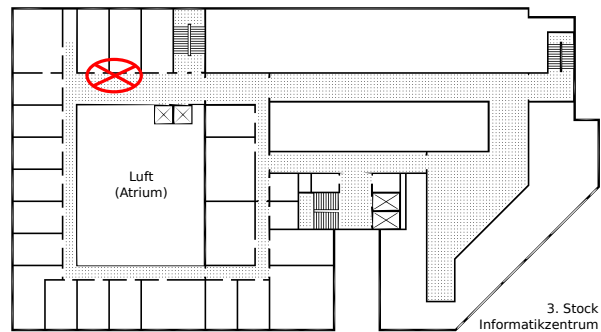


Dr. Linda Kleist  
Phillip Keldenich  
Dominik Krupke

## Mathematische Methoden der Algorithmik Übungsblatt 2 vom 13.11.2018

Die Abgabe eurer Lösungen zu diesem Blatt sind bis 27.11.2019 um 14:50 im Hausaufgabenschrank der Algorithmik möglich (siehe Skizze) oder direkt in der kleinen Übung.

**Bitte die Blätter vorne deutlich mit eigenem Namen sowie Matrikelnummer versehen und zusammenheften!**



**Aufgabe 1 (Formen von LPs):** Betrachte das folgende lineare Optimierungsproblem:

$$(P) \left\{ \begin{array}{ll} \min & x_1 + x_2 \\ \text{s. t.} & x_1 + 3x_2 \geq 9 \\ & 2x_1 + x_2 \geq 8 \\ & 2x_1 + 5x_2 \leq 40 \\ & x_1 \leq 8 \\ & x_1 \geq 0 \end{array} \right.$$

Transformiere das lineare Programm  $P$  in die folgenden Formen.

(a)  $\min\{c^T x \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$

(b)  $\max\{c^T x \mid Ax = b, x \geq 0\}$

(c)  $\min\{c^T x \mid Ax \leq b, x \text{ frei}\}$ .

Die Matrixschreibweise ist nicht gefordert.

**(10 Punkte)**

**Aufgabe 2 (Praktisches Lösen von Weighted Vertex Cover):** Im Problem *Weighted Vertex Cover* haben wir einen Graphen  $G = (V, E)$  und eine Knotengewichtung  $w : V \rightarrow \mathbb{Z}^+$  gegeben und suchen eine Knotenmenge  $C \subseteq V$  minimalen Gesamtgewichts  $\sum_{v \in C} w(v)$ , sodass jede Kante  $e \in E$  zu einem Knoten aus  $C$  inzident ist. Für den Graphen mit Knoten  $V = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4\}$ , Kanten  $E = \{v_0v_2, v_1v_2, v_2v_4, v_1v_3, v_3v_4, v_2v_3\}$ , und den Gewichten  $w(v_0) = 2, w(v_1) = 3, w(v_2) = 10, w(v_3) = 11, w(v_4) = 1$  lässt sich das folgende Integer Program in CPLEX-Syntax aufstellen.

```
Minimize
2 v0 + 3 v1 + 10 v2 + 11 v3 + 1 v4
```

```
Subject To
v0 + v2 >= 1
v1 + v2 >= 1
v1 + v3 >= 1
v2 + v4 >= 1
v3 + v4 >= 1
v2 + v3 >= 1
```

```
Bounds
0 <= v0 <= 1
0 <= v1 <= 1
0 <= v2 <= 1
0 <= v3 <= 1
0 <= v4 <= 1
```

```
Integers
v0
v1
v2
v3
v4
End
```

- Löse das Problem zunächst fraktional, d.h., unter Verzicht auf die Ganzzahligkeitsbedingungen, und dann integral. Hierfür kannst du den Javascript-Solver unter <http://hgourvest.github.io/glpk.js/> verwenden. Das Problem wird von diesem Solver genau dann integral gelöst, wenn die Funktion MIP (für *Mixed Integer Programming*) aktiviert ist. **Hinweis:** Der sich ergebende Funktionswert sollte im fraktionalen Fall 13.5 sein und im integralen Fall 14.
- Stelle das IP für die folgenden Graphen auf und gebe die entsprechenden fraktionalen und integralen Lösungen an.
  - $G_1 = (\{v_0, v_1, v_2\}, \{v_0v_1, v_1v_2, v_0v_2\})$ ,  $w(v_0) = w(v_1) = w(v_2) = 1$ .
  - $G_2 = (\{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4\}, \{v_0v_2, v_1v_2, v_2v_4, v_1v_3, v_3v_4\})$ ,  
 $w(v_0) = 2, w(v_1) = 3, w(v_2) = 10, w(v_3) = 11, w(v_4) = 1$ .
- Probiere weitere Instanzen aus. Welche Werte können die Variablen im fraktionalen Fall annehmen? Was fällt dir bei Einschränkung auf bipartite Graphen auf?

**(3+7+10 Punkte)**

**Aufgabe 3 (LP-Formulierung eines Optimierungsproblems):** Formuliere das folgende Optimierungsproblem als LP. Zu  $n$  gegebenen Punkten  $(x_i, y_i), 1 \leq i \leq n$  in der Ebene suchen wir eine Gerade, die das Maximum (nicht die Summe!) der vertikalen Abstände zu den Punkten minimiert. Löse das Problem für die Punkte

$$\{(1, 10), (3, 6), (4, 7), (6, 5), (8, 2), (9, 4)\}$$

optimal, z.B. mit <http://hgourvest.github.io/glpk.js/>.

