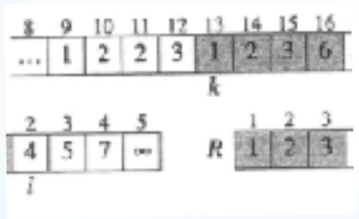


Kapitel 5.5: Nichtlineare Rekursionen

Algorithmen und Datenstrukturen
WS 2019/20

Prof. Dr. Sándor Fekete

EvaSys	Lehrevaluation Informatik Vorlesung Wintersemester 2012/2013	Electric Paper

TU Braunschweig — Prof. Dr. Sándor Fekete

Carl-Friedrich-Gauss-Fakultät - Informatik — Algorithmen und Datenstrukturen

Markieren Sie so: ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ Bitte verwenden Sie einen Kugelschreiber oder nicht zu starken Filzstift. Dieser Fragebogen wird maschinell erfasst.

Korrektur: ☐ ■ ☐ ☒ ☐ Bitte beachten Sie im Interesse einer optimalen Datenerfassung die links gegebenen Hinweise beim Ausfüllen.

1. Persönliche Angaben

1.1 In welchem Fachsemester studieren Sie?
☐ 1./2. ☐ 3./4. ☐ 5./6.
☐ 7./8. ☐ 9./10. ☐ > 10

1.2 Welchen Abschluss streben Sie derzeit an? ☐ Diplom ☐ Bachelor ☐ Master

1.3 In welchem Studiengang studieren Sie?
☐ Informatik ☐ Nebenfach Informatik ☐ Medienwissenschaften
☐ Wirtschaftsinformatik ☐ Mobilität und Verkehr ☐ IST
☐ CSE ☐ 2-Fächer Bachelor ☐ sonstiges

2. Wie häufig waren Sie in der ...?

Große Übung: Hörsaal Kleine Übung: Seminarraum
(Bitte nur kleine und große Übungen bewerten, wenn sie angeboten wurden)

2.1	Vorlesung (Anwesenheit)	immer	☐	☐	☐	☐	☐	nie
2.2	Großen Übung (Anwesenheit)	immer	☐	☐	☐	☐	☐	nie
2.3	Kleinen Übung (Anwesenheit)	immer	☐	☐	☐	☐	☐	nie

3. Der/Die Lehrende war gut vorbereitet

3.1	Vorlesung (Vorbereitung)	trifft zu	☐	☐	☐	☐	☐	trifft nicht zu
3.2	Große Übung (Vorbereitung)	trifft zu	☐	☐	☐	☐	☐	trifft nicht zu
3.3	Kleine Übung (Vorbereitung)	trifft zu	☐	☐	☐	☐	☐	trifft nicht zu

4. Der/Die Lehrende wirkte kompetent

4.1	Vorlesung (Kompetenz)	trifft zu	☐	☐	☐	☐	☐	trifft nicht zu
4.2	Große Übung (Kompetenz)	trifft zu	☐	☐	☐	☐	☐	trifft nicht zu
4.3	Kleine Übung (Kompetenz)	trifft zu	☐	☐	☐	☐	☐	trifft nicht zu

5. Der/Die Lehrende vermittelte die Inhalte verständlich

5.1	Vorlesung (Inhaltsvermittlung)	trifft zu	☐	☐	☐	☐	☐	trifft nicht zu
5.2	Große Übung (Inhaltsvermittlung)	trifft zu	☐	☐	☐	☐	☐	trifft nicht zu
5.3	Kleine Übung (Inhaltsvermittlung)	trifft zu	☐	☐	☐	☐	☐	trifft nicht zu

6. Zwischenfragen wurden verständlich beantwortet

6.1	Vorlesung (Zwischenfragen)	trifft zu	☐	☐	☐	☐	☐	trifft nicht zu
6.2	Große Übung (Zwischenfragen)	trifft zu	☐	☐	☐	☐	☐	trifft nicht zu
6.3	Kleine Übung (Zwischenfragen)	trifft zu	☐	☐	☐	☐	☐	trifft nicht zu

7. Die Veranstaltung war gut strukturiert

7.1	Vorlesung (Struktur)	trifft zu	☐	☐	☐	☐	☐	trifft nicht zu
7.2	Große Übung (Struktur)	trifft zu	☐	☐	☐	☐	☐	trifft nicht zu
7.3	Kleine Übung (Struktur)	trifft zu	☐	☐	☐	☐	☐	trifft nicht zu

8. Kann der Dozent begeistern?

8.1	Vorlesung (Begeisterung)	ja, sehr	☐	☐	☐	☐	☐	nein, gar nicht
8.2	Große Übung (Begeisterung)	ja, sehr	☐	☐	☐	☐	☐	nein, gar nicht
8.3	Kleine Übung (Begeisterung)	ja, sehr	☐	☐	☐	☐	☐	nein, gar nicht

9. Bewerten Sie die Lehrveranstaltung insgesamt!

9.1	Vorlesung (allg. Bewertung)	sehr gut	☐	☐	☐	☐	☐	sehr schlecht
9.2	Große Übung (allg. Bewertung)	sehr gut	☐	☐	☐	☐	☐	sehr schlecht
9.3	Kleine Übung (allg. Bewertung)	sehr gut	☐	☐	☐	☐	☐	sehr schlecht

F1859UI1800P1PL0VD 21.11.2012, Seite 1/2

Ankreuzliste für Übungsgruppen

	Gruppe	Termin (14-täglich)	Raum	Tutor
	01	Montag, 08:00 - 09:30	IZ 305	Alexander Burmester
1	●	Montag, 09:45 - 11:15	IZ 305	Alexander Burmester
	03	Montag, 13:15 - 14:45	IZ 358	Ahmad Al-Mekhlafy
3	●	Montag, 15:00 - 16:30	IZ 305	Ahmad Al-Mekhlafy
	05	Dienstag, 13:15 - 14:45	IZ 160	Matthias Konitzny
	06	Dienstag, 13:15 - 14:45	IZ 305	Chek-Manh Loi
	07	Dienstag, 15:00 - 16:30	IZ 160	Dennis Luck
2	●	Mittwoch, 08:00 - 09:30	IZ 358	Tobias Wallner
6	●	Mittwoch, 13:15 - 14:45	IZ 160	Chek-Manh Loi
7	●	Mittwoch, 13:15 - 14:45	IZ 305	Dennis Luck
4	●	Donnerstag, 13:15 - 14:45	IZ 160	Maurice Semren
4	●	Freitag, 09:45 - 11:15	IZ 160	Maurice Semren
2	●	Freitag, 11:30 - 13:00	IZ 160	Tobias Wallner
5	●	Freitag, 13:15 - 14:45	IZ 305	Matthias Konitzny

5.3.3 Master-Theorem: Lineare Rekursionen

Satz 5.9 (Master-Theorem)

Sei $T: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit

$$T(n) = \sum_{i=1}^{m} T(\alpha_i \cdot n) + \Theta(n^k),$$

wobei $\alpha_i \in \mathbb{R}$: $0 < \alpha_i < 1$, $m \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{R}$.

Dann gilt

$$T(n) \in \begin{cases} \Theta(n^k) & \text{für } \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^k < 1 \\ \Theta(n^k \log n) & \text{für } \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^k = 1 \\ \Theta(n^c) \text{ mit } \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^c = 1 & \text{für } \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^k > 1 \end{cases}$$

5.5 Nichtlineare Rekursionen

5.5.1 Logistische Rekursion

Wachstum proportional zu einer Größe:

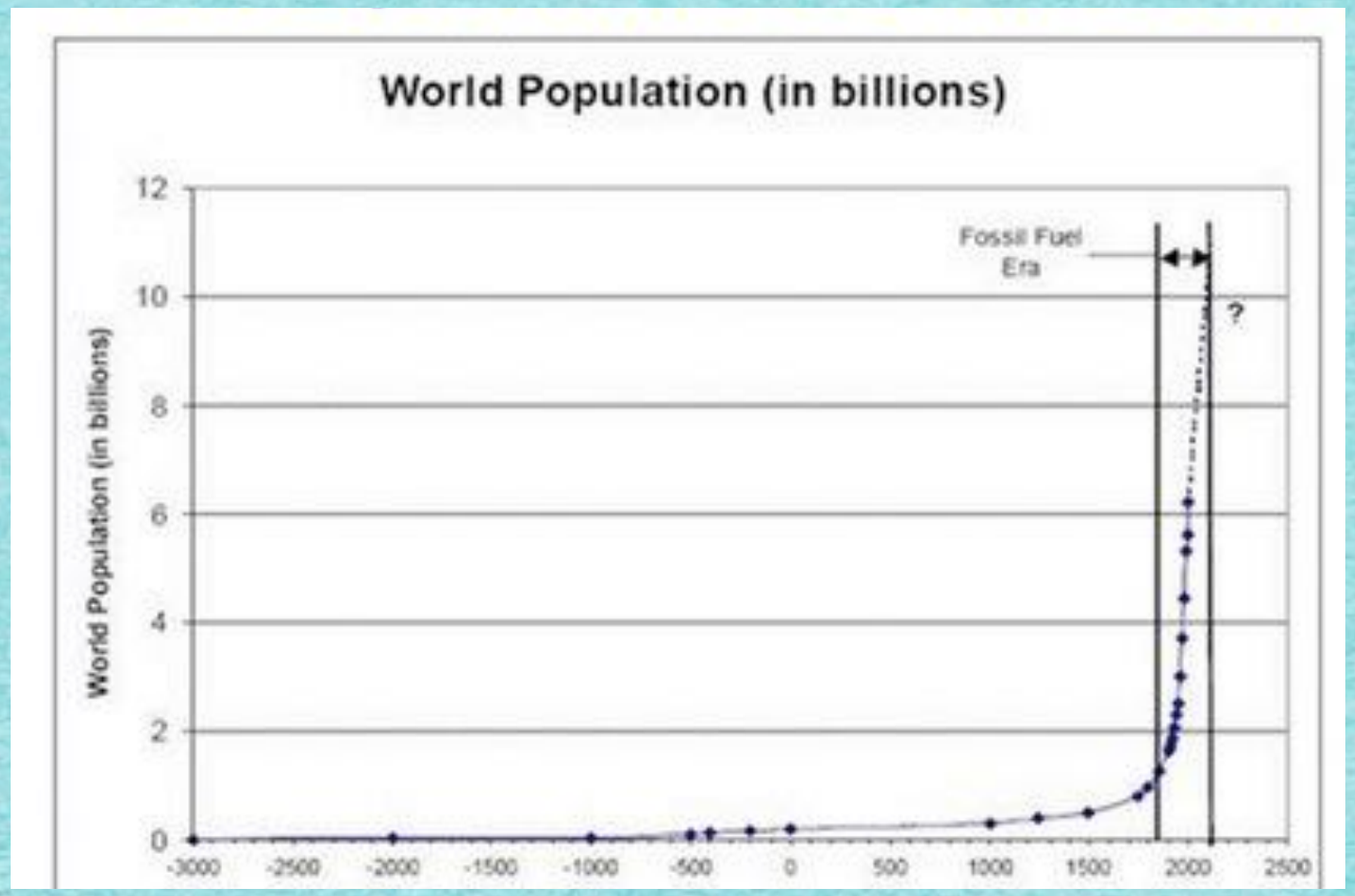
$$x_{n+1} = (1+q)x_n$$

Ergebnis:

$$x_n = (1+q)^n x_0$$

5.5.1 Logistische Rekursion

Exponentielles Wachstum:



Das geht nicht beliebig lange weiter!

5.5.1 Logistische Rekursion

Pierre-François Verhulst
(1804–1849)

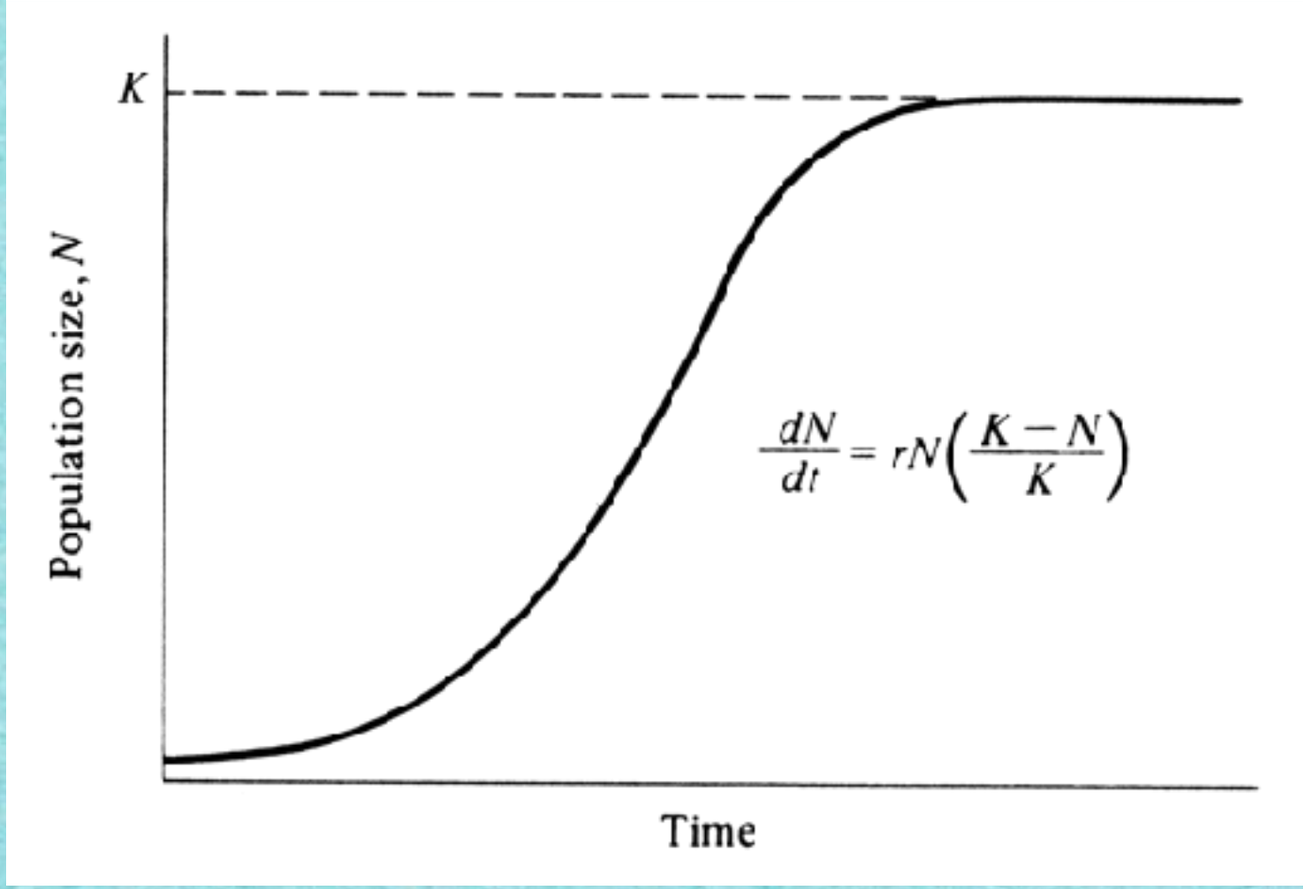
Notice sur la loi que la population pursuit dans son accroissement.

In: *Corresp. Math. Phys.*. 10, 1838, S. 113–121

“Notiz über das Gesetz, das die Bevölkerung bei ihrem Wachstum befolgt.”

5.5.1 Logistische Rekursion

Verhulst ursprünglich: Stetiger Prozess!



In Populationsdynamik beobachtet: Diskreter Prozess!

5.5.1 Logistische Rekursion

Zuwachs durch Fruchtbarkeit:

$$x_{n+1} = q_f x_n$$

Schwund durch Verhungern (etc.):

$$x_{n+1} = q_f (G - x_n)$$

Zusammen:

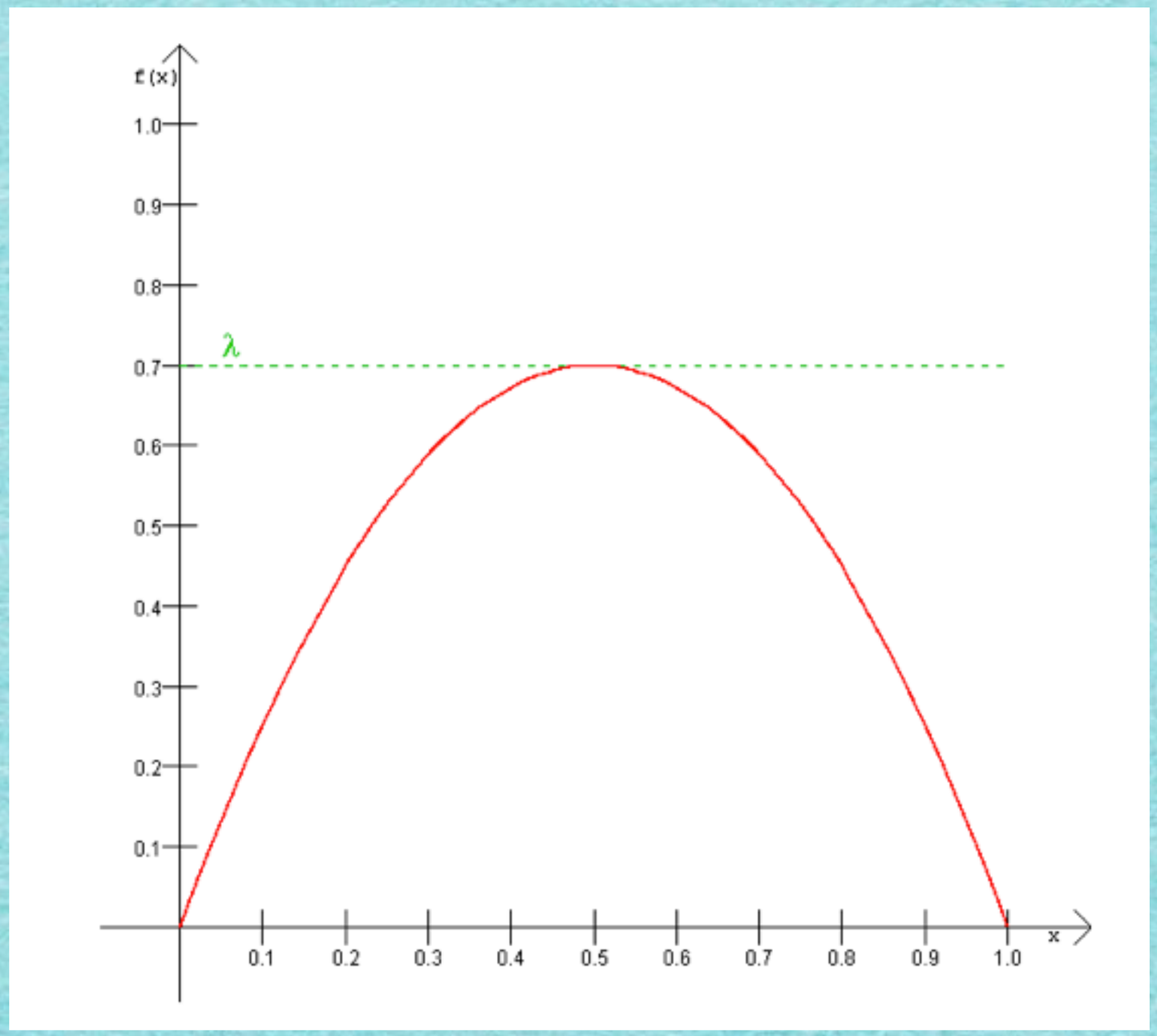
$$x_{n+1} = q_f q_v x_n (G - x_n)$$

Normiert:

