Merkzettel: Beweise

Existenzaussage (Beweis).

Hier wollen wir uns anschauen, wie man Existenzaussagen beweisen kann. Dies soll beispielhaft an den folgenden zwei Aussagen gezeigt werden.

Beispiel 1. *Es gibt eine natürliche Zahl* $k \in \mathbb{N}$ *mit* $2k + 1 = 13$.

Beispiel 2. *Es gibt Graphen mit ausschließlich geraden Knotengraden, die keinen Hamiltonkreis haben.*

Da wir hier nur zeigen sollen, dass jeweils (mindestens) ein Element existiert um der Aussage zu genügen, reicht es aus, ein Beispiel angeben. Für Beispiel 1 wäre dies die Angabe einer natürlichen Zahl k (hier: $k = 6$) und für Beispiel 2 wäre dies die Angabe eines Graphen mit den geforderten Eigenschaften (hier: Graph in Abbildung 1).

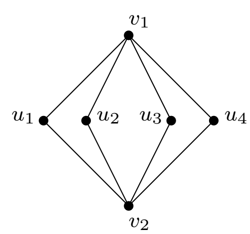

Abbildung 1: Der Graph G als Beweis für Beispiel 2.

Eine kurze Begründung, warum das Beispiel die geforderten Eigenschaften hat, vervollständigt den Beweis. Für Beispiel 2 gibt man dafür zum Beispiel den Graphen G aus Abbildung 1 an und begründet die Nichtexistenz des Hamiltonkreises damit, dass man o.B.d.A. von v_1 zu v_2 kommen muss, dabei aber nur genau zwei Knoten $u_i,\ i \in \{1, 2, 3, 4\}$ besuchen kann, bevor man wieder bei v_1 ist.

Allaussage (Beweis).

Bei Allaussagen sieht das ganze etwas anders aus. Zuerst auch hier zwei Beispiele.

Beispiel 3. *Ist* $x \in \mathbb{N}$ *ungerade, so ist* x^2 *ungerade.*

Beispiel 4. *In einem Baum mit mindestens zwei Knoten gibt es mindestens zwei Knoten vom Grad 1.*

Allaussagen lassen sich *nicht* mit der Angabe eines Beispiels beweisen; damit also auch die Aussagen aus Beispiel 3 und Beispiel 4 nicht. Man sieht schnell, dass man diese Aussagen wie folgt umformulieren kann:

Beispiel 5. *Für alle* $x \in \mathbb{N}$ *mit* x *ungerade gilt, dass* x^2 *ungerade ist.*

Beispiel 6. *Für alle Bäume mit mindestens zwei Knoten gilt, dass es mindestens zwei Knoten vom Grad 1 gibt.*

Da diese Aussagen für alle ungeraden natürlichen Zahlen bzw. alle Bäume mit mindestens zwei Knoten gelten sollen, ist klar, dass ein Beispiel kein vollständiger Beweis sein kann. Stattdessen beweist man die Aussagen beispielhaft wie folgt:

Beweis für Beispiel 5. Sei x eine ungerade natürliche Zahl. Dann lässt sich x darstellen als $x = 2k + 1$ für eine natürliche Zahl k (wobei k auch 0 sein kann). Daraus folgt mit der ersten binomischen Formel

$$x^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 2k + 1 = 2 \cdot (2k^2 + 2k) + 1$$

Aus der Möglichkeit, x^2 so darzustellen, folgt, dass x^2 ungerade ist. □

Beweis für Beispiel 6. Ein Baum mit n Knoten hat $n-1$ Kanten. Die Summe der Knotengrade ist nach dem Handschlaglemma $2n-1$. Da der Baum zusammenhängend ist, hat jeder Knoten mindestens den Grad 1. Angenommen es gäbe (mindestens) $n-1$ Knoten vom Grad ≥ 2, dann wäre die Summe der Knotengrade $\geq 2(n-1)+1 > 2n-2$. Dies ist ein Widerspruch. Somit kann ein zusammenhängender Graph mit weniger als zwei Knoten vom Grad 1 kein Baum sein, was somit im Umkehrschluss bedeutet, dass jeder Baum mit mindestens zwei Knoten mindestens zwei Knoten vom Grad 1 besitzt. □

Hier wurden zwei Beweismethoden verwendet, die im Folgenden noch genauer erläutert werden.

