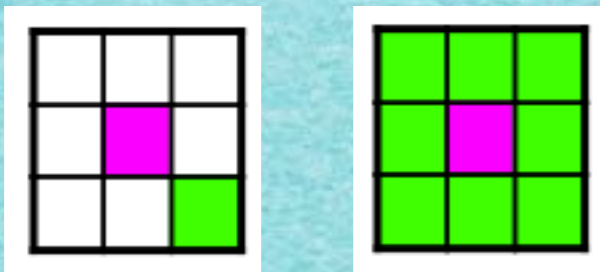
- A. Jede Zelle lebt oder ist tot.
- B. Jede Zelle hat 8 Nachbarn.

1. Eine lebende Zelle mit weniger als zwei lebenden Nachbarn stirbt.

5.54 Zelluläre Automaten

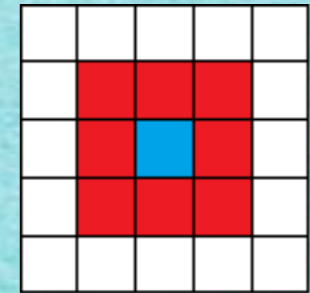


John Conway
(1937-2020)



Game of Life:

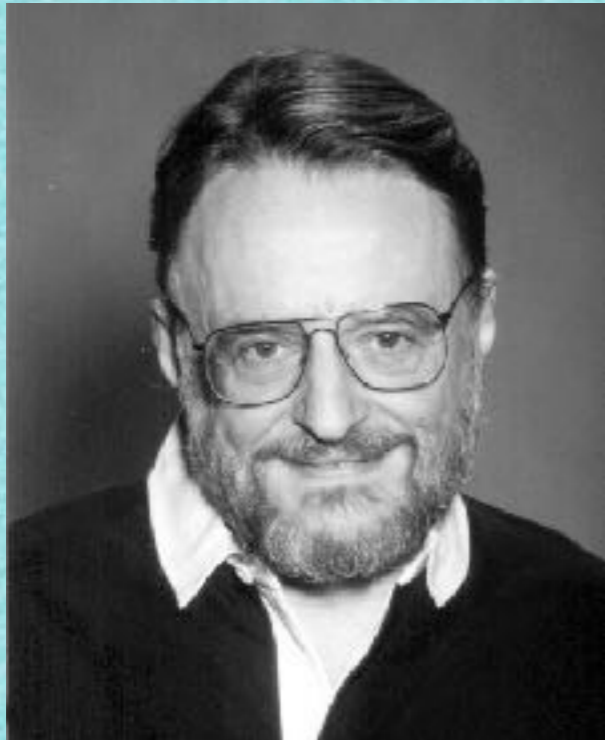
(1970)



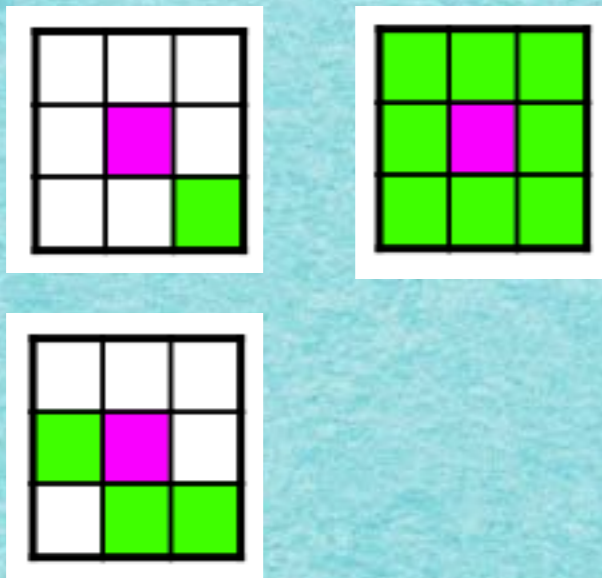
- A. Jede Zelle lebt oder ist tot.
- B. Jede Zelle hat 8 Nachbarn.