$$x_{n+1} = r x_n (1 - x_n)$$

5.5.1 Logistische Rekursion

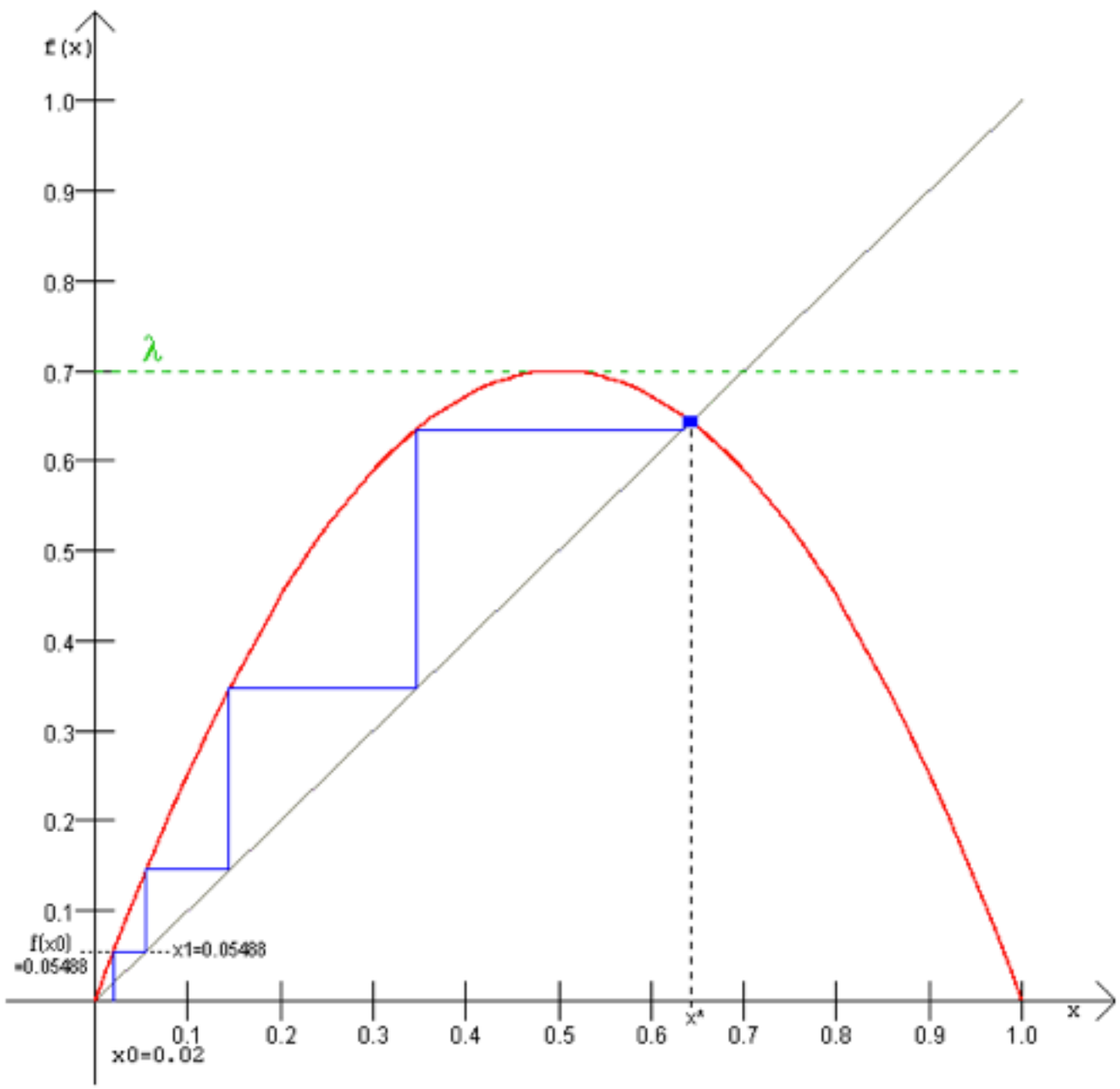
Bildlich:



5.5.1 Logistische Rekursion

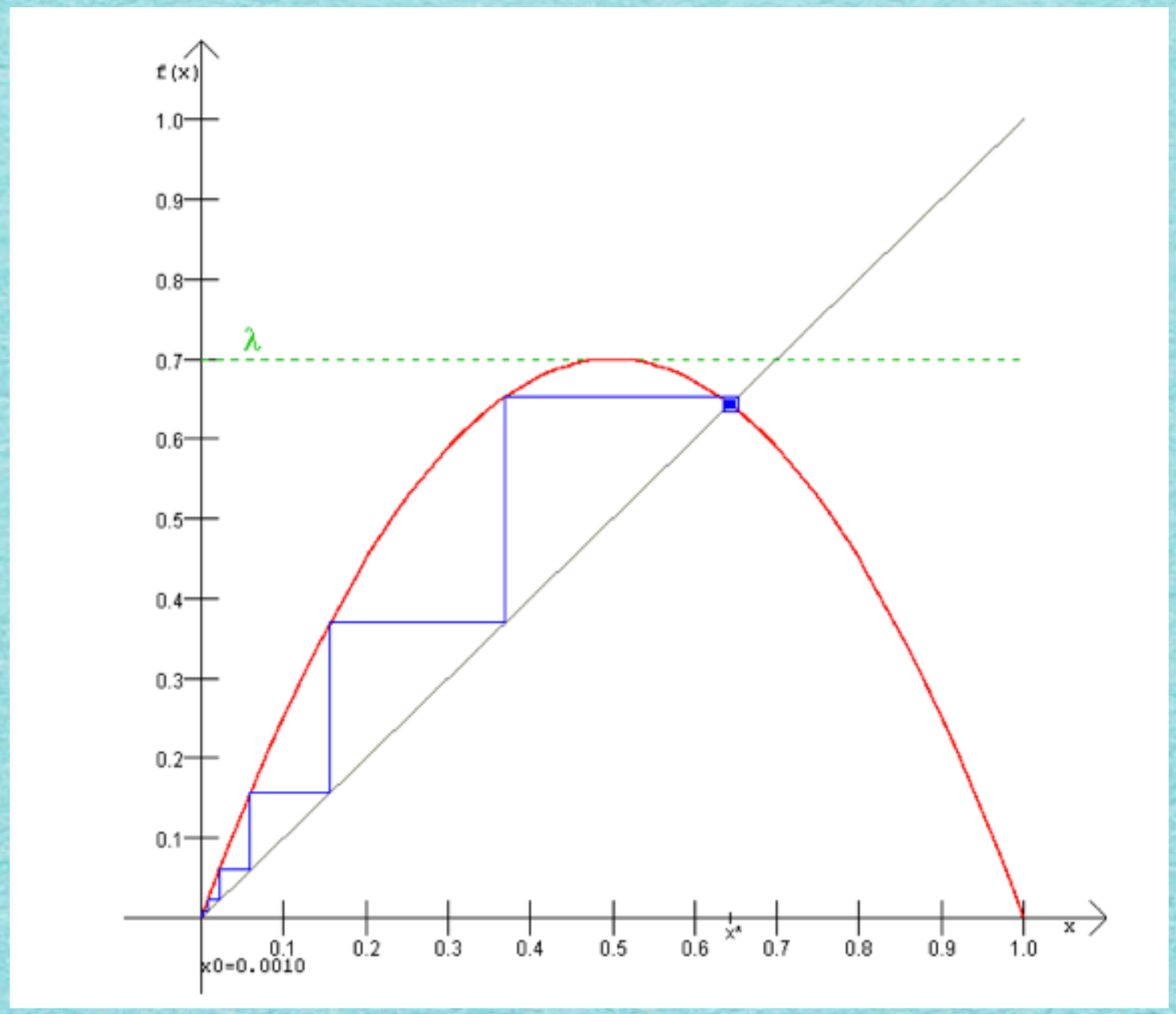
Rekursion:

x_n	$f(x_n) = x_{n+1}$
1	0.05488
2	0.14523092
3	0.34758892
4	0.63495841
5	0.64900143
6	0.63783600
7	0.64680346
8	0.63965648
9	0.64538899
10	0.64081372
11	0.64448019
12	0.64155133
13	0.64389702
14	0.64202221
15	0.64352313
16	0.64232311
17	0.64328357
18	0.64251549
19	0.64313014
20	0.64263854



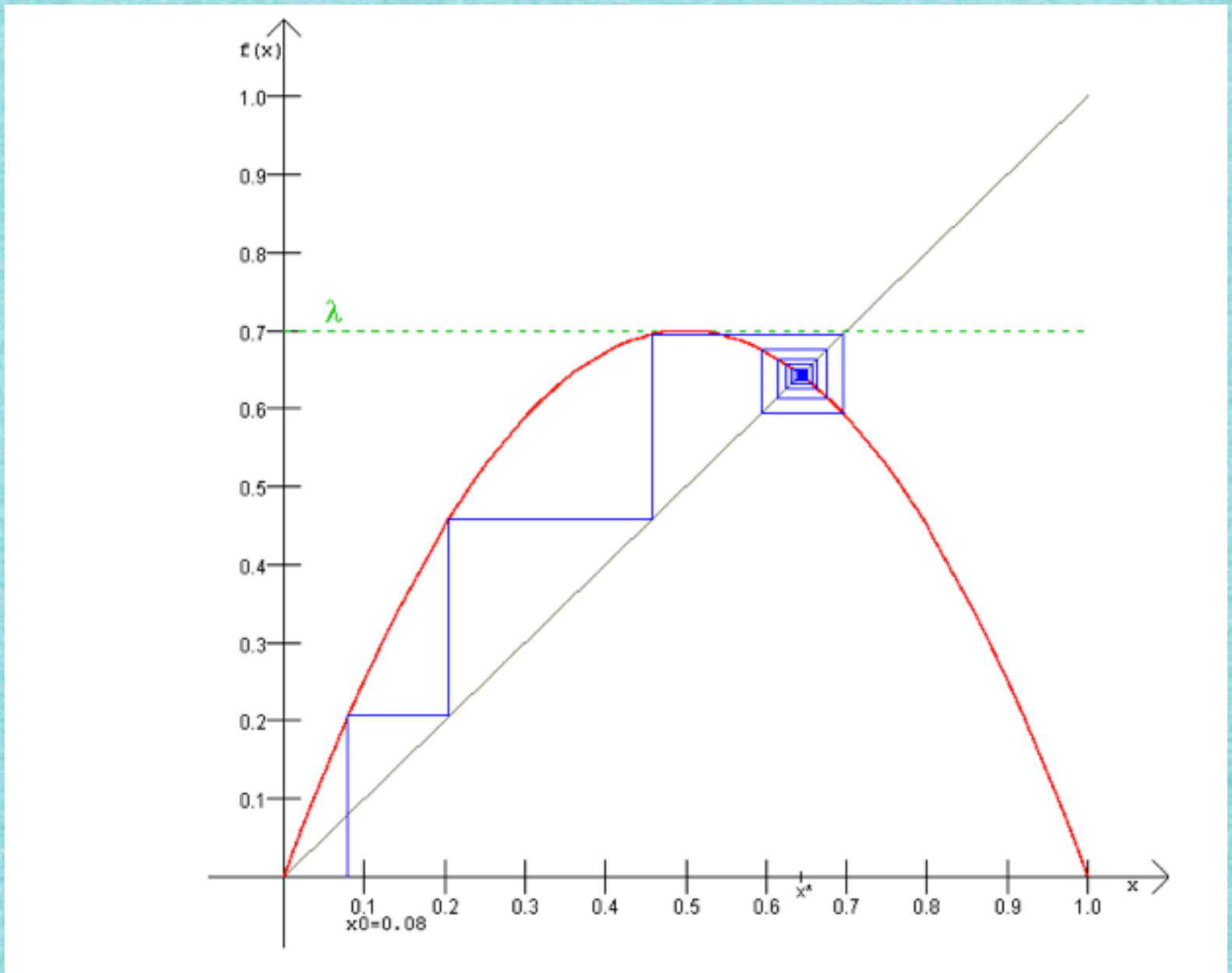
5.5.1 Logistische Rekursion

Rekursion strebt gegen Fixpunkt:



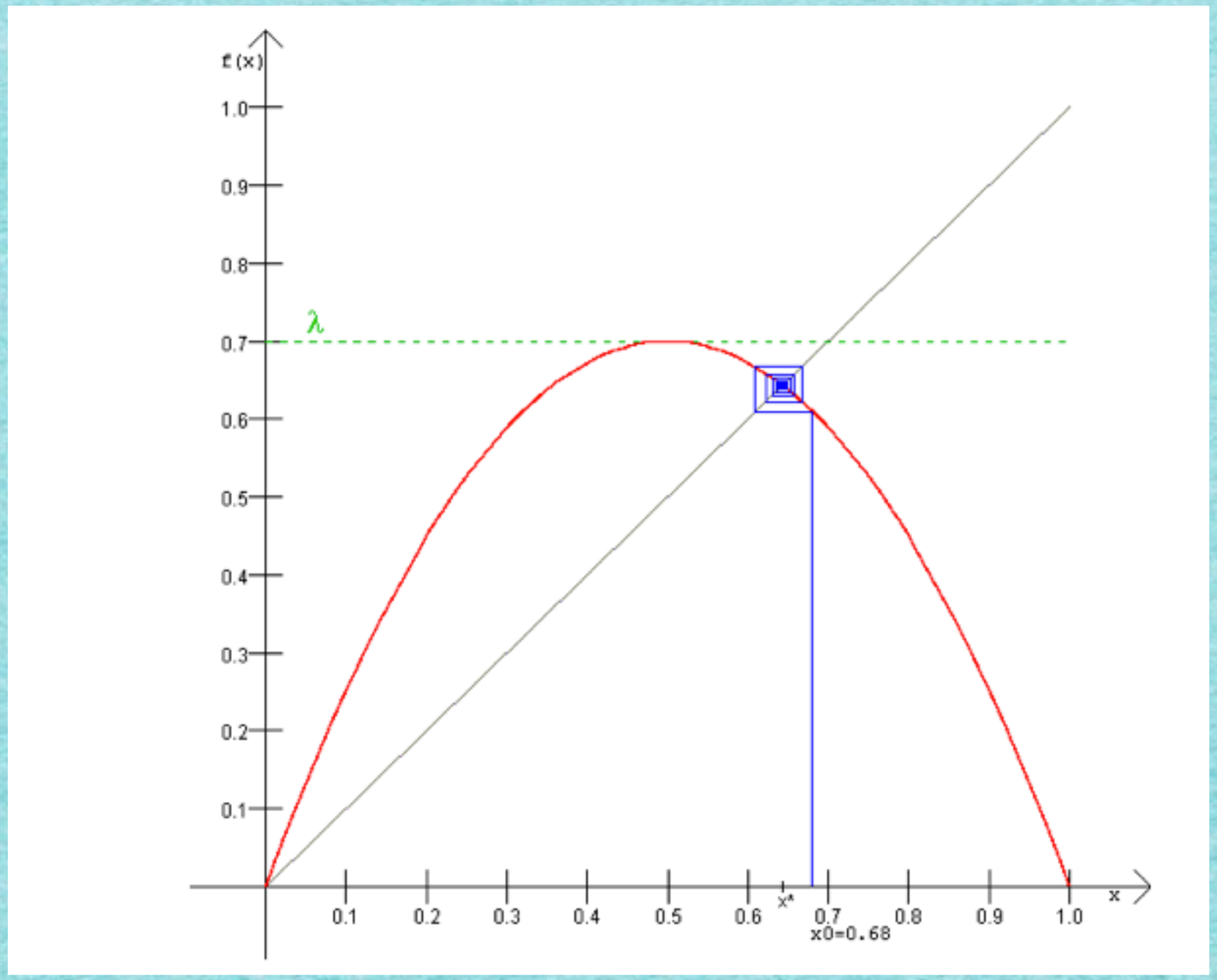
5.5.1 Logistische Rekursion

Rekursion strebt gegen Fixpunkt:



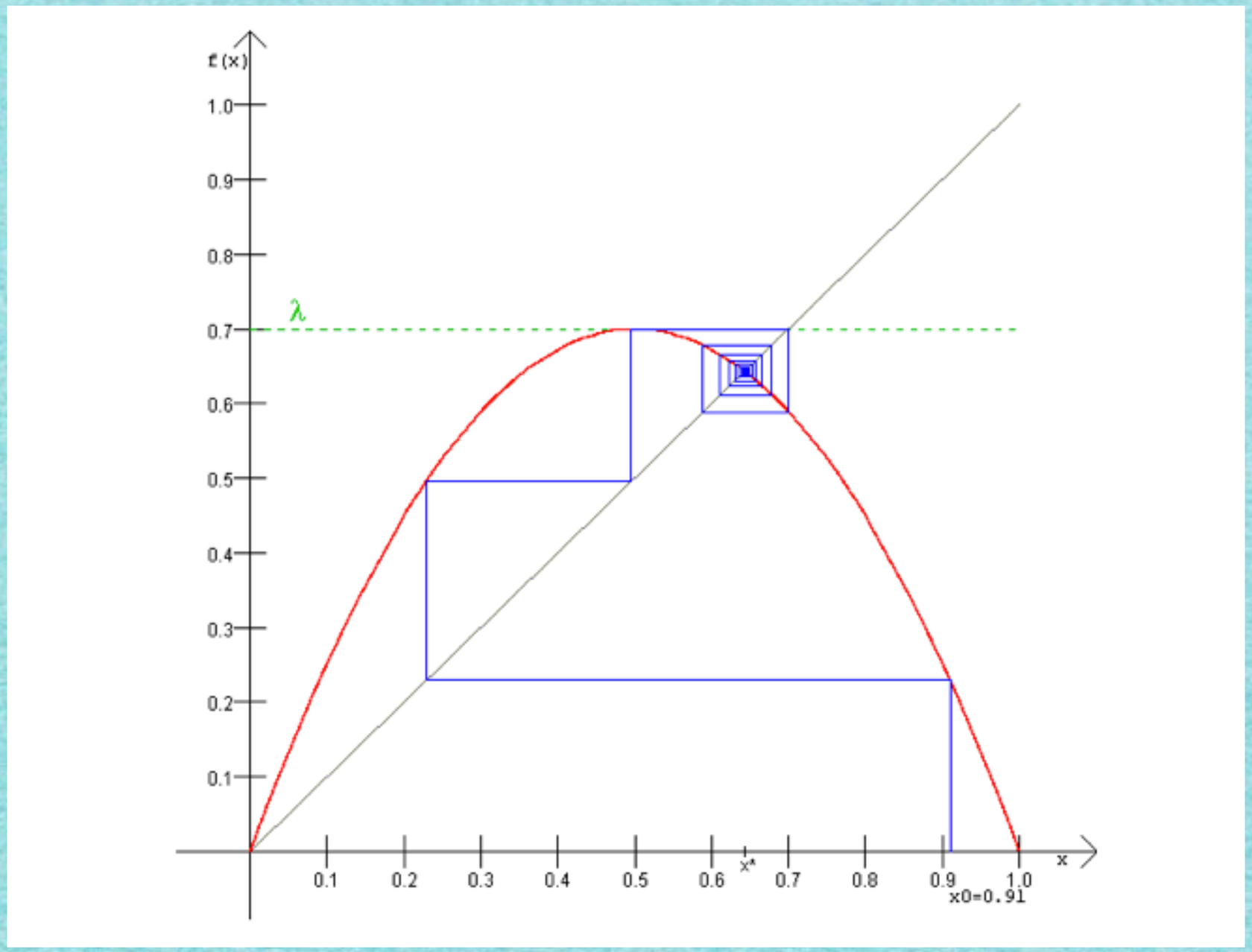
5.5.1 Logistische Rekursion

Rekursion strebt gegen Fixpunkt:



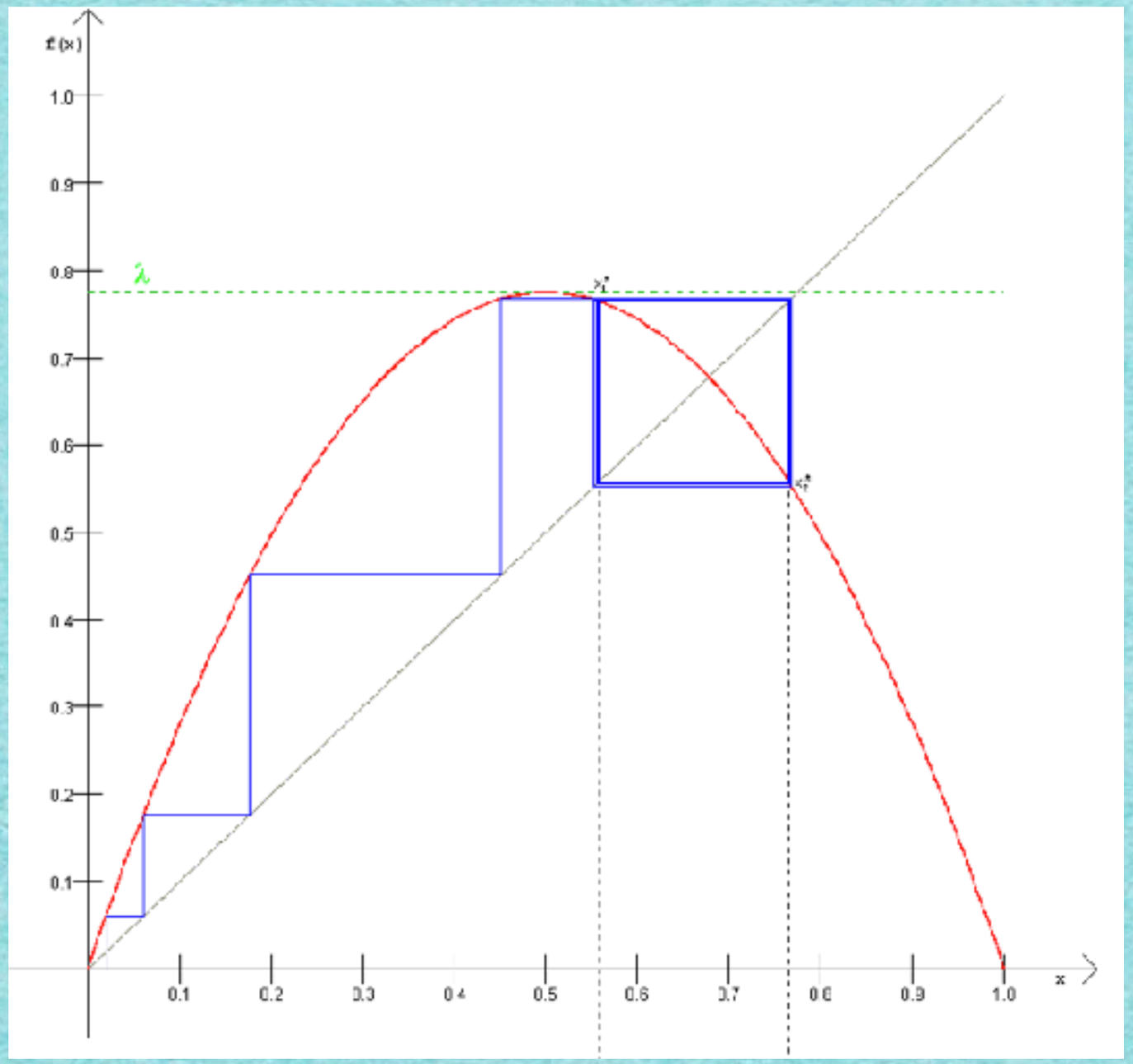
5.5.1 Logistische Rekursion

Rekursion strebt gegen Fixpunkt:



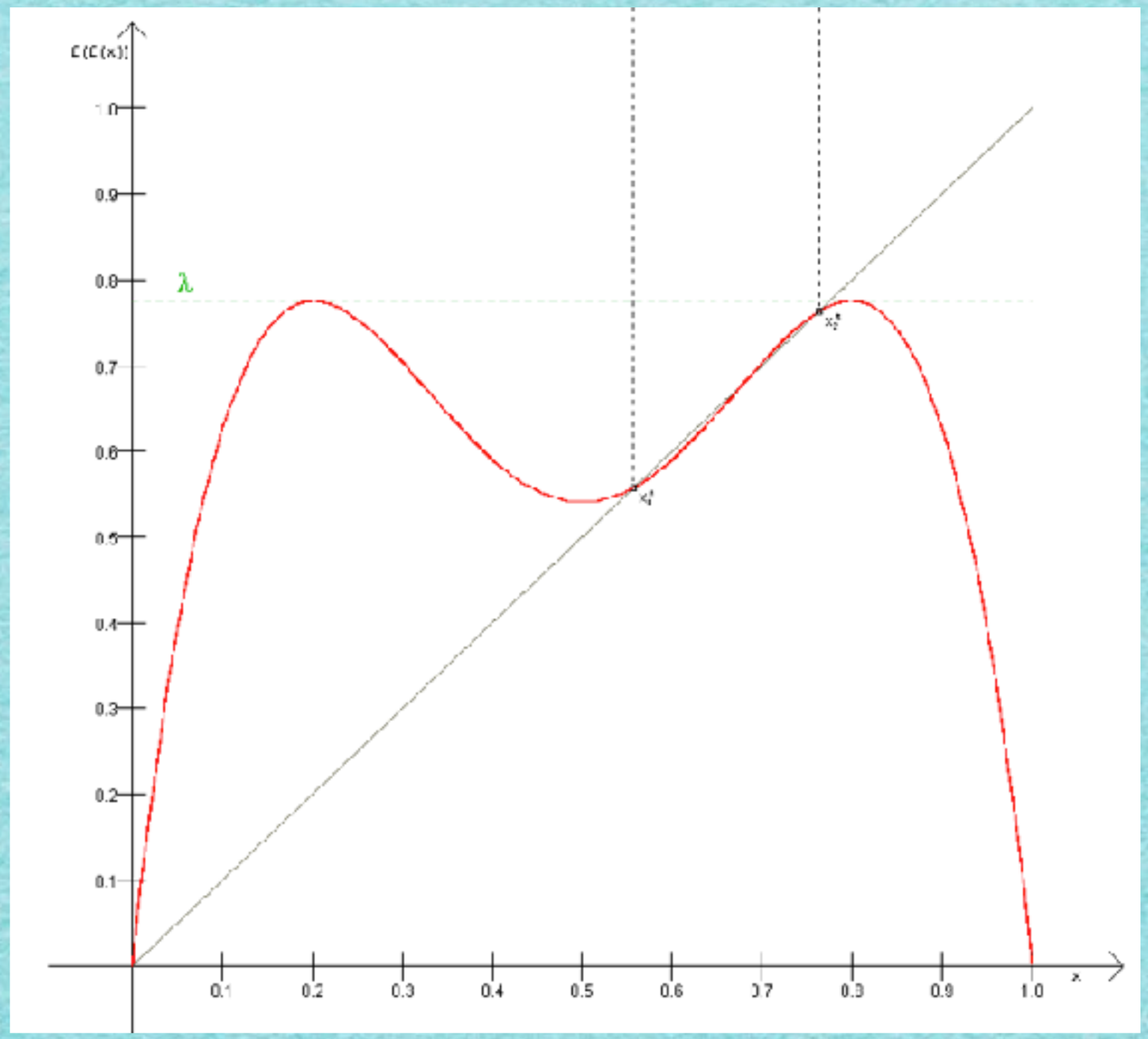
5.5.1 Logistische Rekursion

Zwei Fixpunkte!



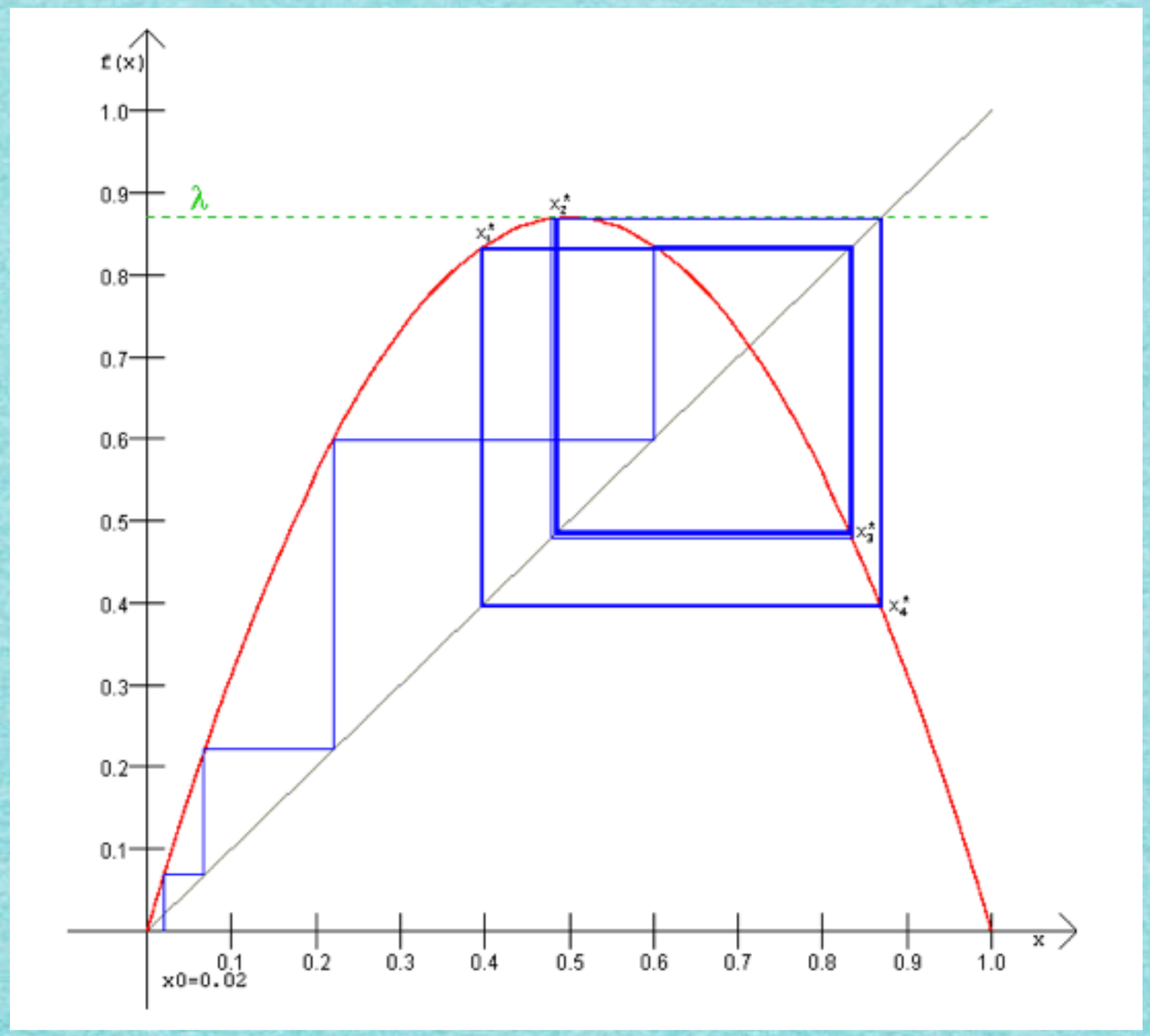
5.5.1 Logistische Rekursion

Zwei Fixpunkte!



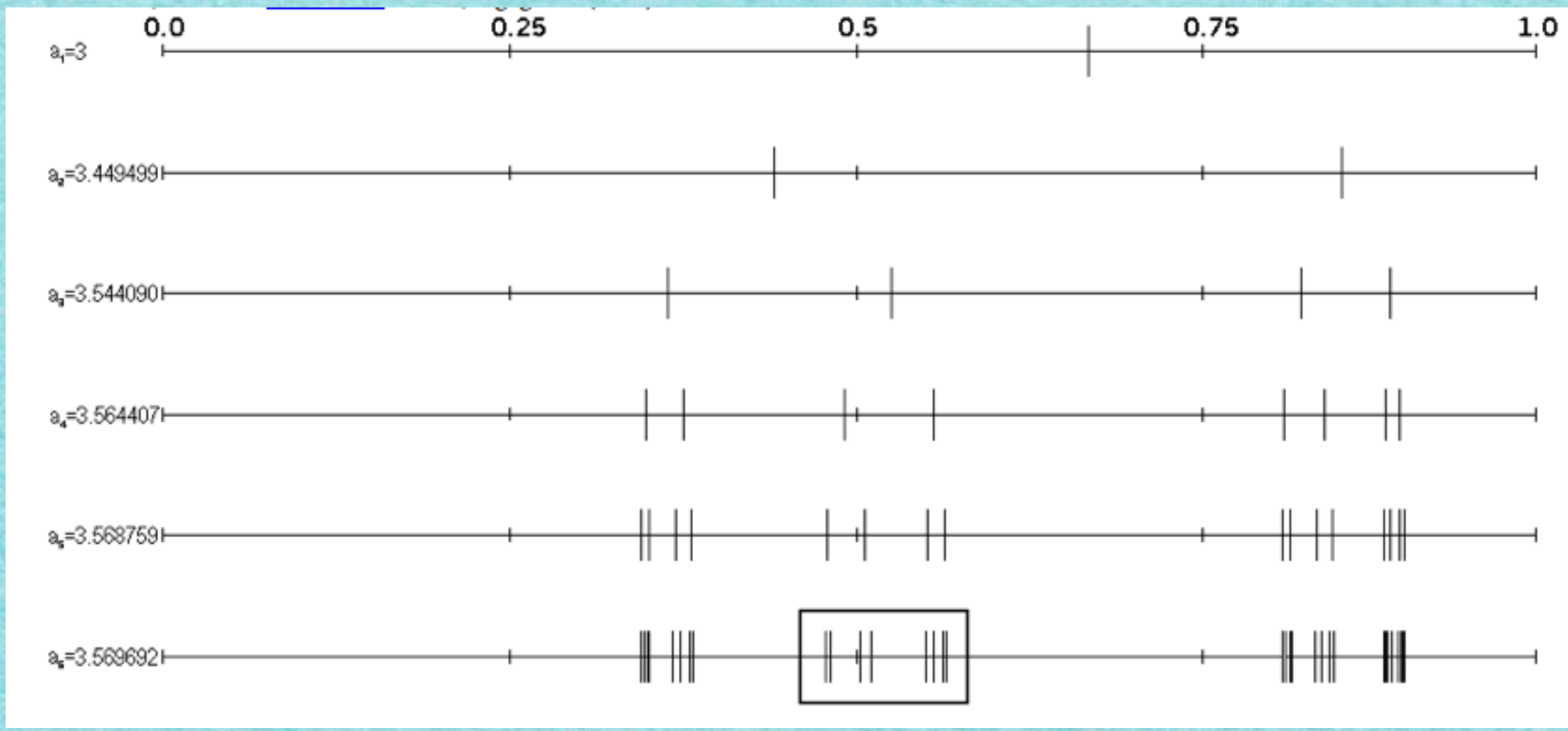
5.5.1 Logistische Rekursion

Vier Fixpunkte!



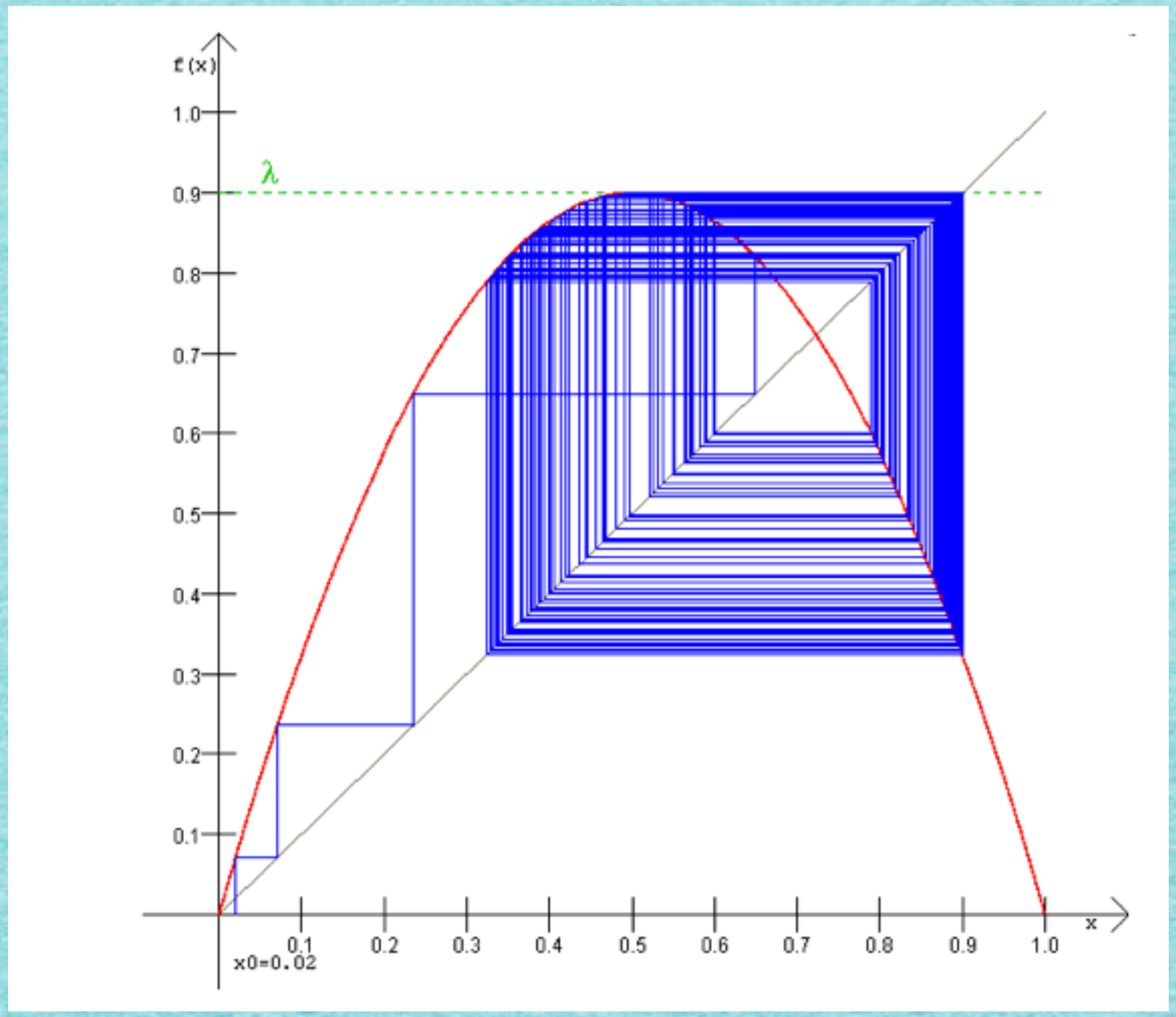
5.5.1 Logistische Rekursion

Entwicklung der Fixpunkte:



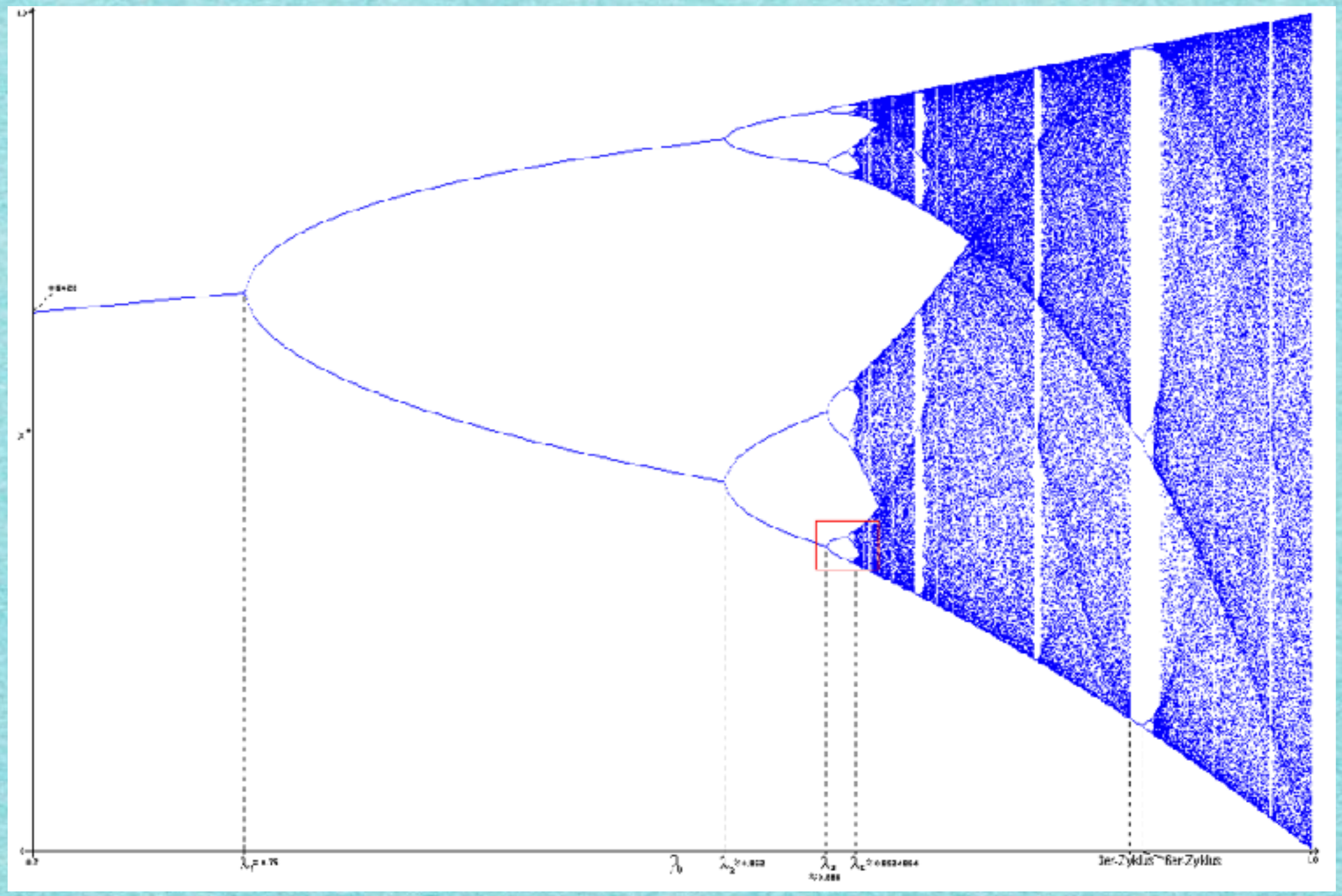
5.5.1 Logistische Rekursion

Keinerlei Fixpunkte - deterministisches Chaos:



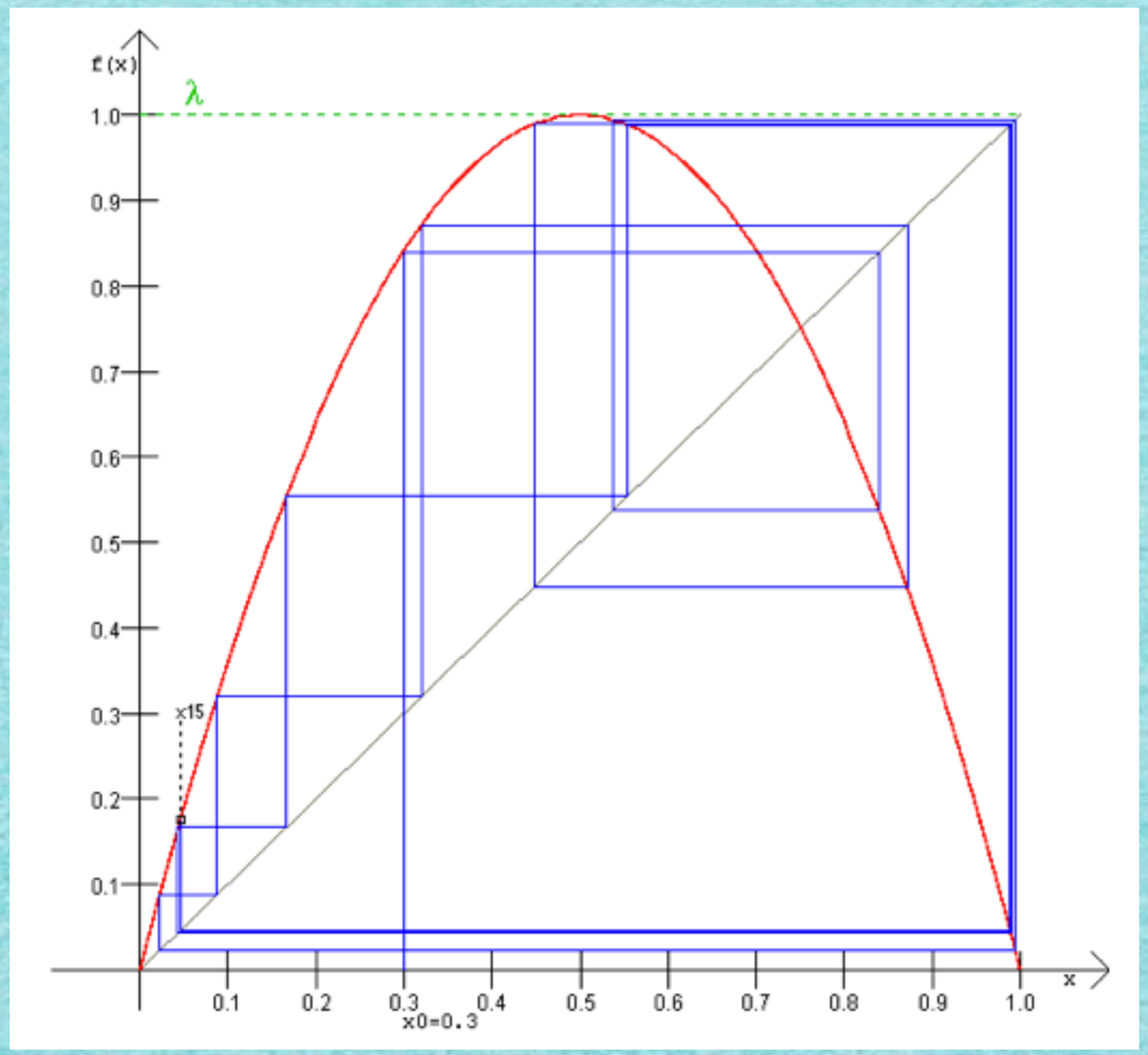
5.5.1 Logistische Rekursion

Bifurkationsdiagramm:



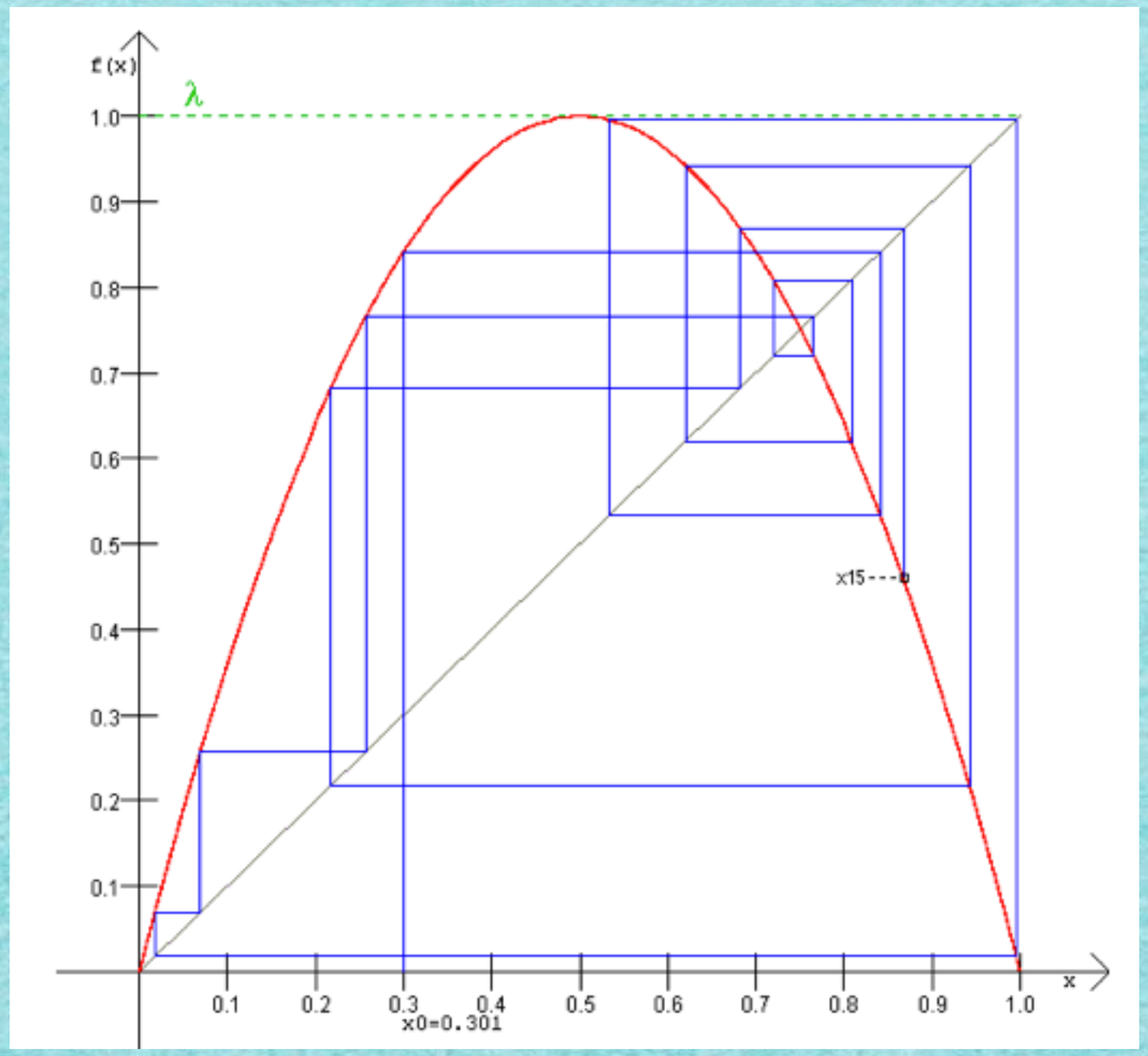
5.5.1 Logistische Rekursion

Kausalität?!



5.5.1 Logistische Rekursion

Kausalität?!

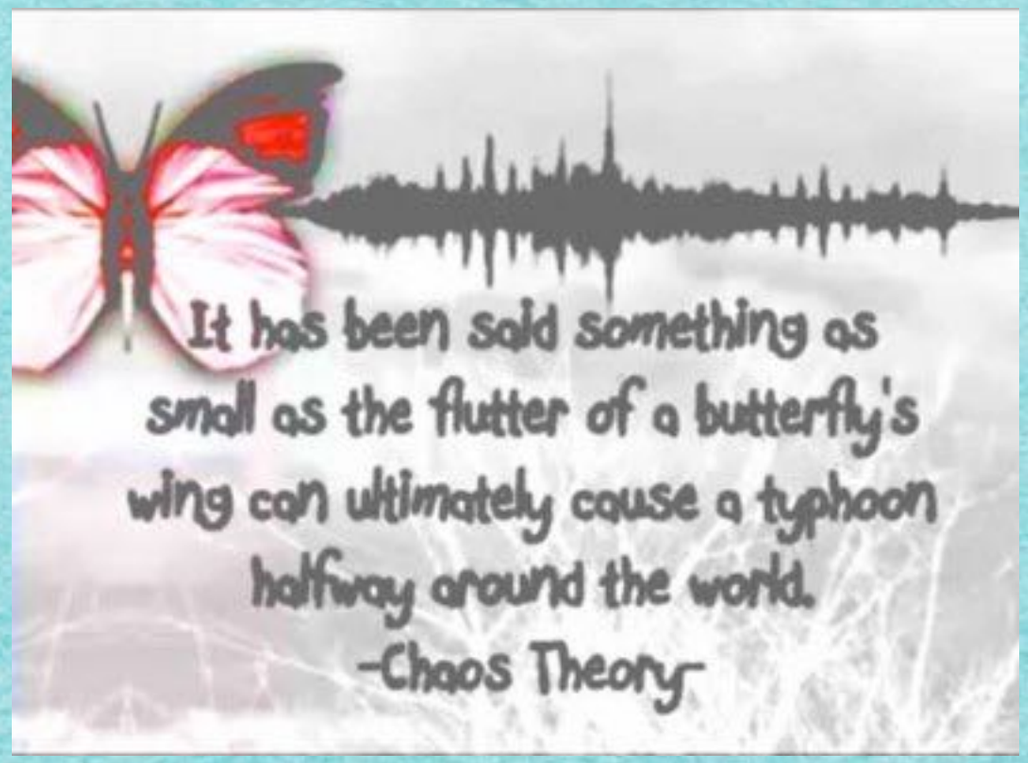


5.5.1 Logistische Rekursion

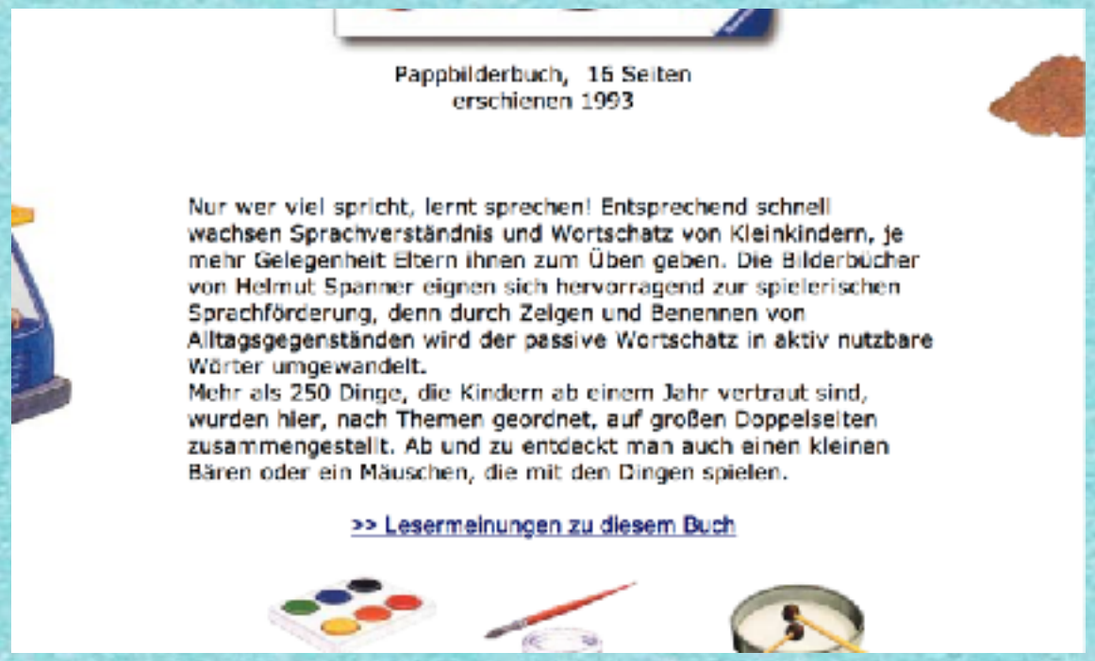
Edward Lorenz
(1917–2008)

Grenzen der Kausalität!

Predictability: Does the flap of a butterfly's wings in Brazil set off a tornado in Texas?



5.5.2 Frühkindliche Bildung



Pappbilderbuch, 16 Seiten
erschienen 1993

Nur wer viel spricht, lernt sprechen! Entsprechend schnell wachsen Sprachverständnis und Wortschatz von Kleinkindern, je mehr Gelegenheit Eltern ihnen zum Üben geben. Die Bilderbücher von Helmut Spanner eignen sich hervorragend zur spielerischen Sprachförderung, denn durch Zeigen und Benennen von Alltagsgegenständen wird der passive Wortschatz in aktiv nutzbare Wörter umgewandelt.
Mehr als 250 Dinge, die Kindern ab einem Jahr vertraut sind, wurden hier, nach Themen geordnet, auf großen Doppelseiten zusammengestellt. Ab und zu entdeckt man auch einen kleinen Bären oder ein Mäuschen, die mit den Dingen spielen.