Existenzaussage (Negation / Widerlegung).

Wollen wir die Negation einer Existenzaussage zeigen, müssen wir eine Allaussage beweisen.

Beispiel 7. *Es gibt keine natürliche Zahl k mit $2k = 7$.*

Beispiel 8. *Für alle natürlichen Zahlen k gilt: $2k \neq 7$.*

Man kann sich schnell klar machen, dass die Aussagen in Beispiel 7 und Beispiel 8 identisch sind, d.h. es gilt für die Aussage $\mathcal{A}(x)$ die Äquivalenz

$$\neg\exists x\ \mathcal{A}(x) \Leftrightarrow \forall x\ \neg\mathcal{A}(x)$$

Allaussage (Negation / Widerlegung).

Wollen wir die Negation einer Allaussage zeigen, müssen wir eine Existenzaussage beweisen.

Beispiel 9. *Nicht alle natürlichen Zahlen sind prim.*

Beispiel 10. *Es gibt eine natürliche Zahl x die nicht prim ist.*

Auch hier kann man sich wieder schnell klar machen, dass die Aussagen in Beispiel 9 und Beispiel 10 identisch sind, d.h. es gilt für die Aussage $\mathcal{A}(x)$ die Äquivalenz

$$\neg\forall x\ \mathcal{A}(x) \Leftrightarrow \exists x\ \neg\mathcal{A}(x)$$

Direkter Beweis.

Zu beweisende mathematische Aussagen haben häufig die Form „*Wenn ..., dann ...*“. Aussagenlogisch ist dies $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ ($\mathcal{A}$ impliziert $\mathcal{B}$). Dabei nennen wir $\mathcal{A}$ die Voraussetzung und $\mathcal{B}$ die Folgerung. Bei dem direkten Beweis geht es darum, aus $\mathcal{A}$ über eine logische Folge auf $\mathcal{B}$ zu schließen.

Beispiel 11. *Wenn eine Zahl durch 10 teilbar ist, dann ist sie auch durch 5 teilbar.*

Beweis. Sei x eine Zahl die durch 10 teilbar ist. Dann hat x nach der Definition der Teilbarkeit die Form $x = 10\cdot k$ für eine ganze Zahl k. Durch Umformung erhalten wir $x = 10\cdot k = 2\cdot 5\cdot k = 5\cdot k'$ mit $k' = 2\cdot k$. Nach der Definition der Teilbarkeit ist also x auch durch 5 teilbar. □

Bevor man mit einem Beweis anfängt, sollte man sich klar machen, was die Voraussetzungen $\mathcal{A}$ und was die Folgerungen $\mathcal{B}$ sind. Es kann und darf bei einem Beweis nur von den Voraussetzungen ausgegangen werden, da die Folgerungsrelation Wahrheit erhalten soll. Dies bedeutet, dass sich die Wahrheiten aus den Voraussetzungen auf die Schlussfolgerungen übertragen sollen. Sind also die Voraussetzungen wahr, sind die Schlussfolgerungen bei einer gültigen Folgerung auch wahr. Wenn nun aber die Voraussetzungen widersprüchlich oder falsch sind, können diese niemals wahr sein. Daher kommt es nun auf die Schlussfolgerung gar nicht mehr an; die Schlussfolgerung kann nun also alles sein. Einfach gesagt: aus etwas Falschem kann alles gefolgert werden. Es ist also extrem wichtig darauf zu achten, dass die Voraussetzungen widerspruchsfrei und wahr sind.

Kontraposition.