1. Eine lebende Zelle mit weniger als zwei lebenden Nachbarn stirbt.
2. Eine lebende Zelle mit mehr als drei lebenden Nachbarn stirbt.

5.54 Zelluläre Automaten

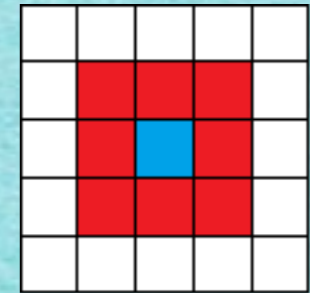


John Conway
(1937-2020)



Game of Life:

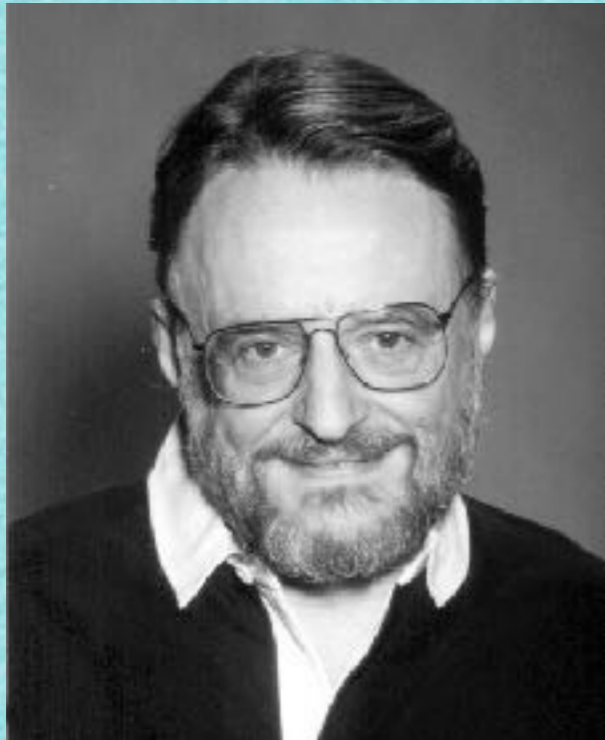
(1970)



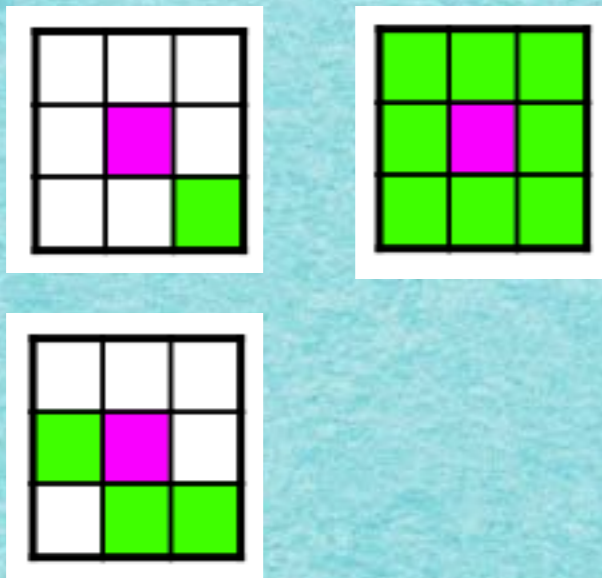
- A. Jede Zelle lebt oder ist tot.
- B. Jede Zelle hat 8 Nachbarn.

1. Eine lebende Zelle mit weniger als zwei lebenden Nachbarn stirbt.
2. Eine lebende Zelle mit mehr als drei lebenden Nachbarn stirbt.