>> Lesermeinungen zu diesem Buch

5.5.2 Frühkindliche Bildung

$$X_{n+1} = X_n^2 - Y_n^2 - C_x$$
$$Y_{n+1} = 2X_nY_n - C_y$$

$$Z_n = X_n + iY_n$$
$$C = C_x + iC_y$$

$$Z_{n+1} = Z_n^2 - C$$

5.5.2 Die Mandelbrotmenge

Noch einmal quadratische Rekursion:

$$z_{n+1} = z_n^2 + c \qquad z_0 = 0$$

Für welche Werte c bleibt das beschränkt?

$$c = -2 : 0, -2, 2, 2, \ldots$$

$$c = 1/4 : 0, 0.25, 0.3125, 0.3476, 0.3708, 0.3875, 0.4001, 0.4101, \ldots$$

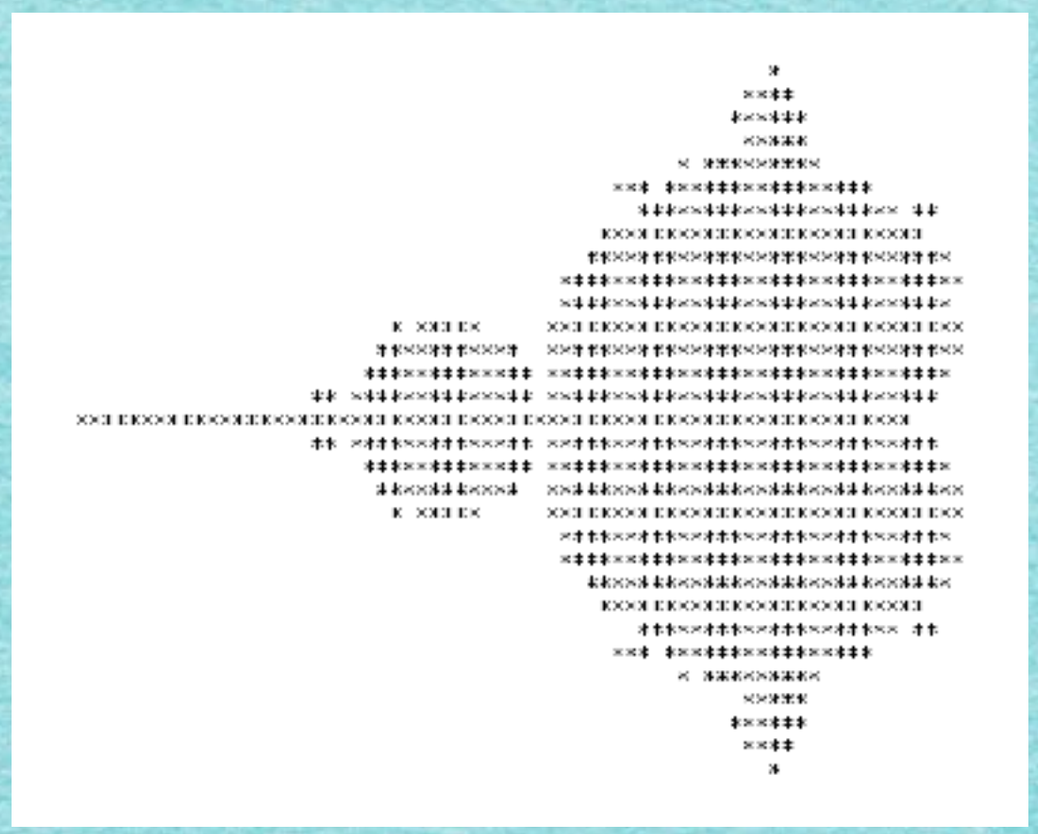
Man kann das auf die logistische Iteration abbilden...

5.5.2 Die Mandelbrotmenge

Noch einmal quadratische Rekursion:

$$z_{n+1} = z_n^2 + c \qquad z_0 = 0$$

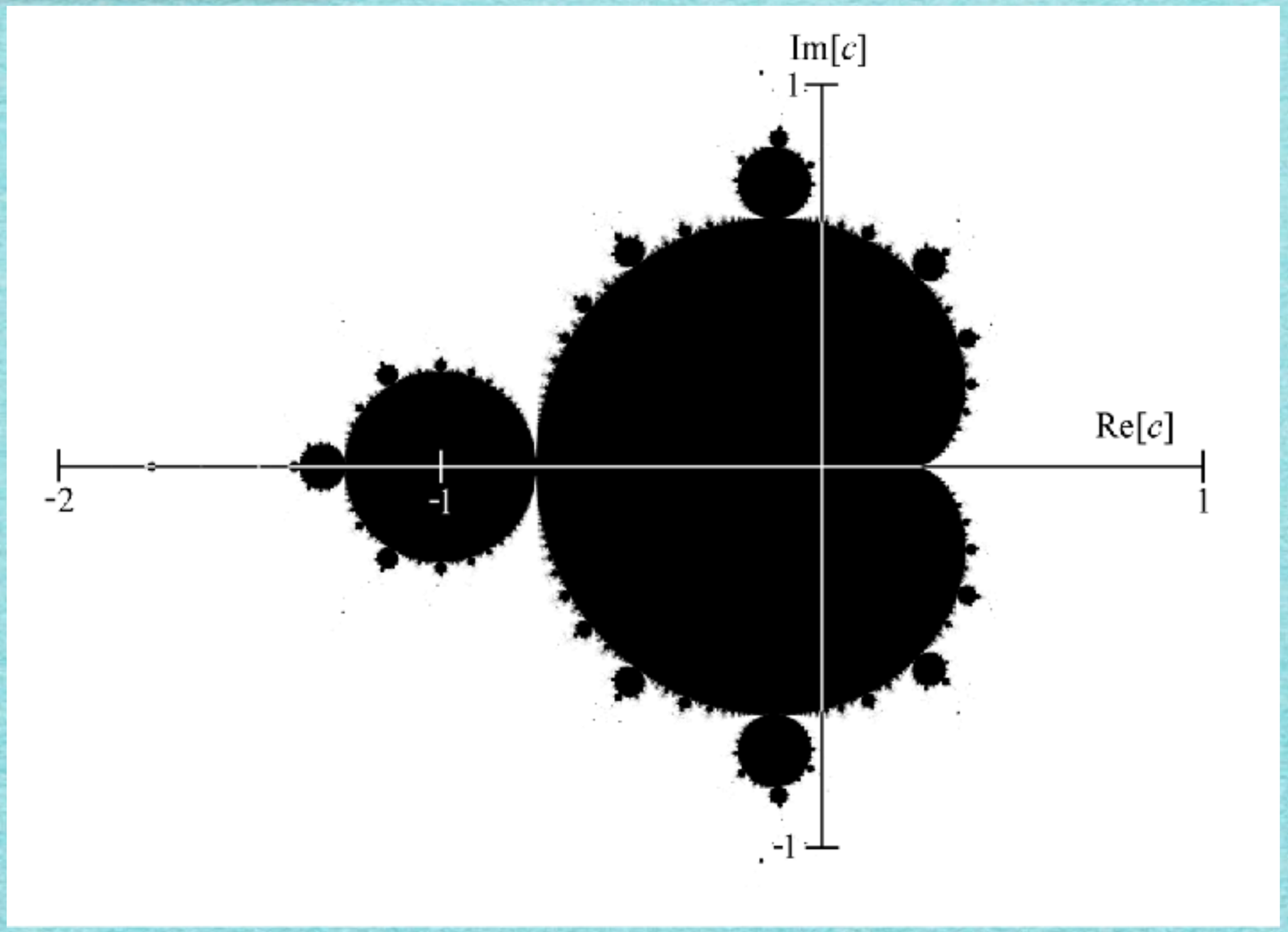
Für welche *komplexen* Werte c bleibt das beschränkt?



Brooks & Matelsky (1978)

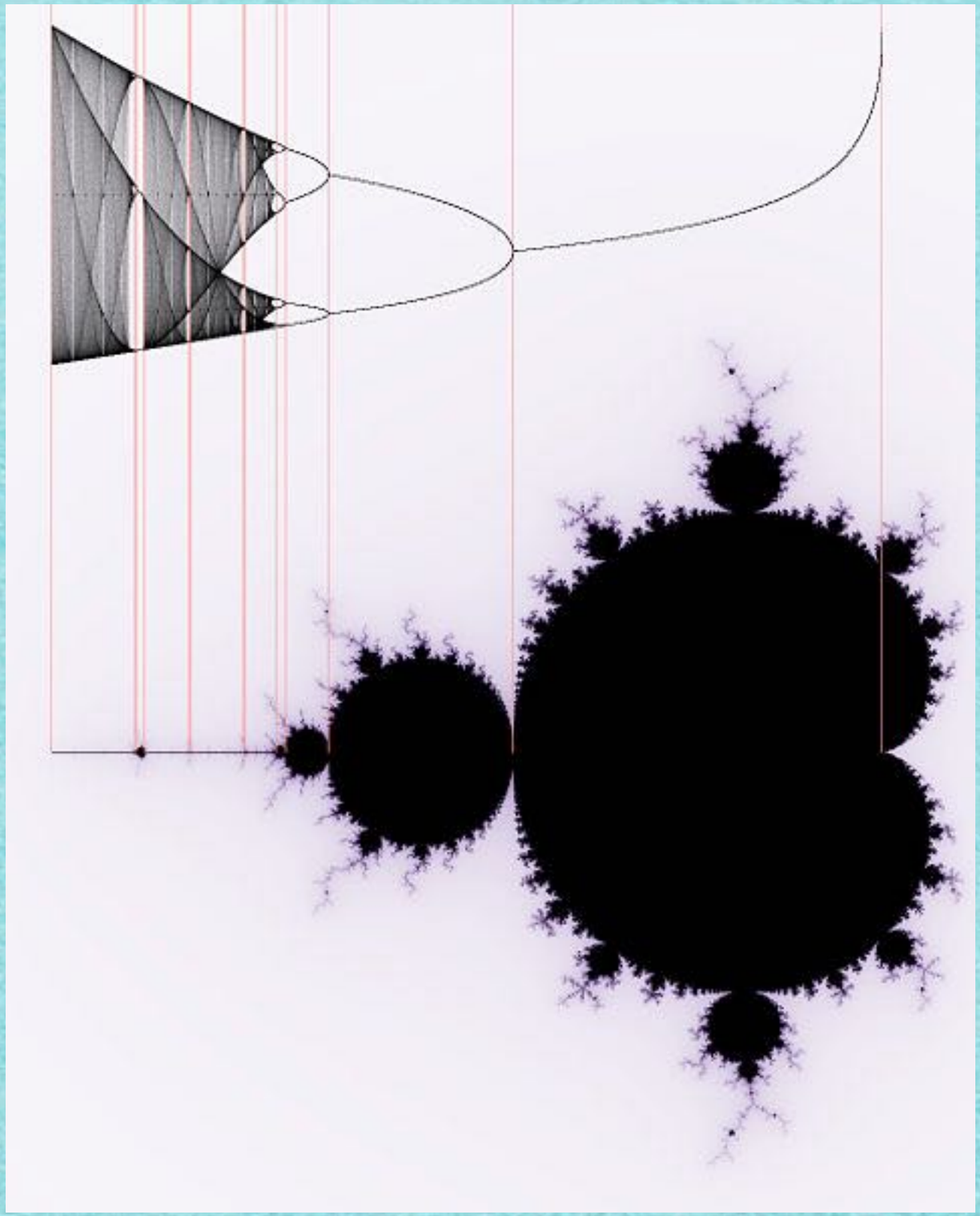
5.5.2 Die Mandelbrotmenge

Besser aufgelöst:



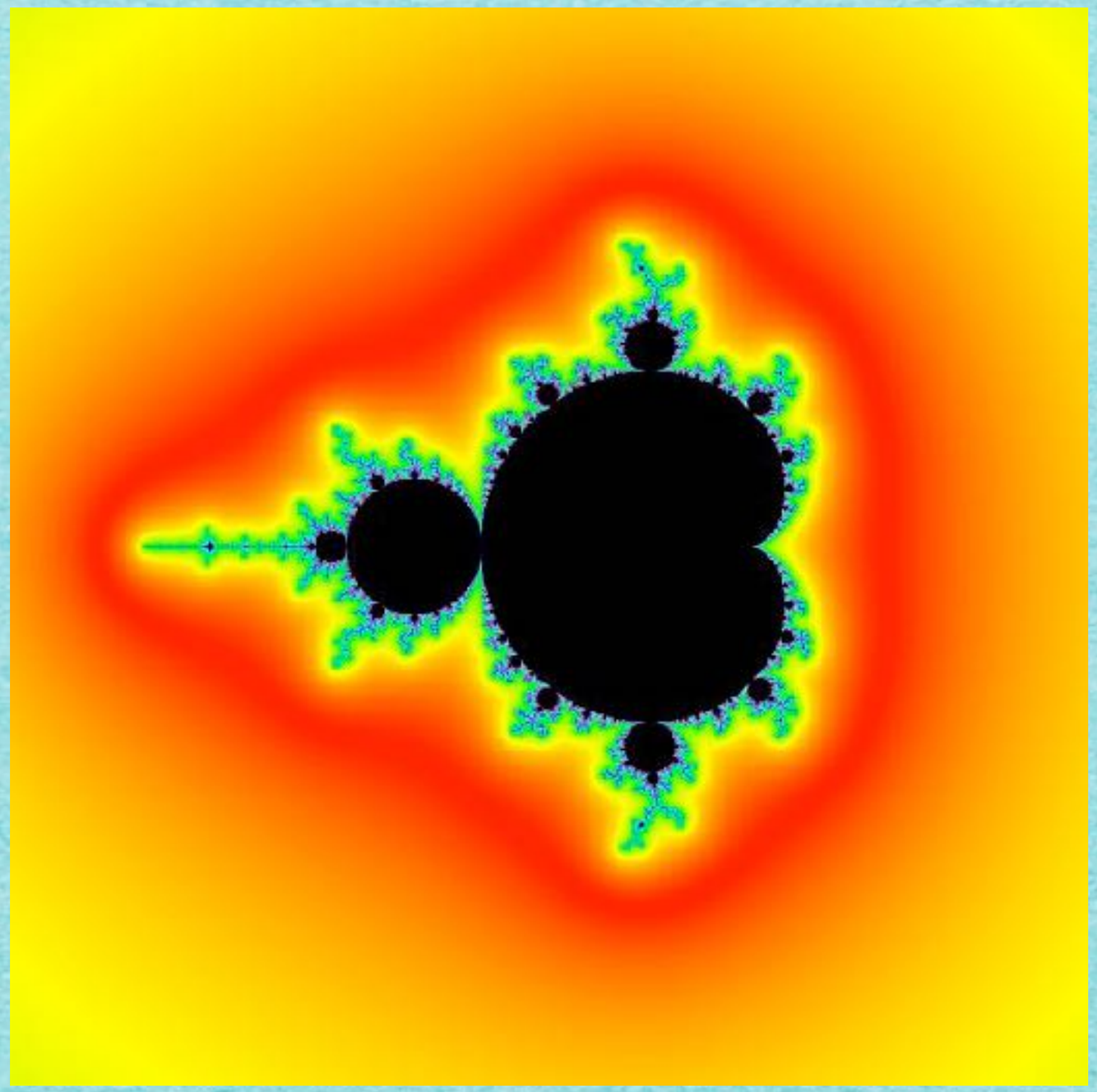
5.5.2 Die Mandelbrotmenge

Realteil auf die logistische Iteration abgebildet:



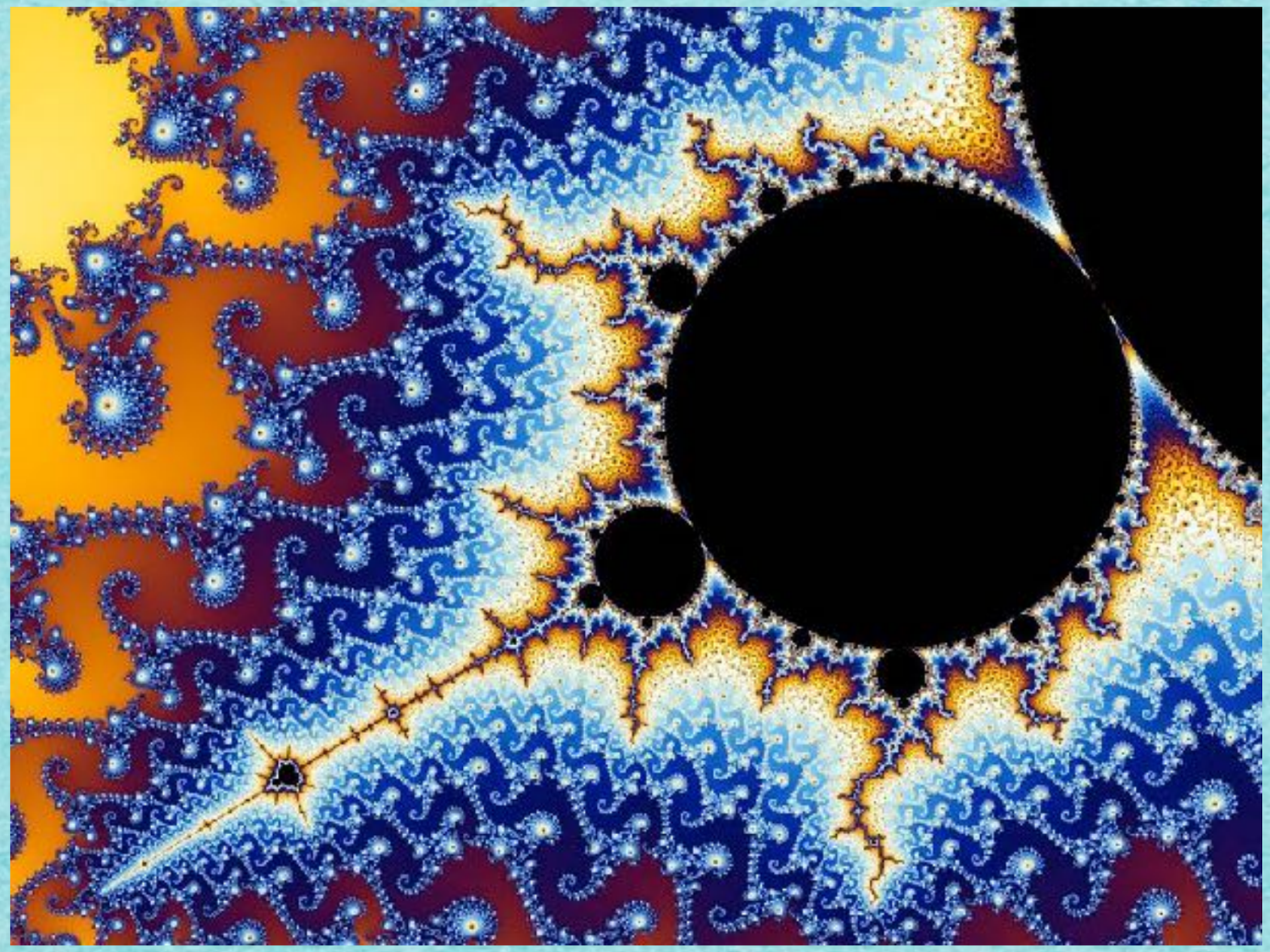
5.5.2 Die Mandelbrotmenge

Farbig:



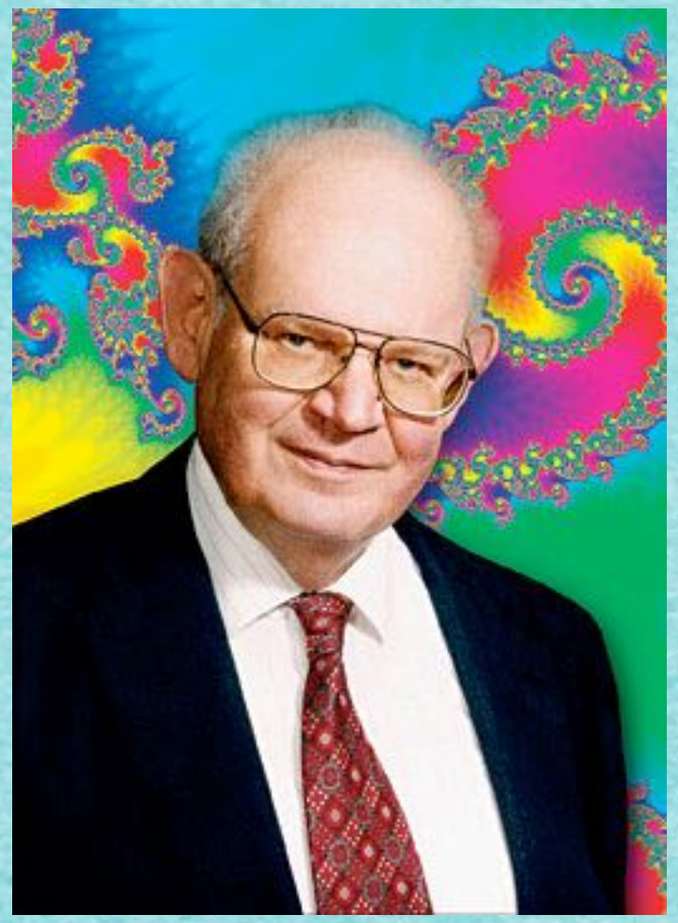
5.5.2 Die Mandelbrotmenge

Ausschnitt:



-> Filme!