Manchmal kann es schwierig sein, eine Aussage direkt zu beweisen. Dann bietet sich eventuell die Kontraposition an. Wenn wir also $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ zeigen sollen, können wir auch $\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A}$ zeigen. Dies ist intuitiv klar, da wenn $\mathcal{A}$ $\mathcal{B}$ impliziert, $\mathcal{A}$ nicht gelten kann, wenn $\mathcal{B}$ nicht gilt. Die Implikation *„Wenn es regnet, ist die Straße nass."* wird mittels Kontraposition zu *„Wenn die Straße nicht nass ist, hat es nicht geregnet."*

Beispiel 12. *Für alle $x, y \in \mathbb{N}$ mit $x \neq y$ gilt: $\frac{x+y}{x-y}$ unkürzbar $\Rightarrow$ $\frac{x}{y}$ unkürzbar.*

Beweis. Angenommen $\frac{x}{y}$ ist kürzbar. Dann besitzen x und y einen gemeinsamen Teiler m, so dass $r, s \in \mathbb{N}$ existieren mit $x = m \cdot r$ und $y = m \cdot s$. Damit ist aber $x - y = m(r - s)$ und $x + y = m(r + s)$. Also besitzen auch $(x - y)$ und $(x + y)$ den gemeinsamen Teiler m und der Bruch $\frac{x+y}{x-y}$ ist kürzbar. $\square$

Äquivalenzbeweis.

Äquivalenzbeweise sind für Aussagen der Form $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ gefordert, d.h. $\mathcal{A}$ gilt genau dann, wenn $\mathcal{B}$ gilt. Manchmal geht dies direkt über Äquivalenzumformungen. Funktioniert dies nicht, teilt man die Äquivalenzaussage in die beiden Implikationen $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ und $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}$ auf und zeigt diese mit einer geeigneten Beweismethode.

Widerspruchsbeweis.

Bei einem Widerspruchsbeweis machen wir uns die Tatsache zu nutze, dass mathematische Aussagen entweder wahr oder falsch sind. Daher nehmen wir an, dass die zu beweisende Aussage $\mathcal{C}$ falsch ist und nutzen dies als Voraussetzung um einen Widerspruch zu folgern. Dann kann die Annahme $\neg\mathcal{C}$ nicht wahr sein, also gilt $\mathcal{C}$.

Beispiel 13. *Es gibt unendlich viele Primzahlen.*

Beweis. Angenommen es gäbe nur endlich viele Primzahlen und seien diese $p_1, p_2, \dots, p_n$. Nun betrachten wir das Produkt aller dieser endlich vielen Primzahlen und addieren 1 dazu, d.h. die Zahl $q = p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_n + 1$. Die Zahl q darf keine Primzahl sein, da sie sonst in der endlichen Primzahlmenge gefehlt hätte. Gleichzeitig teilt aber keine Primzahl p_i, $1 \leq i \leq n$ die Zahl q, weshalb q eine Primzahl sein muss. Dies ist ein Widerspruch, also gilt die Aussage. $\square$

Ein Widerspruchsbeweis lässt sich auch bei Aussagen über Graphen führen.

Beispiel 14. *Besitzt ein zusammenhängender einfacher Graph eine Brücke, so besitzt der Graph Knoten mit ungeradem Grad.*

Beweis. Sei G ein Graph mit mindestens einer Brücke und angenommen alle Knoten in G haben geraden Grad. Dann besitzt dieser Graph eine Eulertour. Sei e die Brücke, d.h. durch das Entfernen von e aus G zerfällt G in zwei Zusammenhangskomponenten. Die Kante e muss Teil der Eulertour sein. Wird e nun benutzt, verlassen wir eine Zusammenhangskomponente des Graphen und kommen nicht mehr zurück (ohne e mehrfach abzulaufen), da e sonst keine Brücke gewesen wäre. G kann also keine Eulertour enthalten, also gilt die Aussage. $\square$

Bei einer Implikation $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ zeigen wir bei einem Widerspruchsbeweis also, dass die Annahme, $\neg\mathcal{B} \wedge \mathcal{A}$ könnten gleichzeitig gelten, zum Widerspruch führt.

