Technische Universität Braunschweig
Institut für Betriebssysteme und Rechnerverbund
Abteilung Algorithmik

Wintersemester 2017/2018

Prof. Dr. Sándor P. Fekete
Christian Rieck
Arne Schmidt

Klausur
Algorithmen und Datenstrukturen
23.02.2018

Name: ....

Vorname: ....

Matr.-Nr.: ....

Studiengang: ....

☐ Bachelor ☐ Master ☐ Andere

Mit der Veröffentlichung meines Klausurergebnisses unter meiner Matrikelnummer bin ich einverstanden.

....
Unterschrift

Hinweise:

- Bitte das Deckblatt in Druckschrift vollständig ausfüllen.
- Die Klausur besteht aus 13 Blättern, bitte auf Vollständigkeit überprüfen.
- Erlaubte Hilfsmittel: Keine.
- Eigenes Papier ist nicht erlaubt.
- Die Rückseiten der Blätter dürfen beschrieben werden.
- Die Klausur ist mit 50 % der Punkte bestanden.
- Antworten die *nicht* gewertet werden sollen bitte deutlich durchstreichen. Kein Tippex verwenden.
- Mit *Bleistift* oder in *Rot* geschriebene Klausurteile können nicht gewertet werden.
- Werden mehrere Antworten gegeben, werten wir die mit der geringsten Punktzahl.
- Sämtliche Algorithmen, Datenstrukturen, Sätze und Begriffe beziehen sich, sofern nicht explizit anders angegeben, auf die in der Vorlesung vorgestellte Variante.
- Die Bearbeitungszeit für die Klausur beträgt 120 Minuten.

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	Σ
Punkte	**21**	**10**	**17**	**13**	**10**	**9**	**10**	**10**	**100**
Erreicht									
Note	—	—	—	—	—	—	—	—	

Aufgabe 1: Graphen **(10+4+4+3 Punkte)**

a) Wende Tiefensuche auf den Graphen G aus Abbildung 1 an; starte dabei mit dem Knoten v_1. Kommen in einem Schritt des Algorithmus mehrere Knoten in Frage, wähle denjenigen mit dem kleinsten Index. Gib die entsprechende Datenstruktur R nach **jeder** Änderung an und zeichne den gefundenen Tiefensuchbaum.

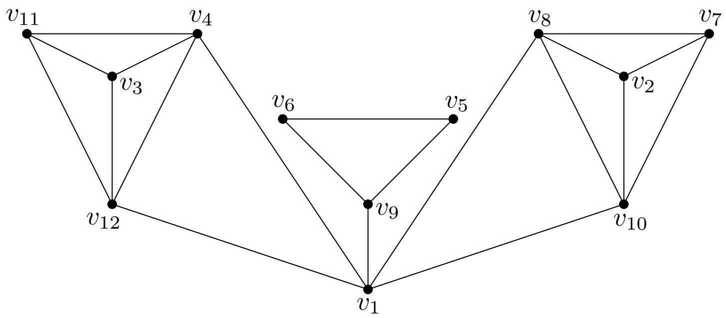


Abbildung 1: Der Graph G.

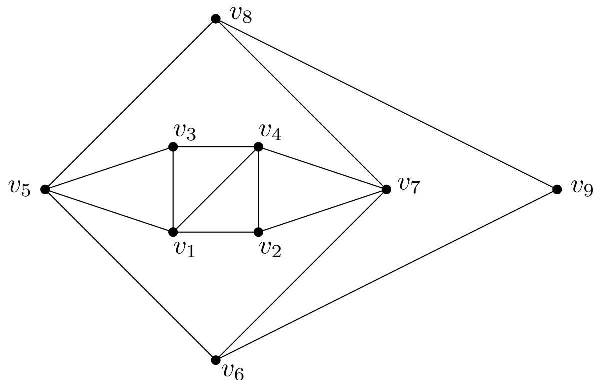


Abbildung 2: Der Graph H.

b) Gegeben sei der Graph aus Abbildung 2. Lösche 4 Kanten aus H, damit der resultierende zusammenhängende Graph eulersch wird. Reicht es weniger als 4 Kanten zu löschen? Begründe deine Antworten!

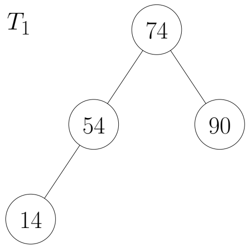
c) Gegeben sei der Graph aus Abbildung 2. Füge 2 Kanten in H ein, sodass der resultierende einfache Graph eulersch wird. Reicht es eine einzige Kante hinzuzufügen? Begründe deine Antworten!

d) Sei I ein Graph mit mindestens 3 Knoten. Zeige oder widerlege: Existiert in I ein Hamiltonkreis, dann gibt es zwischen jedem Paar von Knoten (u, v) einen Hamiltonpfad, der in u startet und in v endet.