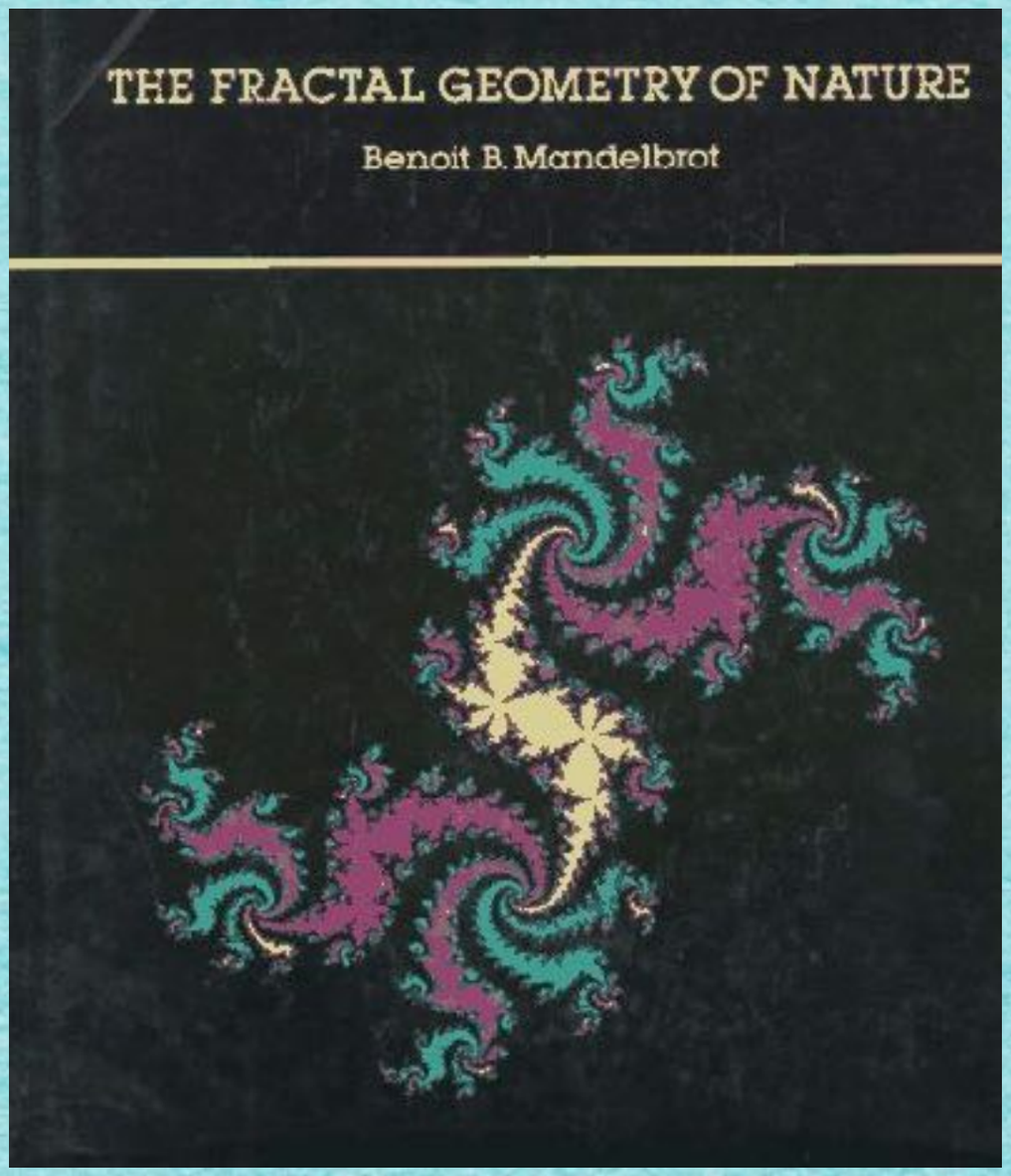
5.5.2 Die Mandelbrotmenge



Benoît Mandelbrot
(1924–2010)

Erste Dauerprofessur:
1999

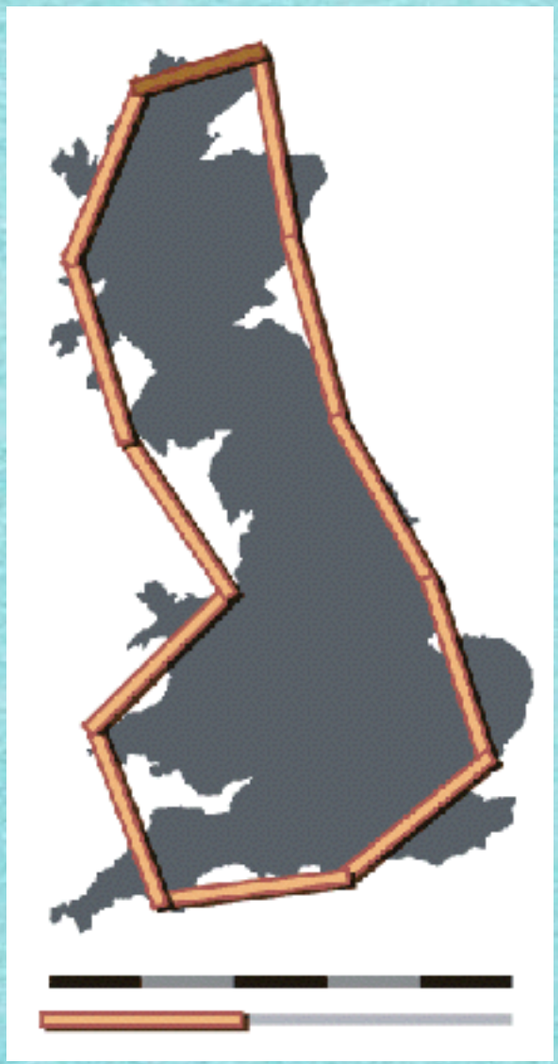
Fractal Geometry of Nature
(1982)



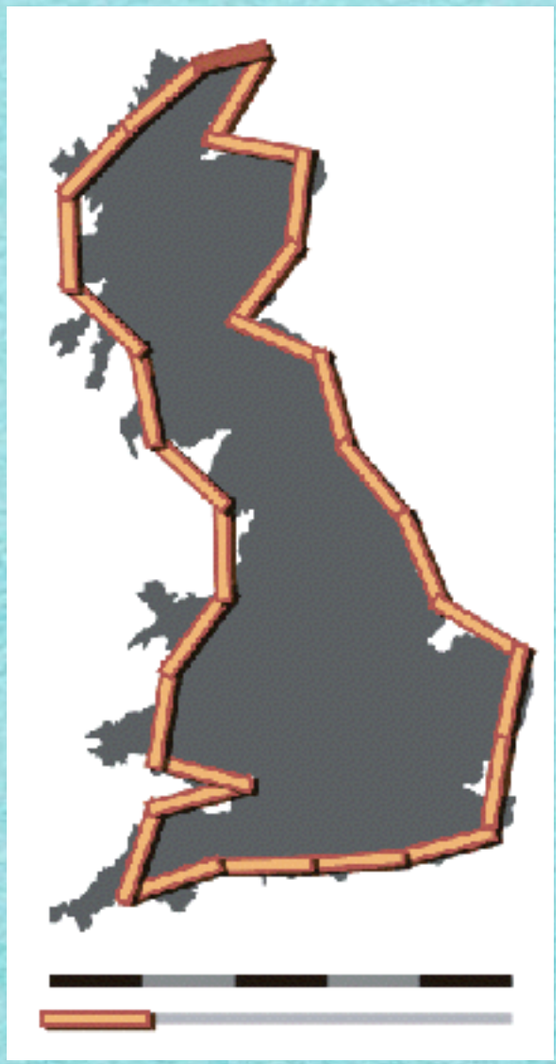
5.5.3 Fraktale

Mandelbrot (1967)

How long is the coast line of Britain?



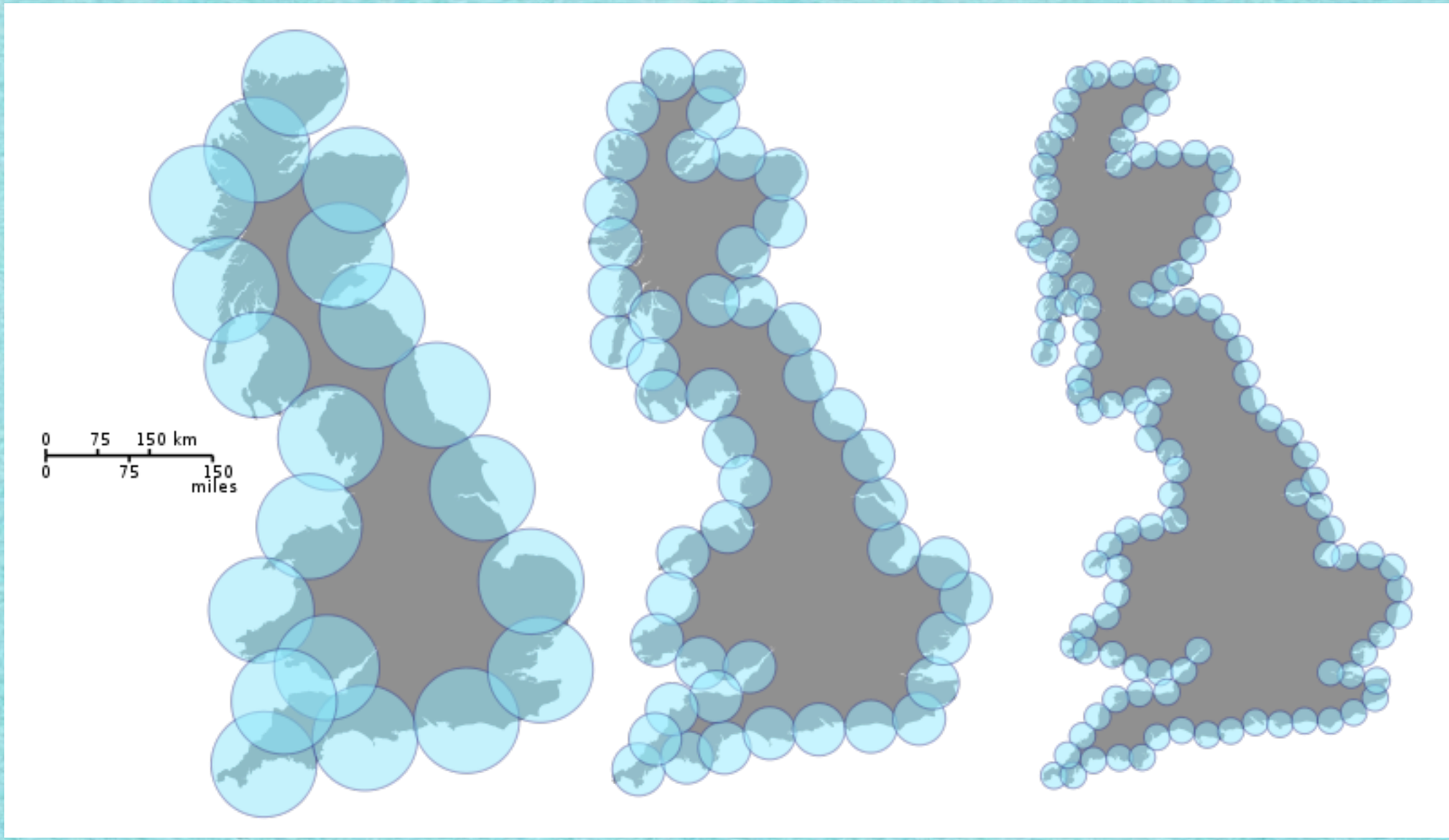
Maßstab 200km: 2350km



Maßstab 100km: 2775km

Maßstab 50km: 3425km

5.5.3 Fraktale



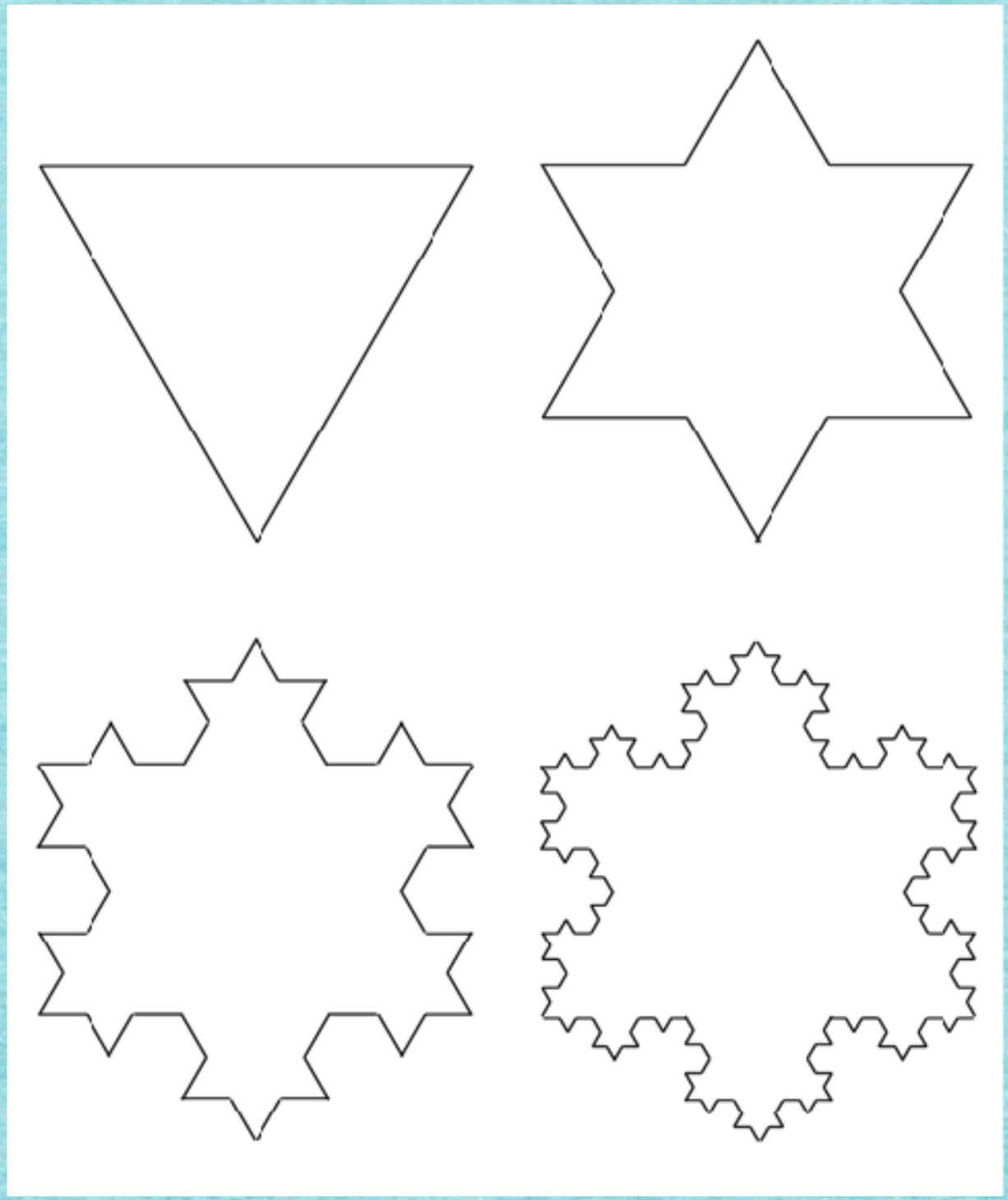
Hausdorff-Dimension:
Wie wächst das Gesamtmaß in Abhängigkeit von der Größe?

