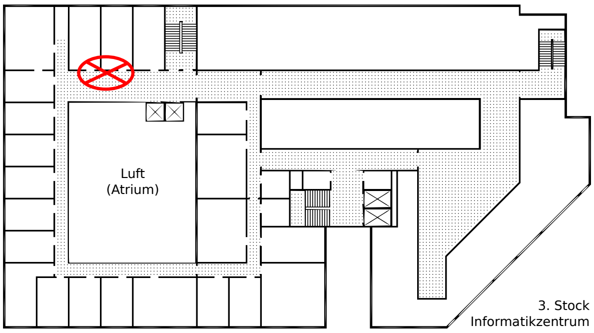
Abteilung Algorithmik **Winter 2019/20**
Institut für Betriebssysteme und Rechnerverbund
TU Braunschweig

Dr. Linda Kleist
Phillip Keldenich
Dominik Krupke

Mathematische Methoden der Algorithmik
Übungsblatt 5 vom 08.01.2020

Die Abgabe eurer Lösungen zu diesem Blatt sind bis Mittwoch, den 22.01.2020 um 14:50 im Hausaufgabenschrank der Algorithmik möglich (siehe Skizze) oder direkt in der kleinen Übung.

Bitte die Blätter vorne deutlich mit eigenem Namen sowie Matrikelnummer versehen und zusammenheften!



Aufgabe 1 (Dualisieren): Dualisiere die folgenden LPs:

$$
\begin{array}{llrcrcrcr}
\min & & -x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & & \\
\text{s.t.} & - & 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & \geq & -40 \\
 & & x_1 & & & + & x_3 & \leq & 25 \\
 & & & & x_2 & + & 3x_3 & \leq & 30 \\
 & & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lrcrcrcrl}
\max & 2x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & \\
\text{s.t.} & 3x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 4x_4 & \leq 12 \\
 & x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & \leq 7 \\
 & 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & \leq 10 \\
 & & & & & x_1, & \ldots, & x_4 & \geq 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llrcrcrcr}
\max & & x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & & \\
\text{s.t.} & - & 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & \geq & -40 \\
 & & x_1 & & & + & x_3 & = & 25 \\
 & & & & x_2 & + & 3x_3 & \leq & 30
\end{array}
$$

(15 Punkte)

Aufgabe 2 (Abstrakt Dualisieren): Dualisiere das folgende LP und beschreibe dabei deine Vorgehensweise

$$\begin{aligned} & \min \sum_{e \in E} x_e \cdot c(e) \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{e \in E(U, V \setminus U)} x_e \geq 1 \quad \forall U \subset V, S \neq \emptyset \\ & x_e \geq 0 \quad \forall e \in E \end{aligned}$$

(für einen Graphen $G(V, E)$ mit Kantengewichten $c : E \to \mathbb{N}$, $E(U, W) = \{vw \in E \mid v \in U, w \in W\}$)

(15 Punkte)

Aufgabe 3 (Komplementärer Schlupf 1): Zeige, dass optimale Lösungen für die zueinander dualen linearen Programme der Form

$$\begin{aligned} \max c^T x \qquad & \qquad \min u^T b \\ Ax \leq b \qquad & \qquad u^T A \geq c^T \\ x \geq 0 \qquad & \qquad u \geq 0 \end{aligned}$$

die nachfolgenden komplementären Schlupfbedingungen erfüllen:

a) $u_i = 0$ oder $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$.

b) $x_j = 0$ oder $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i = c_j$.

(10 Punkte)

Aufgabe 4 (Komplementärer Schlupf 2): Gegeben sei das folgende lineare Programm

$$(P) \left\{ \begin{array}{lrcrcrcrcrcl} \max & 7x_1 & + & 6x_2 & + & 5x_3 & - & 2x_4 & + & 3x_5 & & \\ \text{s.t.} & x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & - & 2x_4 & + & 2x_5 & \leq & 4 \\ & 4x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & + & x_5 & \leq & 3 \\ & 2x_1 & + & 4x_2 & + & 4x_3 & - & 2x_4 & + & 5x_5 & \leq & 5 \\ & 3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & - & 2x_5 & \leq & 1 \\ & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5 & \geq & 0 \end{array} \right.$$

a) Formuliere das duale Problem zu (P).

b) Formuliere die Bedingungen für komplementären Schlupf zu (P).

c) Prüfe mit Hilfe des Satzes vom komplementären Schlupf, ob $x^* = (0, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 0)^T$ eine optimale Lösung von (P) ist.

(10 Punkte)

Aufgabe 5 (Primale und duale LPs): Ein LP ist entweder unzulässig, unbeschränkt oder optimal lösbar. In der Vorlesungen haben wir hergleitet, dass fünf Kombinationsmöglichkeiten (z.B. primal unbeschränkt, dual unbeschränkt) nicht auftreten können. Zeige durch Angabe von Beispielen, dass die anderen fünf Fälle auftretten können.

(10 Punkte)