



„Also bleibt für die Knoten mit ungeradem Grad am Ende immer eine Kante übrig.“

„Außer wenn sie Start- oder Zielknoten des Eulerwegs sind.“

„Richtig. Bei einem Eulerweg mit unterschiedlichem Start und Ziel verlassen wir  $s$  beim Start einmal mehr als wir  $s$  erreichen, und für den Zielknoten  $z$  gilt das genau andersherum. Bei einem Eulerkreis ist allerdings  $s = z$ , und dann müssen wir auch aus diesem Knoten genauso oft heraus- wie in ihn hineinlaufen. Die Knotengrade sind also der Schlüssel zur Lösung des Problems. Übrigens haben wir damit schon fast den Satz von Euler nachgewiesen.“

#### Satz von Euler

Für jeden bis auf isolierte Knoten zusammenhängenden Graphen  $G = (V, E)$  gilt:

- Es existiert genau dann ein Eulerweg in  $G$ , wenn höchstens zwei Knoten in  $V$  ungeraden Grad besitzen.
- Es existiert genau dann ein Eulerkreis in  $G$ , wenn alle Knoten in  $V$  geraden Grad besitzen.

„Wir müssen nur zählen, wie viele Kanten aus den einzelnen Knoten herauslaufen und schon haben wir die

Lösung. Klasse! In Königsberg gibt es also keinen Eulerweg, da alle 4 Knoten ungeraden Grad haben.“

„Genau. Das ist das Ergebnis für den 7-Brücken-Graphen. Auch hierzu gibt's ein Gedicht.“

Some citizens of Königsberg  
Were walking on the strand  
Beside the river Pregel  
With its seven bridges spanned.

O, Euler come and walk with us  
Thus burghers did beseech  
We'll walk the seven bridges o'er  
And pass but once by each

'It can't be done' then Euler cried  
'Here comes the Q.E.D.  
Your islands are but vertices  
And all of odd degree.

William T. Tutte, in: Denis König – Theorie der endlichen und unendlichen Graphen, Teubner, 1986, Umschlagrückseite

„Was bedeutet Q.E.D.?“

„Das ist eine Abkürzung für den lateinischen Ausdruck 'quod erat demonstrandum', und bedeutet 'was zu beweisen war'. Mathematiker beenden damit ihre Beweise.“

„Das merke ich mir für die nächste Klassenarbeit.“

„In der Version mit acht Brücken haben nur 2 der Knoten einen ungeraden Grad. Da gibt es einen Eulerweg.“

„Oh ja, es gibt zwar immer noch keinen Eulerkreis, aber einen Eulerweg gibt es. Das wird wohl der Grund gewesen sein, warum Loyd die achte Brücke hinzufügte: Er wollte eine Lösung.“

„Vielleicht. Hier habe ich noch mal den 8-Brücken-Graphen gezeichnet. Rechts daneben sieht ihr einen möglichen Eulerweg. Damit man den genauen Verlauf des Wegs besser