Aufgabe 2: AVL-Bäume **(2+2+2+4 Punkte)**

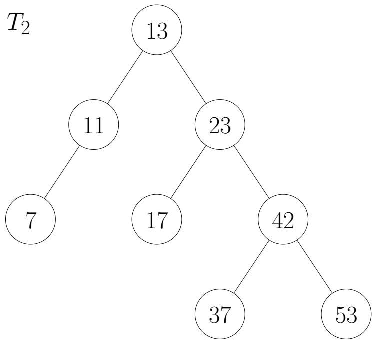
a) Führe Insert(T_1,18) auf dem AVL-Baum aus. Gib den Baum nach der Einfügeoperation sowie nach Rotationsoperationen an. (Hinweis: Die Einfügeoperation darf in dem angegebenen Baum durchgeführt werden.)

T_1

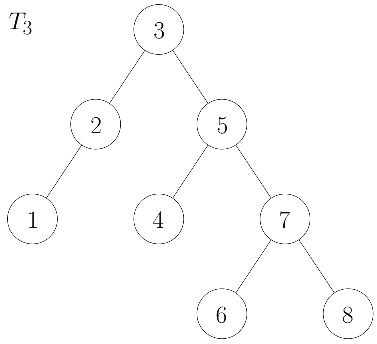


b) Führe Insert(T_2,29) auf dem AVL-Baum aus. Gib den Baum nach der Einfügeoperation sowie nach Rotationsoperationen an. (Hinweis: Die Einfügeoperation darf in dem angegebenen Baum durchgeführt werden.)

T_2



c) Führe DELETE(T_3,3) auf dem AVL-Baum aus. Gib den Baum nach der Löschoperation sowie nach Rotationsoperationen an.



d) Zeige per vollständiger Induktion, dass ein AVL-Baum der Höhe h mindestens $F_{h+2} - 1$ Knoten enthält. (*Hinweis:* F_n beschreibt die n-te Fibonacci Zahl mit $F_0 = 0$ und $F_1 = 1$)

Aufgabe 3: $\mathcal{O}$-Notation **(5+3+3+3+3 Punkte)**

a) Kreuze an, in welchen Klassen die jeweilige Funktion liegt (ohne Begründung).

$f(n)$	$\Omega(n)$	$\mathcal{O}(n \log n)$	$\mathcal{O}(n^2)$	$\Omega(n^3)$	$\Theta(n^2)$
$n^2 - (\log_2 n)^2$					
$\log_2(n!)$					
$4n + n^2 - 2^{20}$					
$\sqrt{(n^2+1)(n^2-1)}$					

b) In welcher Beziehung stehen die folgenden Klassen zueinander? Schreibe $\subseteq$ in das Feld, wenn Klasse A in Klasse B enthalten ist, $\supseteq$, wenn Klasse B in Klasse A enthalten ist, $=$, wenn die Klassen A und B übereinstimmen und $\times$, wenn dies alles nicht zutrifft. Eine Begründung ist nicht notwendig.

A	Relation	B
$\mathcal{O}(3^n)$		$\mathcal{O}(2^n)$
$\Theta(\log n)$		$\Theta(\log(n^2))$
$\Omega(n \log n)$		$\Omega(n^2)$
$\Theta(n)$		$\mathcal{O}\left(\frac{n}{\log n}\right)$
$\Omega(n^{n/2})$		$\Omega(n^n)$
$\mathcal{O}(1)$		$\mathcal{O}(n^{0.01})$

c) Seien $f, g, h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ Funktionen.
Zeige oder widerlege: $f(n) \in \mathcal{O}(g(n)) \wedge g(n) \in \Omega(h(n)) \Rightarrow f(n) \in \Omega(h(n))$

d) Seien $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ Funktionen.
Zeige oder widerlege: $f(n) \in \Theta(g(n)) \Leftrightarrow g(n) \in \Theta(f(n))$

e) Betrachte einen Algorithmus, der n Elemente als Input bekommt. Für jedes Paar von Elementen benötigt der Algorithmus eine Laufzeit von $4n^3 - 9n^2$. Es müssen alle Paare abgearbeitet werden. Zeige: Der Algorithmus besitzt eine Laufzeit von $\Theta(n^5)$.

Aufgabe 4: Rekursionen **(3+3+3+4 Punkte)**

a) Bestimme mit Hilfe des Mastertheorems das asymptotische Wachstum der Rekursion

$$T(n) = 16 \cdot T\left(\frac{n}{16}\right) + 73\sqrt{n} - 17.$$

Bestimme die Werte aller im Mastertheorem auftretenden Parameter.

b) Bestimme mit Hilfe des Mastertheorems das asymptotische Wachstum der Rekursion

$$U(n) = -\log(n) + 3 \cdot U\left(\frac{n}{3}\right) + 2 \cdot U\left(\frac{n}{2}\right) + 14n^2 + 6 \cdot U\left(\frac{n}{6}\right).$$

Bestimme die Werte aller im Mastertheorem auftretenden Parameter.

c) Bestimme mit Hilfe des Mastertheorems das asymptotische Wachstum der Rekursion

$$V(n) = 7n\log(n) + 18 \cdot V\left(\frac{n}{3}\right) + 13n^3 + 36 \cdot V\left(\frac{n}{6}\right) - 5n^2.$$

Bestimme die Werte aller im Mastertheorem auftretenden Parameter.

d) Auf welche der folgenden Rekursionen lässt sich das Mastertheorem anwenden?