5.54 Zelluläre Automaten

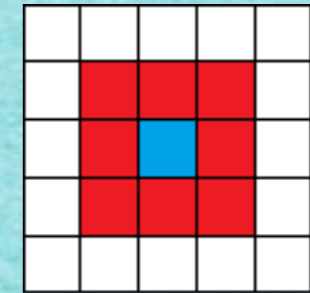


John Conway
(1937-2020)



Game of Life:

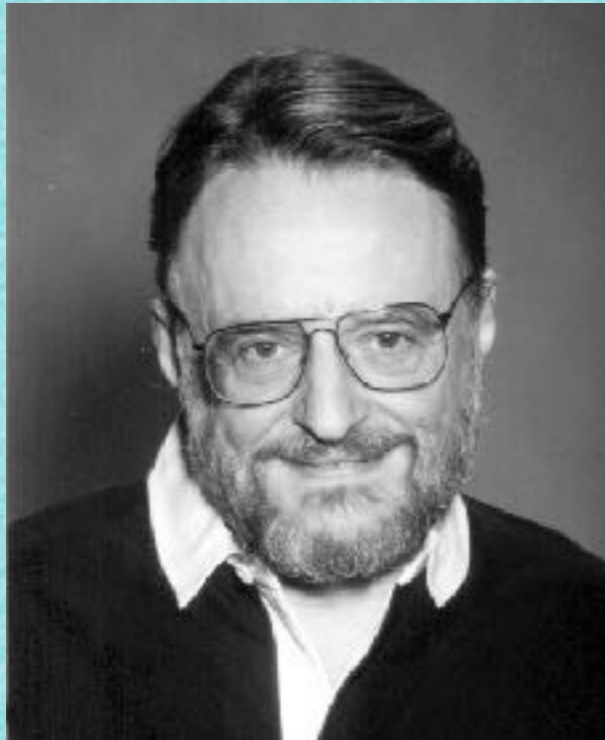
(1970)



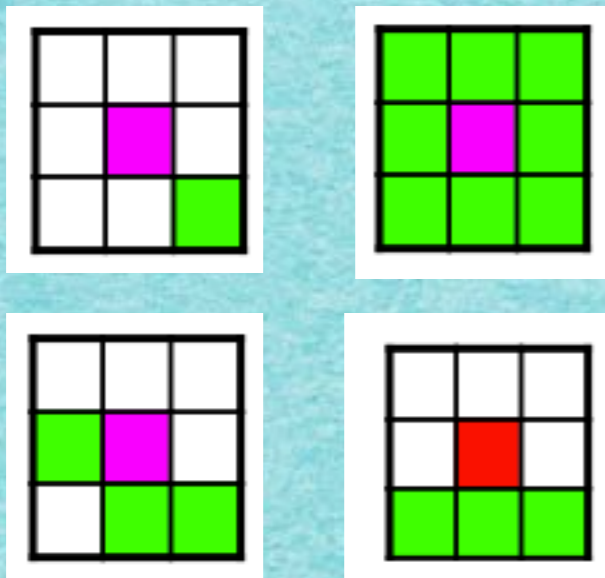
- A. Jede Zelle lebt oder ist tot.
- B. Jede Zelle hat 8 Nachbarn.

1. Eine lebende Zelle mit weniger als zwei lebenden Nachbarn stirbt.
2. Eine lebende Zelle mit mehr als drei lebenden Nachbarn stirbt.
3. Eine lebende Zelle mit zwei oder drei lebenden Nachbarn lebt weiter.

5.54 Zelluläre Automaten

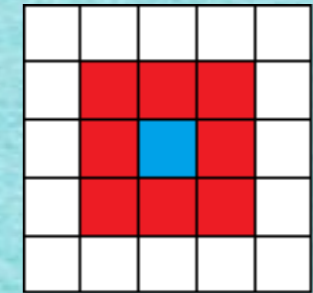


John Conway
(1937-2020)



Game of Life:

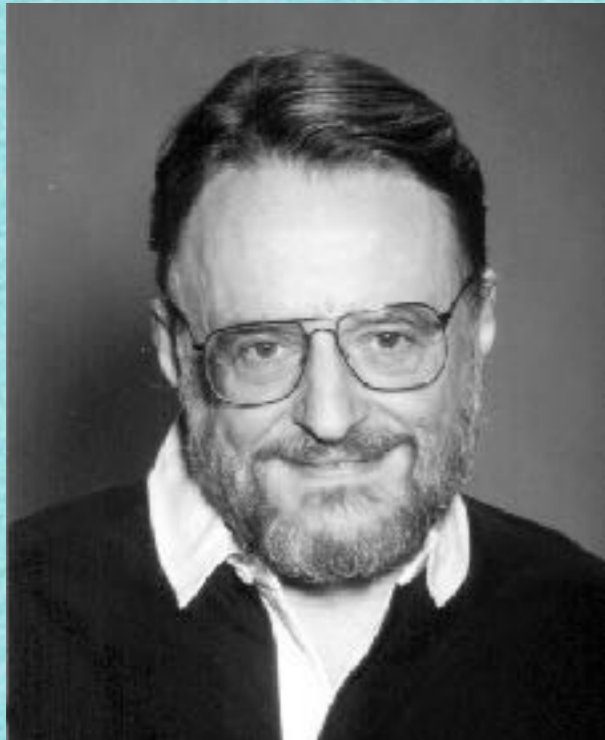
(1970)



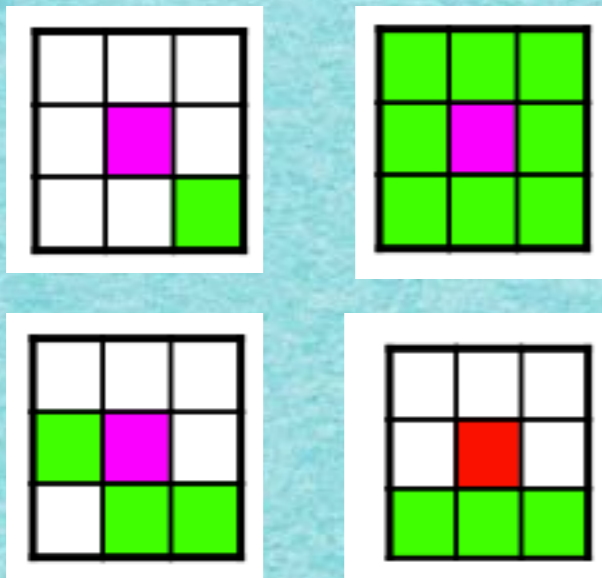
- A. Jede Zelle lebt oder ist tot.
- B. Jede Zelle hat 8 Nachbarn.

1. Eine lebende Zelle mit weniger als zwei lebenden Nachbarn stirbt.
2. Eine lebende Zelle mit mehr als drei lebenden Nachbarn stirbt.
3. Eine lebende Zelle mit zwei oder drei lebenden Nachbarn lebt weiter.

5.54 Zelluläre Automaten

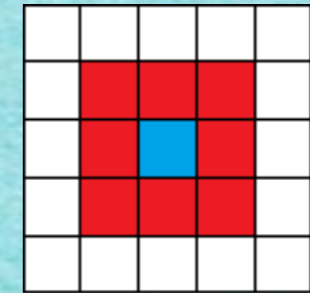


John Conway
(1937-2020)



Game of Life:

(1970)

