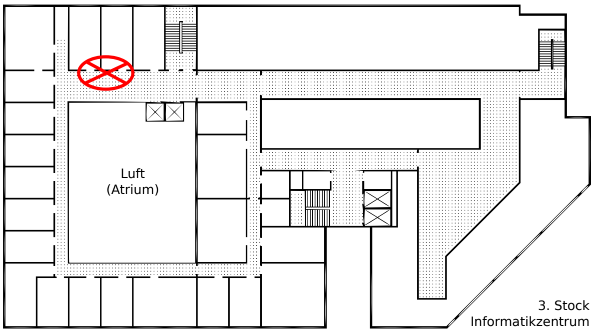
Abteilung Algorithmik **Winter 2019/20**
Institut für Betriebssysteme und Rechnerverbund
TU Braunschweig

Dr. Linda Kleist
Phillip Keldenich
Dominik Krupke

Mathematische Methoden der Algorithmik
Übungsblatt 1 vom 30. Oktober 2019

Die Abgabe eurer Lösungen zu diesem Blatt sind bis 13. November 2019 um 14:50 im Hausaufgabenschrank der Algorithmik möglich (siehe Skizze) oder direkt in der kleinen Übung.

Bitte die Blätter vorne deutlich mit eigenem Namen sowie Matrikelnummer versehen und zusammenheften!



WICHTIG: Zur Bescheinigung der Studienleistung müssen am Ende des Semesters mindestens 50% der Hausaufgabenpunkte erreicht worden sein.

Aufgabe 1 (Graphische Darstellung von LPs): Gegeben seien die folgenden linearen Ungleichungen:

$$\begin{aligned}
2x_1 &\geq -x_2 + 2 && (1)\\
x_1 + 2x_2 - 5 &\geq 0 && (2)\\
x_1 &\leq 5 + x_2 && (3)\\
-x_2 &\geq -x_1 - 3 && (4)\\
-4x_1 + 32 &\geq -x_2 && (5)\\
x_1 + x_2 &\leq 11 && (6)\\
x_1 &\geq 1 && (7)\\
x_1 &\leq 8 && (8)\\
x_2 &\geq 0 && (9)\\
x_2 &\leq 9 && (10)
\end{aligned}$$

(a) Gib die Matrixdarstellung $Ax \leq b$ der linearen Ungleichungen an.

(b) Skizziere die Menge der zulässigen Lösungen in einem geeigneten Koordinatensystem.

(c) Betrachte die folgenden Optimierungsprobleme:

(i) $\min x_1 + x_2$

(ii) $\min x_1$

(iii) $\max x_2$

(iv) $\max 5x_2 + x_1$

Bestimme (mit Hilfe der Skizze) die relevanten Ungleichungen für das jeweilige Optimum und berechne anhand der relevanten Ungleichungen die jeweils optimalen Lösungen. Wenn ein Problem mehrere Lösungen hat, erläutere kurz wieviele Lösungen existieren und warum.

Optional: Im Verlaufe des Semesters werden wir den Simplex-Algorithmus kennen und verstehen lernen, der solche Probleme auch für viele Variablen in der Praxis effizient lösen kann. Du kannst deine Lösung optional mit einem solchen Algorithmus etwa auf der Seite `http://hgourvest.github.io/glpk.js/` überprüfen. Die Syntax hierfür ist beispielsweise wie folgt:

```
Minimize
x1 + x2

Subject To
2 x1 + 1 x2 >= 1
3 x1 - 2 x2 <= 3

End
```

Konstanten dürfen nur auf der rechten Seite stehen und Variablen nur auf der linken, daher musst du obige Ungleichungen eventuell umformen.

(d) Im Laufe der Vorlesung werden wir es primär mit hochdimensionalen Räumen zu tun haben. Die 2- oder 3-dimensionale geometrische Darstellung kann in vielen Fällen das Verständnis erleichtern. Hierbei sollte man jedoch im Hinterkopf behalten, dass manche Dinge in höherdimensionalen Räumen kontraintuitiv sind und insbesondere die mit mit der Dimension steigende Komplexität schnell übersehen wird. Für diesen Zweck wollen wir einen n-dimensionalen Würfel mit Seitenlänge 1 betrachten.

Wie viele $(n-1)$-dimensionale Flächen hat ein n-dimensionaler Würfel? Welche Ungleichungen braucht man, um den Inhalt des Würfels zu begrenzen? Wie viele Ecken hat ein n-dimensionaler Würfel?

(3+5+8+4 Punkte)

Aufgabe 2 (Matching und Vertex Cover): Sei $G = (V, E)$ ein einfacher Graph. Seien VC_{opt} ein kardinalitätsminimales Vertex Cover, M ein beliebiges und M_{max} ein inklusionsmaximales Matching in G. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass die Ungleichung $|M| \leq |VC_{opt}|$ gilt.

(a) Zeige: $|VC_{opt}| \leq 2 \cdot |M_{max}|$.

(b) Gib eine Klasse von Graphen an, für die $|VC_{opt}|$ beliebig groß werden kann und für die die Ungleichung aus (a) für beliebige M_{max} immer mit Gleichheit erfüllt ist (mit kurzer Begründung).

(c) Gib in eigenen Worten wieder, was Dualität ist und warum dieses Konzept wichtig für Optimierungsprobleme ist.

(d) Gib einen Polynomialzeitalgorithmus an, der ein kardinalitätsminimales Vertex Cover für Bäume berechnet. Neben der Lösung soll dieser Algorithmus auch ein Zertifikat für die Optimalität der Lösung liefern.

(10+5+5+10 Punkte)

Aufgabe 3 (Lineare Unabhängigkeit):

a) Skizziere die folgenden Mengen A, B, C von Vektoren im $\mathbb{R}^2$ und bestimme die davon aufgespannten Unterräume.

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

b) Welche der folgenden Mengen von Vektoren sind linear unabhängig? Begründe deine Antwort.

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} \right\},$$
$$\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix} \right\},$$
$$\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$
$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(3+7 Punkte)