5.5.3 Fraktale

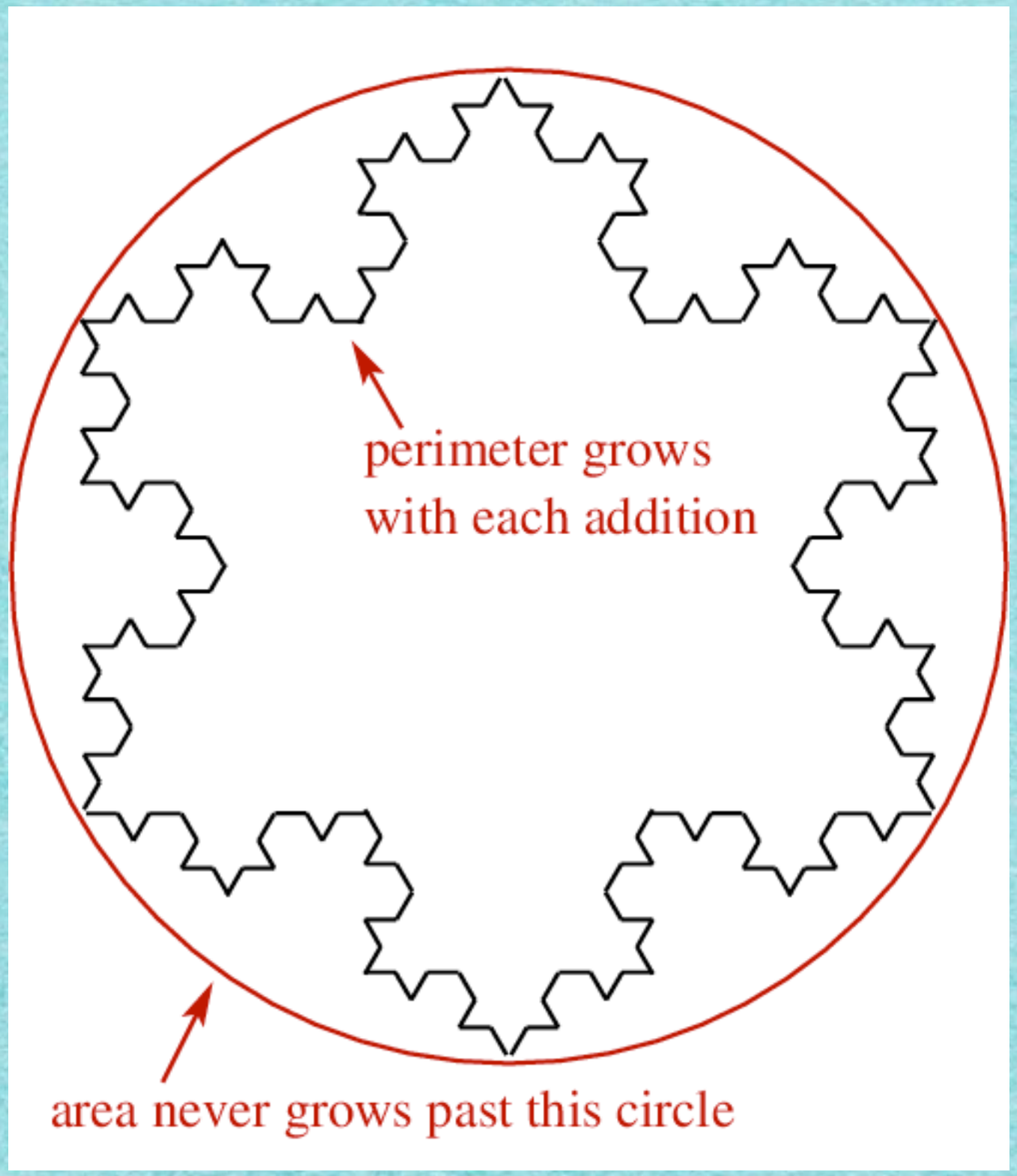
Niels Fabian Helge Hartmut von Koch (1870–1924)

Schneeflockenkurve

(1904)



5.5.3 Fraktale

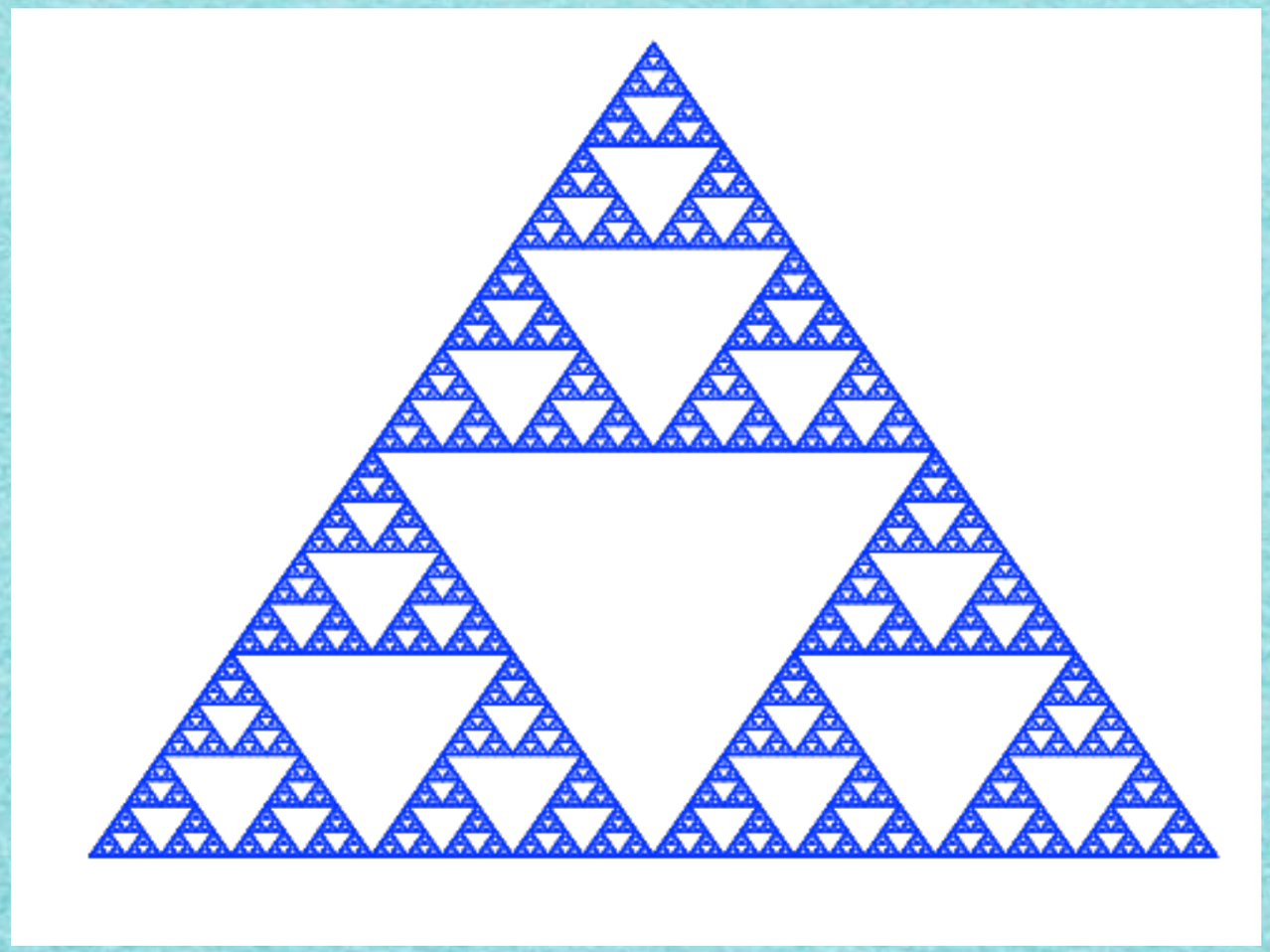


Pro Iteration:
Länge wächst um
Faktor 4/3

Hausdorff-Dimension
des Randes:
log(4)/log(3)
= 1.2618595...

Fläche:
Länge wächst um
Faktor 4/3

5.5.3 Fraktale



Szierpinski-Dreieck: Fläche schrumpft um Faktor 3/4 pro Iteration

Hausdorff-Dimension der Fläche: log(3)/log(2) = 1.5849625...

5.5.3 Fraktale

Fraktale in der Natur:

Romanesco

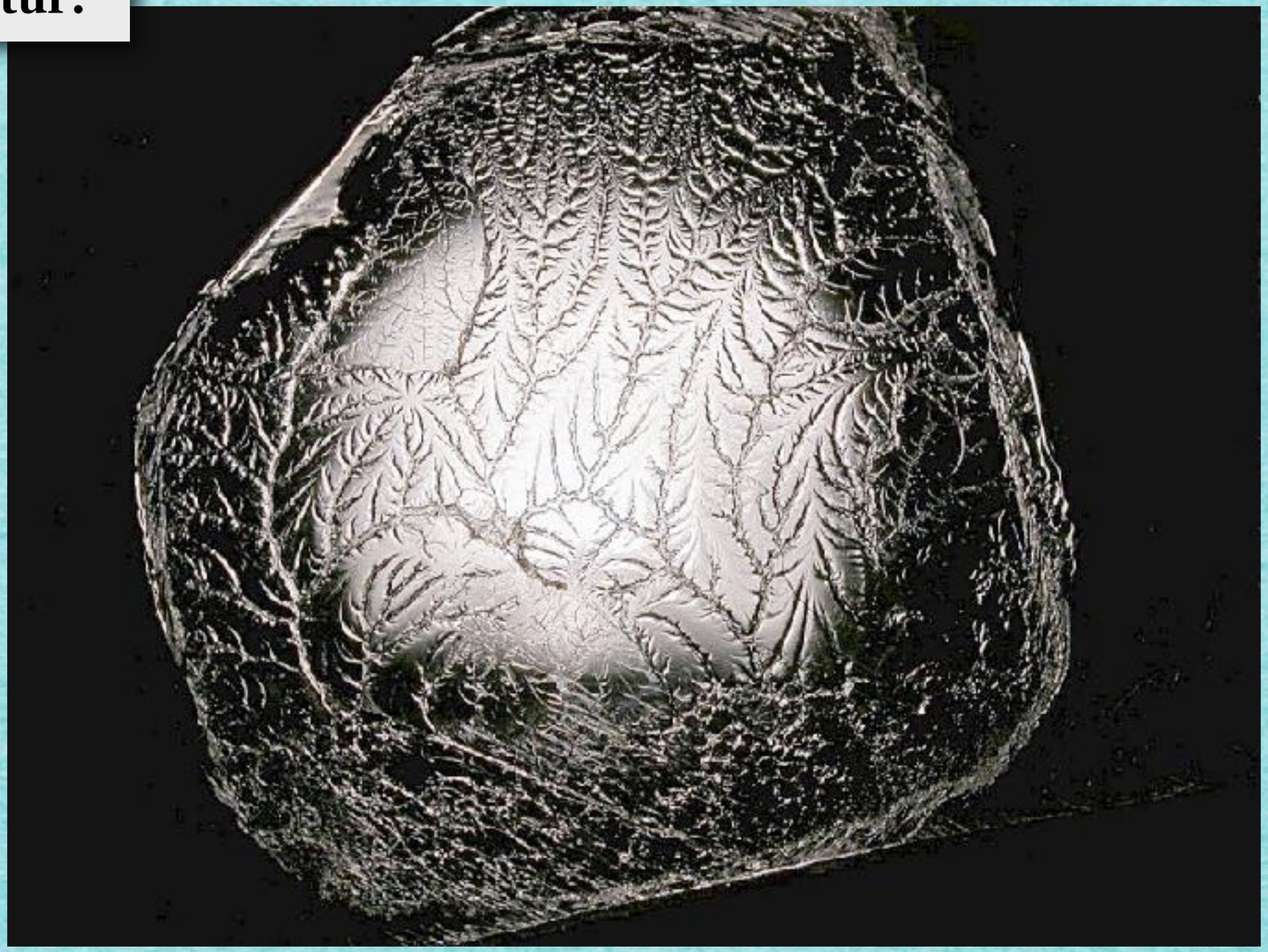
5.5.3 Fraktale

Fraktale in der Natur:

Eiskristalle

5.5.3 Fraktale

Fraktale in der Natur:



Adhäsionsmuster

5.5.3 Fraktale

Fraktale in der Natur:

Muster elektrischer Entladung

5.5.3 Fraktale

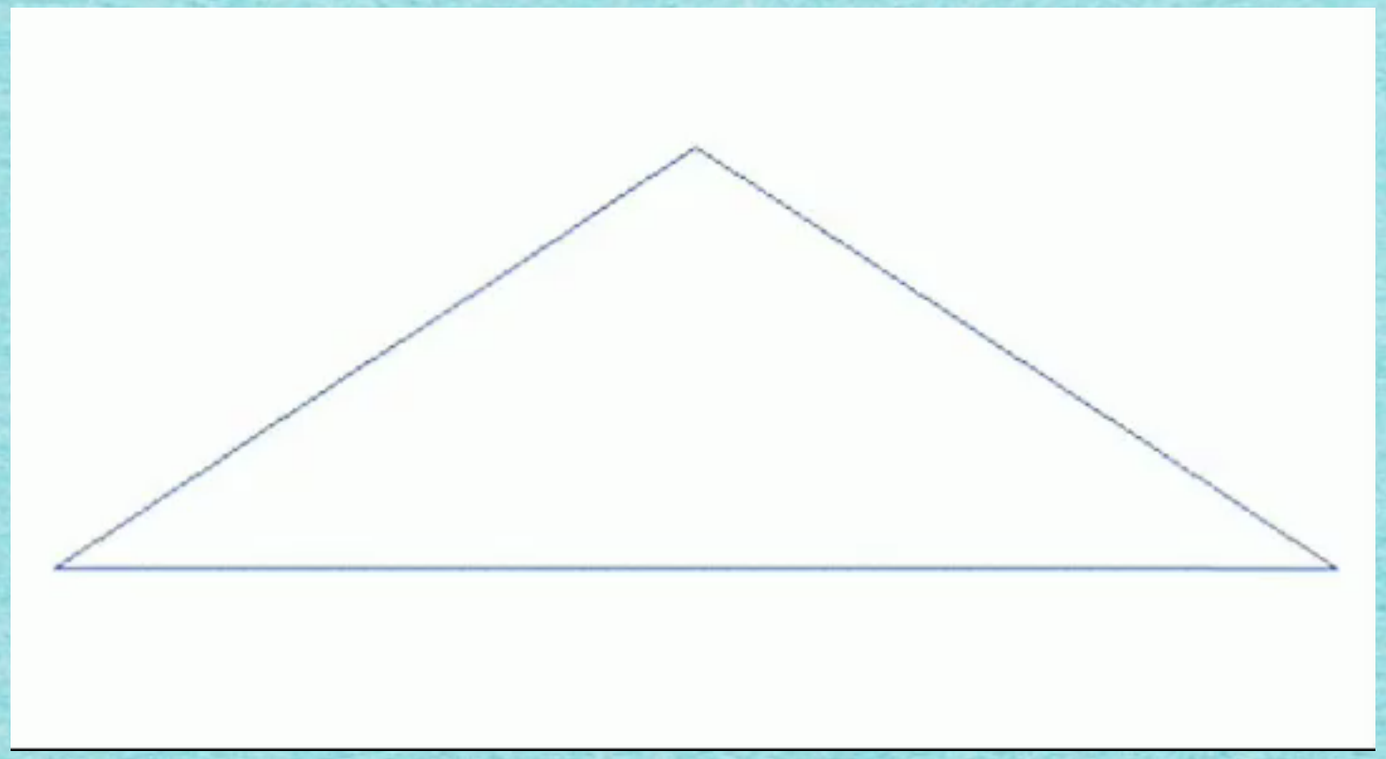
Fraktale in der Natur:

Farn

5.5.3 Fraktale

Farn (nicht echt)

5.5.3 Fraktale

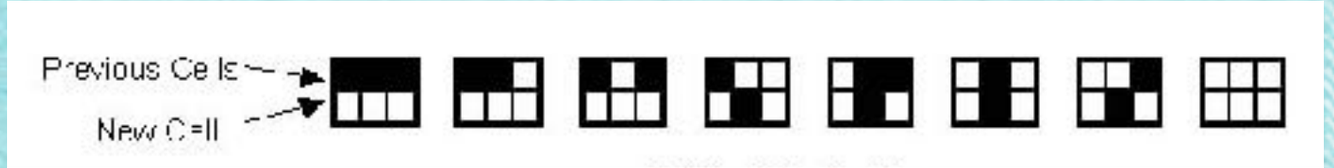


“Clouds are not spheres, mountains are not cones, coastlines are not circles, and bark is not smooth, nor does lightning travel in a straight line.” - Mandelbrot

5.5.4 Zelluläre Automaten

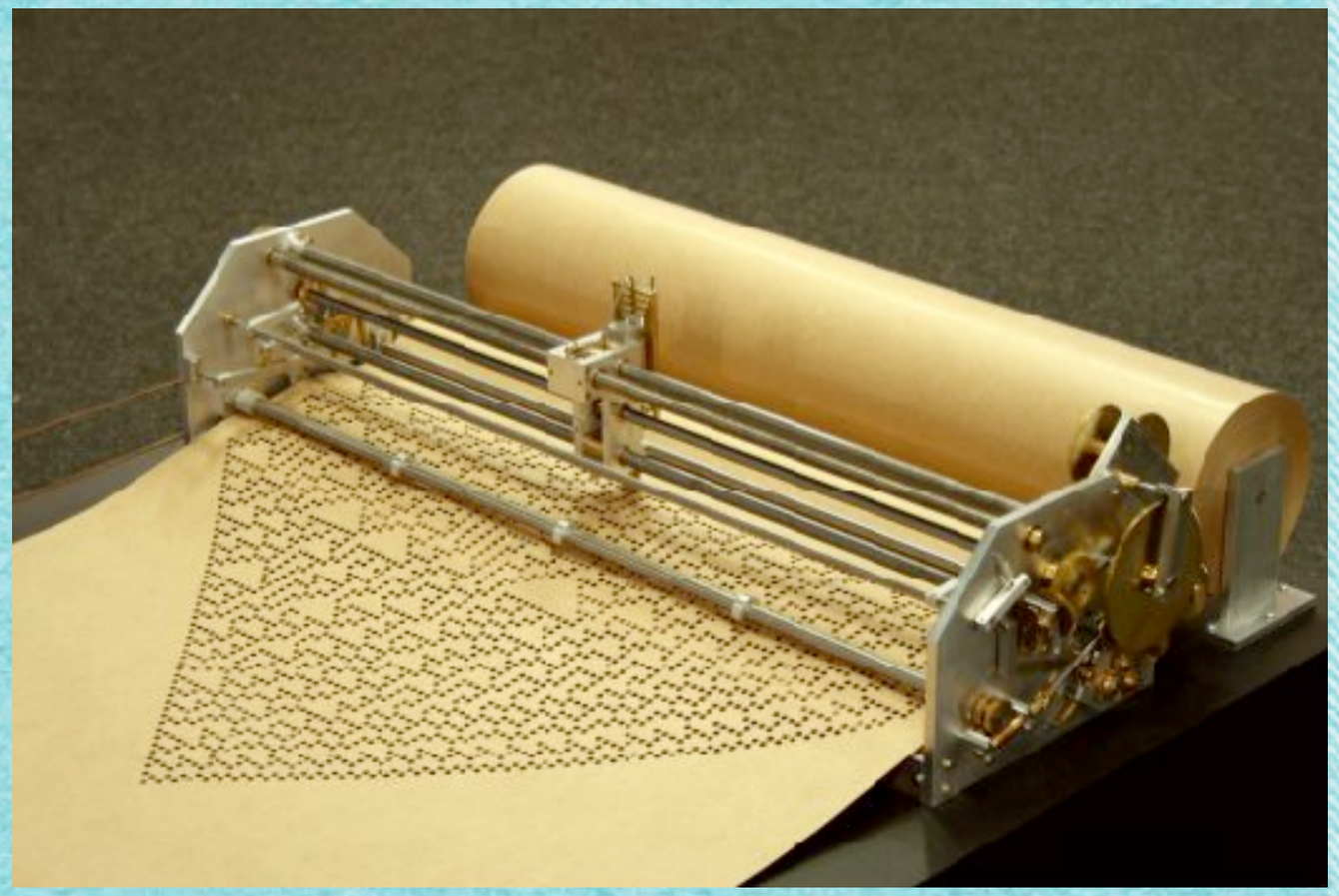
Stanislaw Ulam
(1909–1984)

John von Neumann
(1903–1957)