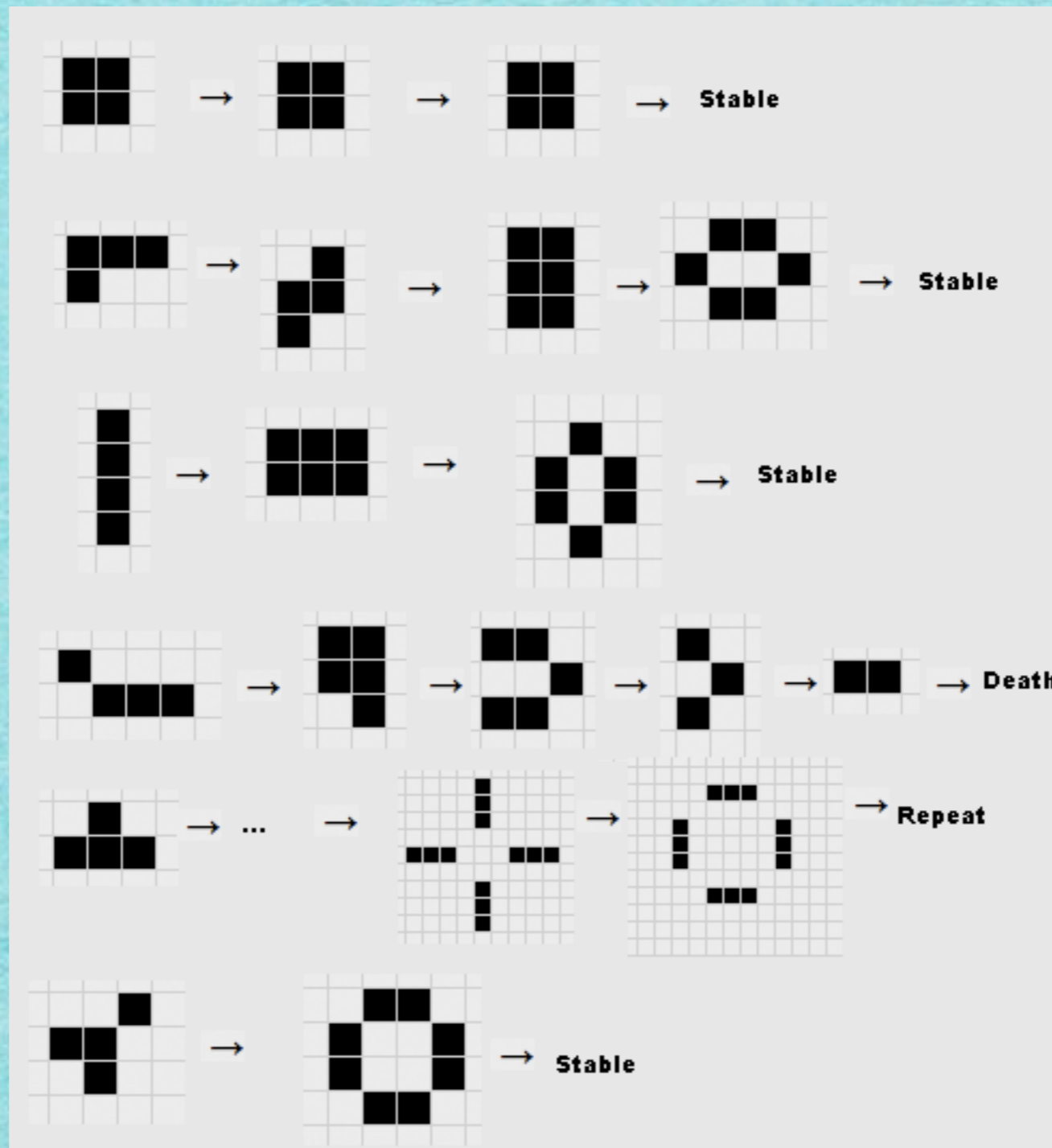


- A. Jede Zelle lebt oder ist tot.
- B. Jede Zelle hat 8 Nachbarn.

1. Eine lebende Zelle mit weniger als zwei lebenden Nachbarn stirbt.
2. Eine lebende Zelle mit mehr als drei lebenden Nachbarn stirbt.
3. Eine lebende Zelle mit zwei oder drei lebenden Nachbarn lebt weiter.
4. Eine tote Zelle mit genau drei lebenden Nachbarn wird lebend.