Beispiel 15. *Ist die Wurzel aus einer geraden natürlichen Zahl x eine natürliche Zahl, so ist diese gerade.*

Beweis. Angenommen $\sqrt{x} = k$ wäre ungerade. Dann ist wegen des Beweises zu Beispiel 5 auch $k^2 = x$ ungerade, was ein Widerspruch zur Voraussetzung ist, dass x gerade ist. Also ist die getroffene Annahme falsch, womit gezeigt ist, dass $\sqrt{x}$ gerade ist. $\square$

Vollständige Induktion (auf natürlichen Zahlen).

Bei der vollständigen Induktion handelt es sich um ein mathematisches Beweisverfahren für Aussagen, die für alle natürlichen Zahlen gelten sollen. Um zu zeigen, dass ein Satz für $n \geq m$ $(n, m \in \mathbb{N})$ gilt, soll es genügen zu zeigen, dass sie für $n = m$ gilt und dass aus der Gültigkeit des Satzes für eine Zahl $n \geq m$ stets auch die Gültigkeit für die folgende Zahl $n + 1$ folgt. Dies folgt direkt aus der Definition der natürlichen Zahlen.

Die natürlichen Zahlen und ihre Eigenschaften werden in den fünf Peano-Axiomen charakterisiert.

P1: 0 ist eine natürliche Zahl

P2: jede natürliche Zahl n hat eine natürliche Zahl n^+ als Nachfolger

P3: 0 ist kein Nachfolger einer natürlichen Zahl

P4: natürliche Zahlen mit gleichem Nachfolger sind gleich

P5: enthält X die 0 und mit jeder natürlichen Zahl n auch deren Nachfolger n^+, dann ist $\mathbb{N} = X$

Theorem 1 (Vollständige Induktion). *Sei P eine Eigenschaft in den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$. Wenn $P(0)$ und $P(n) \Rightarrow P(n^+)$ gilt, so gilt P für alle $n \in \mathbb{N}$.*

Beweis. Sei $X := \{n \in N \mid P(n)\}$. Nach Voraussetzung gilt $0 \in X$ sowie $n \in X \Rightarrow n^+ \in X$. Mit dem Peano-Axiom P5 folgt daher $X = \mathbb{N}$. □

Wir zeigen nun also eine Aussage $P(0)$ und dass aus der Gültigkeit von $P(n)$ die Gültigkeit von $P(n+1)$ folgt. Damit gilt die Aussage für alle natürlichen Zahlen. Der Nachweis für $P(0)$ heißt dabei der Induktionsanfang, $P(n)$ die Induktionsvoraussetzung und der Nachweis für die Implikation $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ der Induktionsschritt.

Bildlich kann man sich das ganze vorstellen wie eine Reihe von sorgfältig aufgestellten Dominosteinen, bei dem alle Steine nacheinander fallen, sobald man den ersten antippt.

Beispiel 16 (Eulersche Summenformel). *Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.*

Beweis. Wir beweisen diese Behauptung mit vollständiger Induktion über n.
Induktionsanfang: $i = 1$. $\sum_{i=1}^{1} i = 1 = (1 \cdot (1 + 1))/2$.
Induktionsvoraussetzung: Die Behauptung gilt für beliebiges aber festes n.
Induktionsschritt:

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = (n+1) + \sum_{i=1}^{n} i \underset{\text{I.V.}}{=} (n+1) + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Damit ist $P(n + 1)$ gezeigt und es folgt nach dem Prinzip der Induktion die Behauptung. □

Vollständige Induktion (auf Graphen).

Beispiel 17. *Ein einfacher Graph G mit Maximalgrad k ist $(k + 1)$-färbbar.*

Wir wollen diese Aussage mit Induktion über die Anzahl n der Knoten des Graphen beweisen.

Beweis. Sei $P(n)$ die Behauptung, dass ein Graph mit n Knoten und Maximalgrad höchstens k, $(k+1)$-färbbar ist. Diese Behauptung benötigen wir in der Induktionsvoraussetzung.

Induktionsanfang: $n = 1 \Rightarrow$ Ein Graph mit nur einem Knoten hat Maximalgrad 0. Dieser Graph ist mit einer Farbe färbbar; damit gilt P(1).