$T(n) = n^7 + \sum_{i=2}^{13} T\left(\frac{n}{i}\right)$

☐ wahr
☐ falsch

$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) - T\left(\frac{n}{4}\right) + n^2$

☐ wahr
☐ falsch

$T(n) = 42 + 2.5 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + 5n$

☐ wahr
☐ falsch

$T(n) = 3n^{-1} + T\left(\frac{n}{2}\right)$

☐ wahr
☐ falsch

Aufgabe 5: Mediane **(1+4+5 Punkte)**

a) Sei X eine Menge von Zahlen. Wie lautet die Definition eines Rang-k Elements m?

b) Betrachte die untenstehenden, vorsortierten Fünfergruppen. Markiere den Median der Mediane m und grenze in jeder Gruppe ab, welche Elemente größer bzw. kleiner als m sind. Welche Elemente müssen wir weiterhin betrachten, falls wir nach dem Median der 45 Elemente suchen? Wie viel Prozent machen diese Elemente von allen aus?

17	9	16	3	1	8	4	11	5
29	21	19	6	2	14	13	18	10
40	28	31	7	22	35	15	38	12
43	30	32	24	27	37	20	39	23
45	36	33	26	34	44	25	41	42

c) Mit dem Median der Mediane von Fünfergruppen können wir immer so pivotisieren, dass wir eine Laufzeit von $O(n)$ erhalten, um ein Rang-k Element zu finden. Was passiert mit der Laufzeit, wenn man Dreiergruppen statt Fünfergruppen benutzt?

Aufgabe 6: Sortieren **(6+3 Punkte)**

a) Sortiere das Array aus Abbildung 3 mit dem Algorithmus MERGESORT. Gib (separat und in chronologischer Reihenfolge) das Array A nach jedem Aufruf von MERGE an. Elemente, die nicht zum im jeweiligen Mergeschritt betrachteten Teilarray gehören, müssen nicht angegeben werden. Die Aufrufe von MERGE auf einem Teilarray der Länge 1 müssen nicht angegeben werden. Nutze zur Bearbeitung der Aufgabe die in Abbildung 3 gegebene Tabelle.

$A =$	13	7	11	3	5	2	17	19
1. $A =$								
2. $A =$								
3. $A =$								
4. $A =$								
5. $A =$								
6. $A =$								
7. $A =$								

Abbildung 3: Mergesort im Array A.

b) Fülle die folgende Tabelle aus.(Hinweis: Einträge mit „——" müssen nicht ausgefüllt werden.)

	Laufzeit			
	Best-Case	Average-Case	Worst-Case	Stabil?
Bubblesort	——	——		
Mergesort				
Quicksort				

Aufgabe 7: Algorithmenentwurf **(6+4 Punkte)**

Betrachte einen Graphen $G = (V, E)$.

a) Schreibe einen Algorithmus in Pseudocode, der in $\mathcal{O}(|V|)$ Zeit überprüft, ob der Graph ein Baum ist. Gib außerdem in wenigen Worten wieder, was dein Algorithmus tut. (Hinweis: Es darf angenommen werden, dass der Graph als Adjazenzliste vorliegt. Algorithmen aus der Vorlesung dürfen verwendet werden.)

b) Beweise, dass dein Algorithmus die Laufzeit $\mathcal{O}(|V|)$ besitzt.

Aufgabe 8: Kurzfragen **(2+2+2+2+2 Punkte)**

Kreuze an, welche Aussagen korrekt sind. Es gibt nur Punkte für vollständig korrekt angekreuzte Teilaufgaben. (Hinweis: In jeder Teilaufgabe ist immer mindestens eine Aussage korrekt.)

a) Ein zusammenhängender Graph besitzt einen Hamiltonkreis, wenn jeder Knoten den Grad...

- 2 besitzt. ☐
- 3 besitzt. ☐
- $n-1$ besitzt. ☐

b) Welche Aussagen zu binären Suchbäumen der Höhe h mit n Knoten sind korrekt?

- Einfügen dauert im Worst-Case $O(\log n)$. ☐
- Es gibt höchstens $\lceil \frac{n+1}{2} \rceil$ Blätter. ☐
- Es gilt $h \geq \log_2(n)$. ☐

c) Die Codierungsgröße einer Adjazenzmatrix eines Graphen mit n Knoten und m Kanten ist immer...

- $O(m \log n)$. ☐
- $O(n)$. ☐
- $O(n^2)$. ☐

d) Welche Laufzeitschranken sind korrekt?

- Vergleichsbasiertes Sortieren: $\Omega(n \log n)$ ☐
- Suchen des k-ten Elements: $O(n)$ ☐
- Graphen-Scan Algorithmus: $O(n+m)$. ☐

e) Ein zusammenhängender Graph G mit n Knoten besitzt eine Eulertour, wenn G...

- ein vollständiger Graph ist. ☐
- nur Knoten mit geradem Grad besitzt. ☐
- $12n-6$ Kanten besitzt. ☐

Viel Erfolg ☺