5.54 Zelluläre Automaten

5.54 Zelluläre Automaten



5.54 Zelluläre Automaten



5.54 Zelluläre Automaten



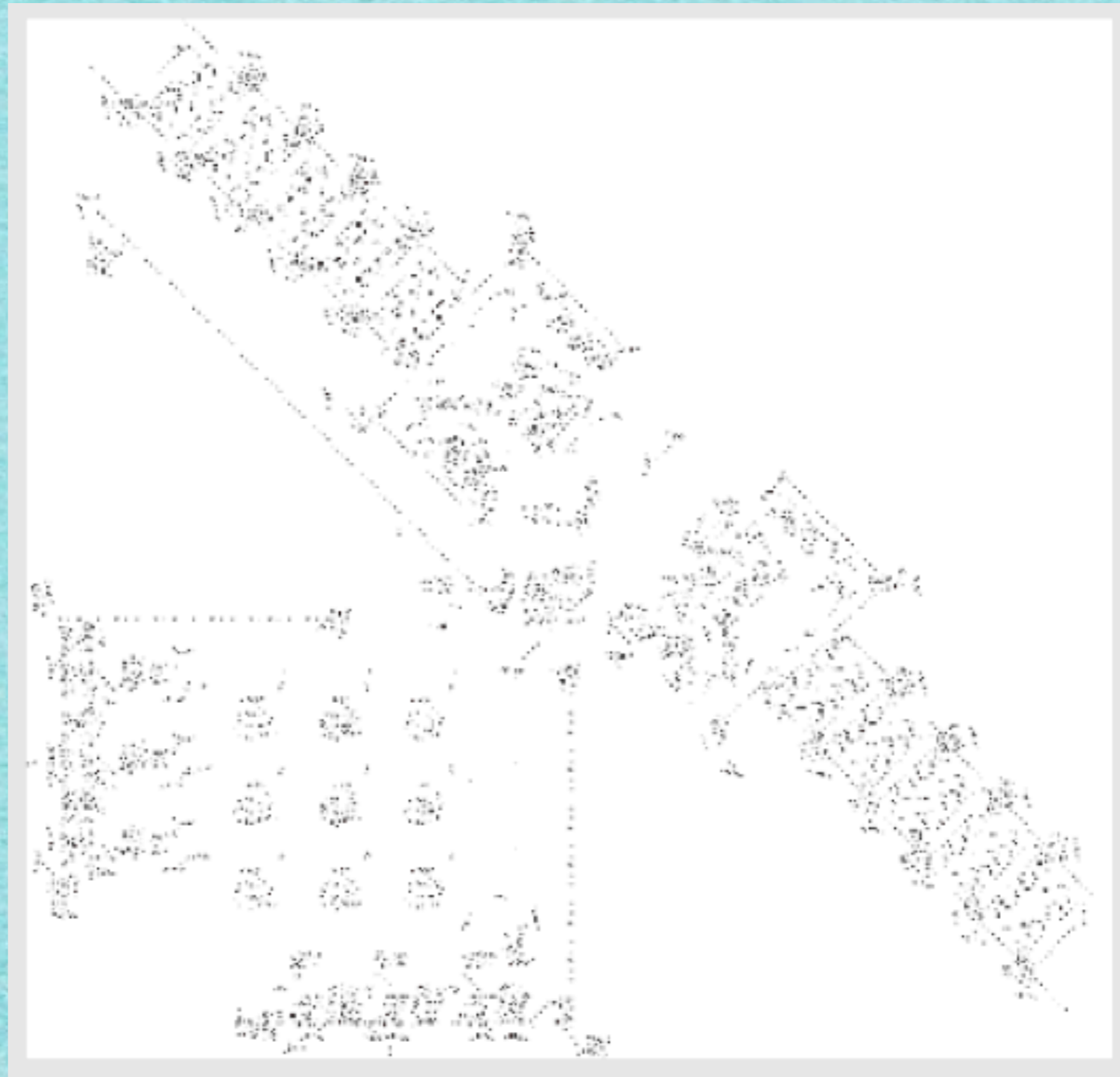
5.54 Zelluläre Automaten



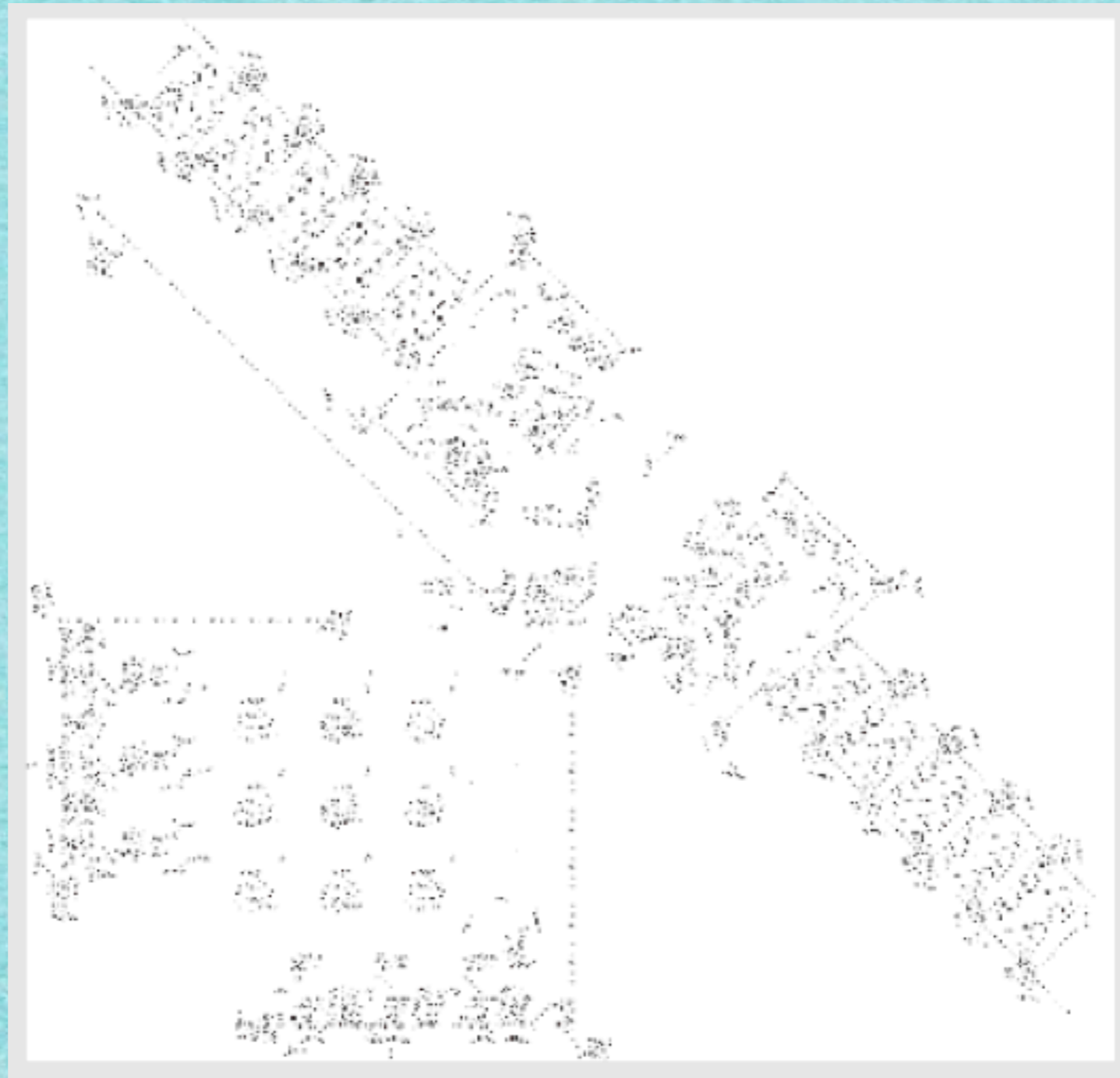
“Gosper-Glider”

5.54 Zelluläre Automaten

5.54 Zelluläre Automaten



5.54 Zelluläre Automaten



Turing-Maschine, basierend auf
Game of Life (Paul Rendell)

-> Film:

- > Film:**
- **Video von Emanuele Ascanti**

-> Film:

- **Video von Emanuele Ascanti**
- **Musik „Cleaning Apartment“
von Clint Mansell & Kronos Quartet**

5.5 Nichtlineare Rekursionen

5.5 Nichtlineare Rekursionen

- **Die Welt ist nichtlinear!**

5.5 Nichtlineare Rekursionen

- **Die Welt ist nichtlinear!**
- **Nichtlinearität birgt viele Überraschungen!**

5.5 Nichtlineare Rekursionen

- **Die Welt ist nichtlinear!**
- **Nichtlinearität birgt viele Überraschungen!**



Demnächst mehr!

Demnächst mehr!

s.fekete@tu-bs.de