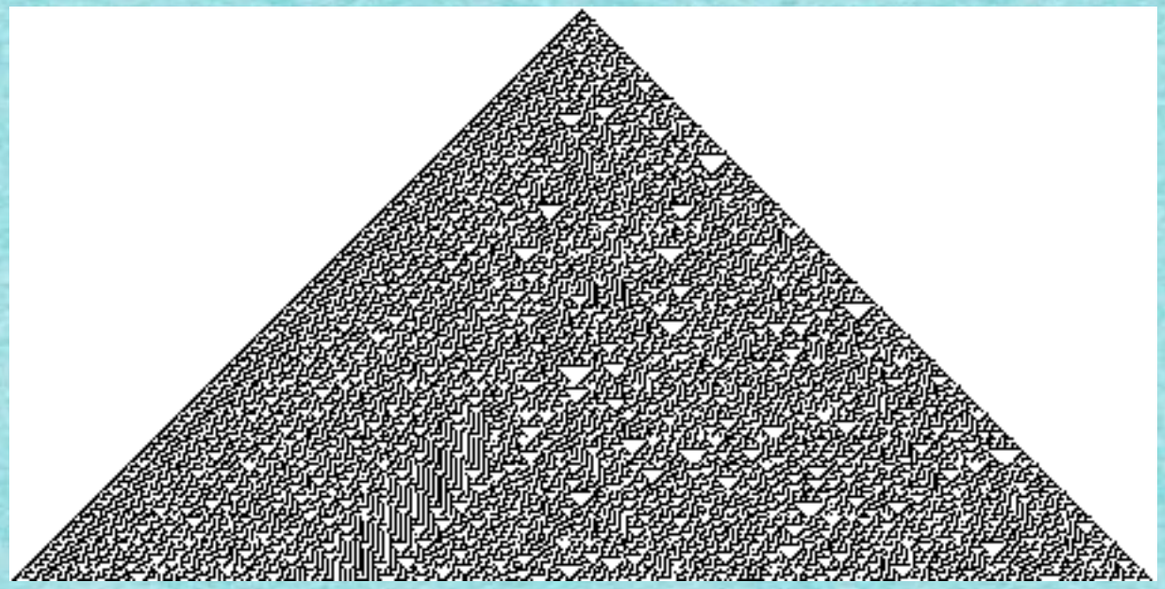


0	0	0	1	1	1	1	0

"Rule 30"
(0*128+0*64+0*32+1*16+1*8+1*4+1*2+0*1
=30)



5.5.4 Zelluläre Automaten

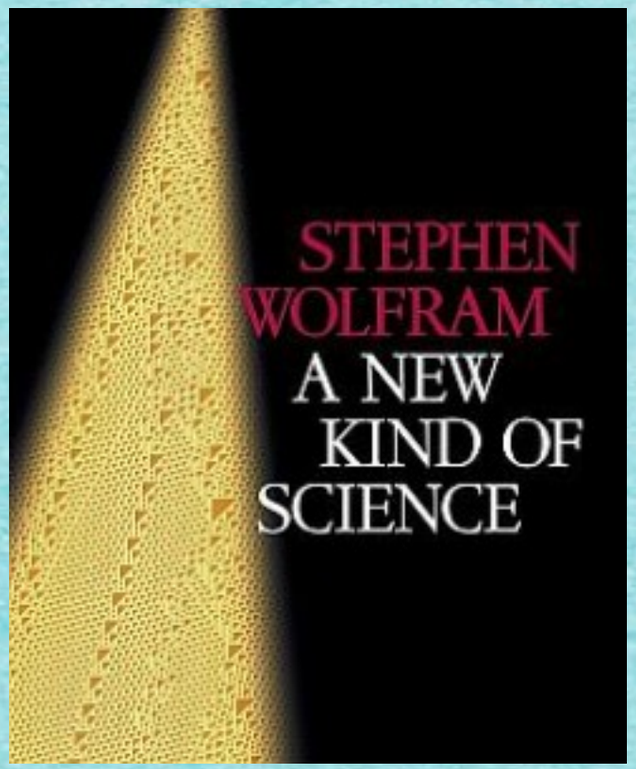


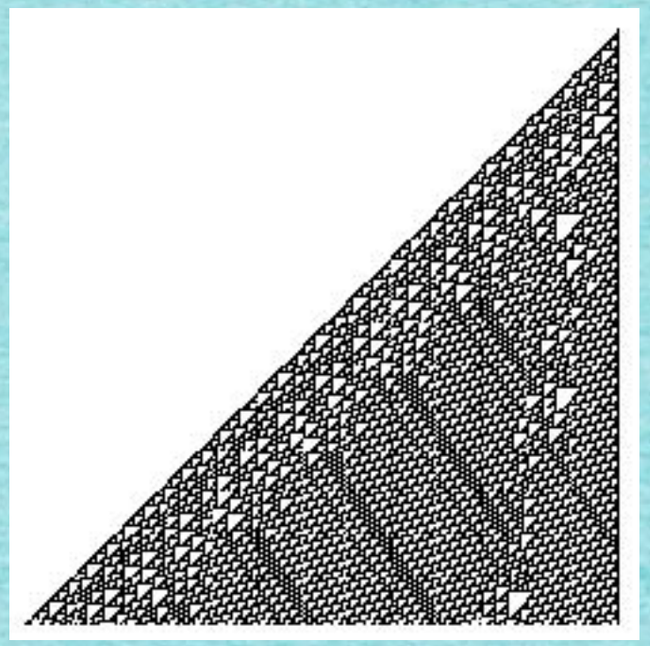
Rule 30

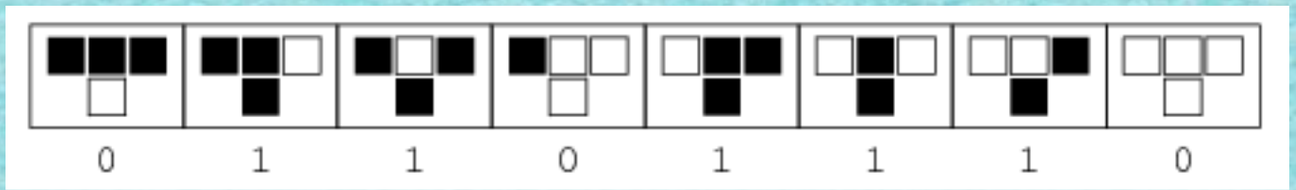
Kegelschnecke

5.5.4 Zelluläre Automaten

Stephen Wolfram
(1959-)





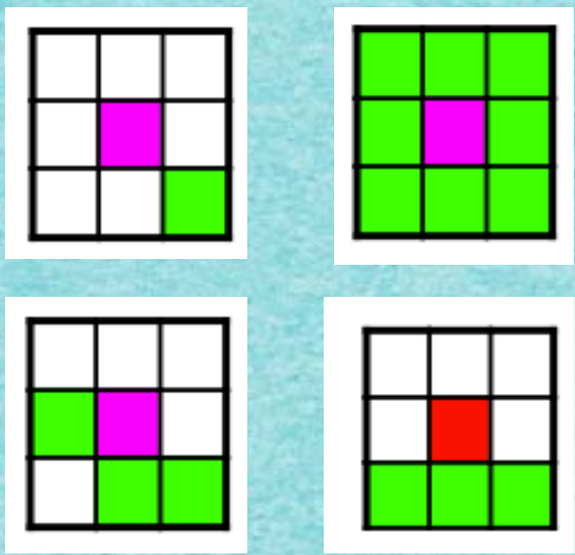


Rule 110

Matthew Cook (1998):
Rule 110 ist “universell”

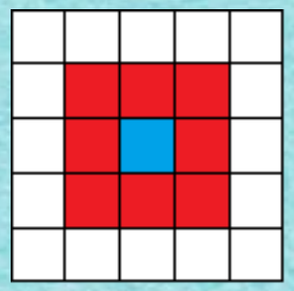
5.5.4 Zelluläre Automaten

John Conway
(1937-)



Game of Life:

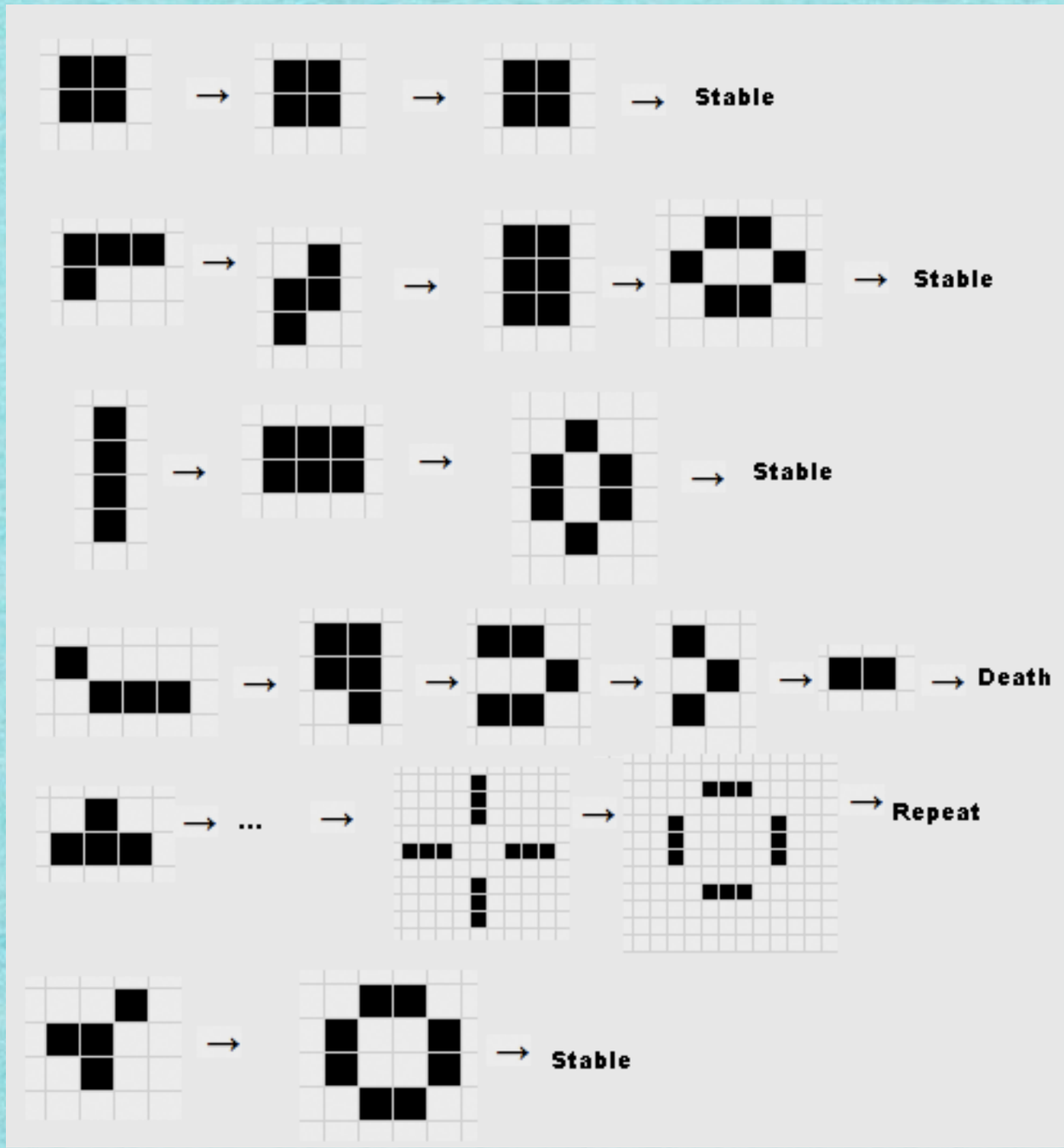
(1970)



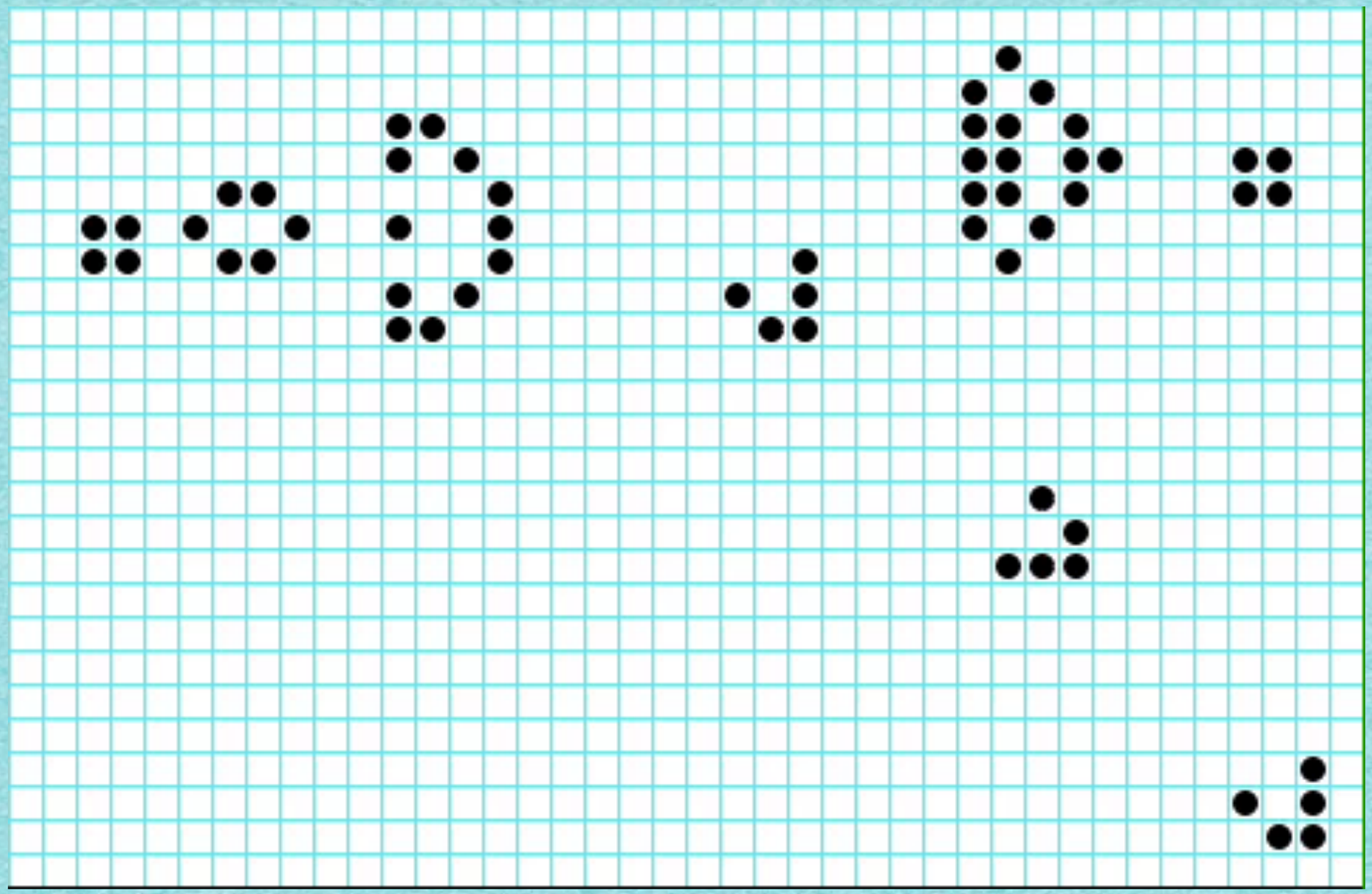
A. Jede Zelle lebt oder ist tot.
B. Jede Zelle hat 8 Nachbarn.

1. Eine lebende Zelle mit weniger als zwei lebenden Nachbarn stirbt.
2. Eine lebende Zelle mit mehr als drei lebenden Nachbarn stirbt.
3. Eine lebende Zelle mit zwei oder drei lebenden Nachbarn lebt weiter.
4. Eine tote Zelle mit genau drei lebenden Nachbarn wird lebend.

5.5.4 Zelluläre Automaten

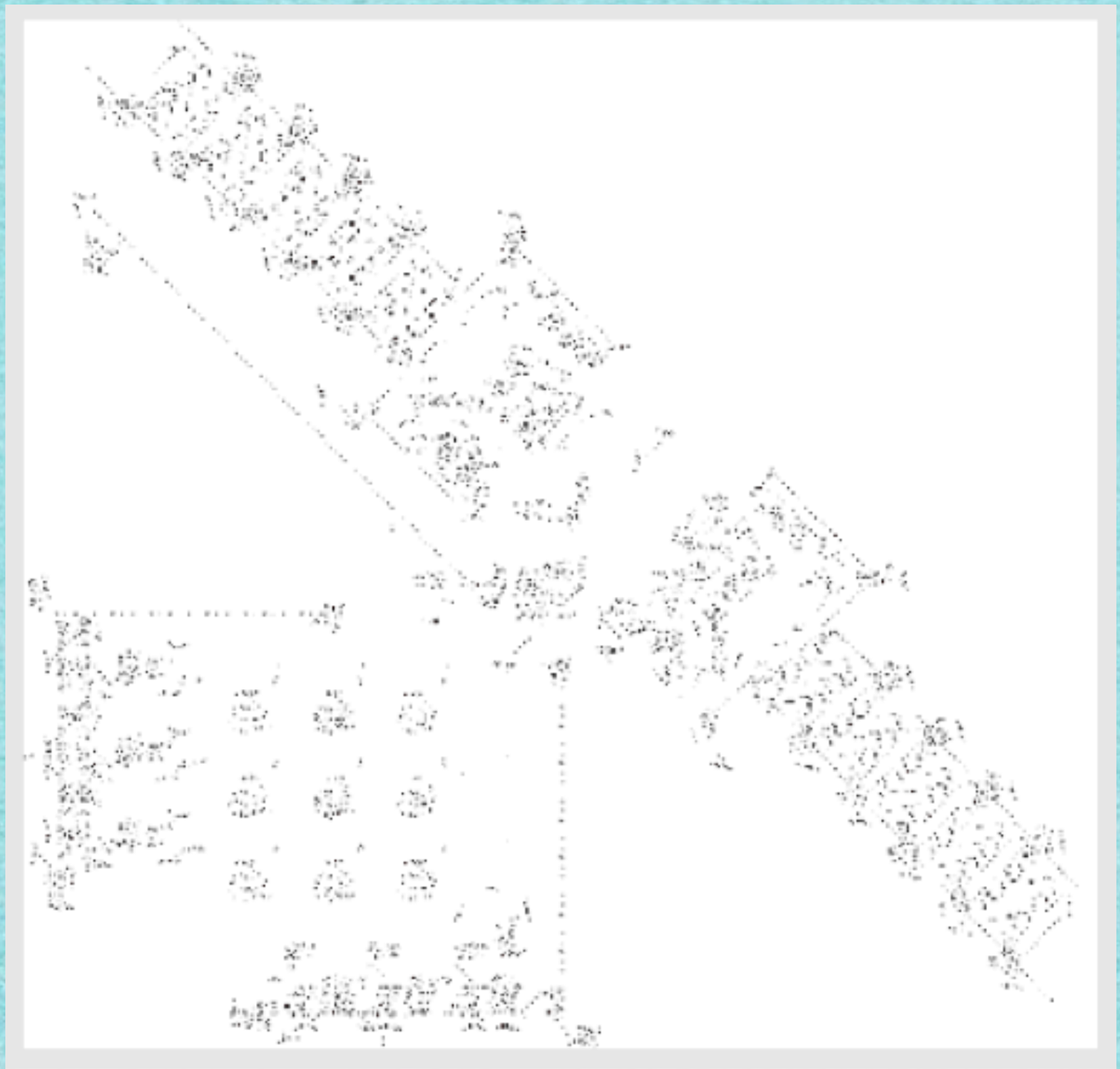


5.5.4 Zelluläre Automaten



“Gosper-Glider”

5.5.4 Zelluläre Automaten



Turing-Maschine, basierend auf
Game of Life (Paul Rendell)

Videos!

5.5 Nichtlineare Rekursionen

- **Die Welt ist nichtlinear!**
- **Nichtlinearität birgt viele Überraschungen!**

Demnächst mehr!

s.fekete@tu-bs.de