**Hinweis:** Die meisten Solver nehmen per default  $x \geq 0$  an. Um dies zu unterbinden muss 'x free' zu den Bounds hinzugefügt werden. Der Javascript-Solver akzeptiert nur Konstanten auf der rechten Seite. Die Constraints müssen also gegebenenfalls dementsprechend umgeformt werden. **(15 Punkte)**

**Aufgabe 4 (Basislösungen und Nichtbasislösungen):** Gegeben ist das LP ( $P$ ) in Abbildung 1 mit Ungleichungen (1), ..., (7), dessen zulässige Lösungsmenge grau markiert ist.

- a) Gib alle Basen von ( $P$ ) an, deren Basislösungen im in der Abbildung dargestellten Bereich liegen. Markiere diese in Abbildung 1. Es reicht dabei aus, zu jeder Basis diejenigen Variablen anzugeben, die nicht in der Basis auftreten. Dabei sei  $x_i$  die Schlupfvariable von Ungleichung ( $i$ ). (Hinweis: Es werden nur  $x_1, \dots, x_7$  benötigt.)
- b) Zeichne den Graphen  $G$ , dessen Knoten die Menge aller Basen aus der vorigen Teilaufgabe sind. Zwischen zwei Basen in  $G$  existiert genau dann eine Kante, wenn sie sich in genau einer Basisvariable unterscheiden. Beschrifte die Knoten mit der assoziierten Basis und die Kanten mit den Variablen, in denen sich die Knoten unterscheiden.
- c) Seien  $B_1$  und  $B_2$  wie in Abbildung 1 dargestellt diejenigen zulässigen Basen, deren Basislösungen den geringsten bzw. höchsten Zielfunktionswert besitzen. Gib einen Pfad in  $G$  an, der nur zulässige Basen enthält und von  $B_1$  zu  $B_2$  führt. Markiere diesen Pfad in  $G$  sowie die entsprechende Sequenz von Basen in Abbildung 1.

**(15 Punkte)**

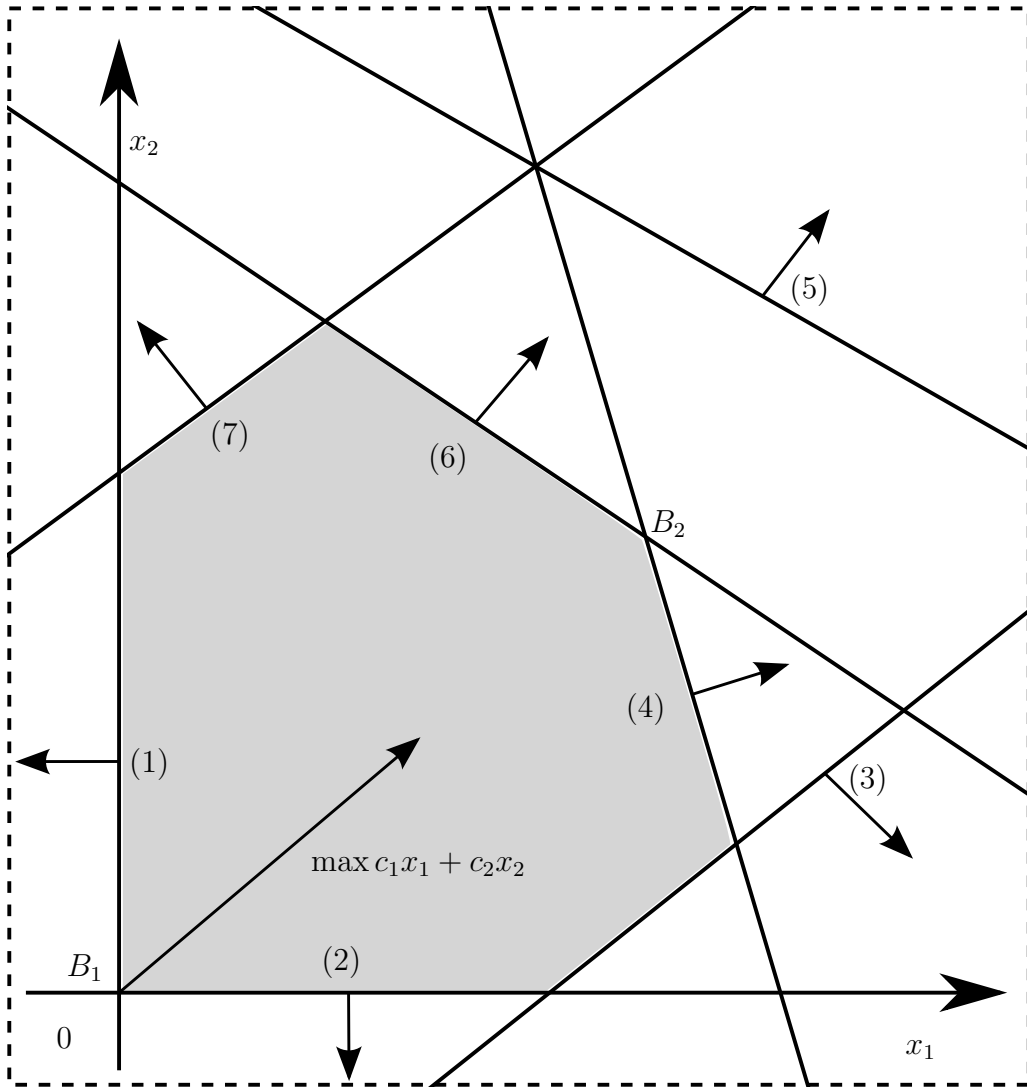


Abbildung 1: Das LP ( $P$ ) aus Aufgabe 4