Induktionsvoraussetzung: Gelte die Behauptung $P(n)$ für n, k beliebig, n fest.

Induktionsschritt: Sei $P(n)$ wahr und sei G ein Graph mit $n + 1$ Knoten und Maximalgrad höchstens k. Wir entfernen einen beliebigen Knoten v (mitsamt seiner inzidenten Kanten) und erhalten damit einen Graphen G' mit n Knoten. Der Maximalgrad ändert sich nicht zwangsläufig, ist also immer noch höchstens k. G' ist nach Induktionsvoraussetzung mit $k + 1$ Farben färbbar. Nun fügen wir v (mitsamt seiner inzidenten Kanten) wieder hinzu. Da v maximal k viele Nachbarn hat, wir aber $k + 1$ viele Farben zur Verfügung haben, können wir v mit der verbliebenen Farbe färben. Damit folgt die Behauptung nach dem Prinzip der Induktion. □

Bei Induktionsbeweisen auf Graphen passieren häufig sogenannte *build-up errors*. Diese entstehen durch die fehlerhafte Annahme, *jeder beliebige* Graph der Größe $n+1$ mit einer bestimmten Eigenschaft, kann aus einem Graphen der Größe n mit dieser Eigenschaft erstellt werden. Dies funktioniert im Allgemeinen nicht!

Um diese build-up errors zu vermeiden, nutzt man im Induktionsschritt einen *shrink down, grow back*-Ansatz. Dazu nimmt man im Induktionsschritt einen *beliebigen* Graphen mit $n+1$ Knoten, entfernt einen *beliebigen* Knoten und wendet dann die Induktionsvoraussetzung $P(n)$ auf diesem Graphen an. Danach fügt man den Knoten wieder hinzu und argumentiert, dass $P(n+1)$ gilt. (Dies funktioniert auch für alle anderen Dinge über die man Induktion anwenden möchte, z.B. Kanten, Zusammenhangskomponenten,...)

Wir wollen einmal sehen, wie so ein build-up Fehler passiert und wie sich der shrink-down, grow-back Ansatz dagegen verhält.

Beispiel 18. *Wenn in einem Graphen jeder Knoten mindestens den Grad 1 hat, ist der Graph zusammenhängend.*

Die Behauptung aus Beispiel 18 ist falsch, wie man am Graphen aus Abbildung 2 sehen kann. Wir können diese Behauptung allerdings per Induktion beweisen, wenn wir die Induktion falsch angehen.

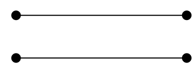

Abbildung 2: Unzusammenhängender Graph bei dem jeder Knoten den Grad 1 hat.

Dies könnte wie folgt aussehen. Sei $P(n)$ die Behauptung, dass ein Graph mit n Knoten zusammenhängend ist, wenn jeder Knoten mindestens den Grad 1 hat. Als Induktionsanfang nimmt man einen Graphen mit zwei Knoten und einer Kante. Dieser erfüllt offensichtlich die geforderten Eigenschaften (alle Knoten haben Grad mindestens 1 und er ist zusammenhängend). Sei G ein Graph mit n Knoten und gelte $P(n)$, mit n beliebig aber fest. Nun fügen wir einen neuen Knoten v hinzu und erhalten einen Graphen G' mit $n+1$ Knoten. Damit G' die Gradeigenschaften erfüllt, muss v mit mindestens einer Kante zu einem Knoten in G' verbunden sein. Sei o.B.d.A. dieser Knoten y. Da der Graph ohne v zusammenhängend war (wir gehen davon aus, dass $P(n)$ gilt!), gibt es von y mindestens einen Pfad zu jedem anderen Knoten in G. Wir müssen nun noch zeigen, dass es in G' auch einen Pfad von v zu jedem anderen Knoten gibt. Da v mit y verbunden ist, können wir nun die Pfade von y zu jedem anderen Knoten um die Kante $\{v, y\}$ verlängern und erhalten Pfade von v zu allen anderen Knoten (siehe Abbildung 3). Damit ist G' zusammenhängend.

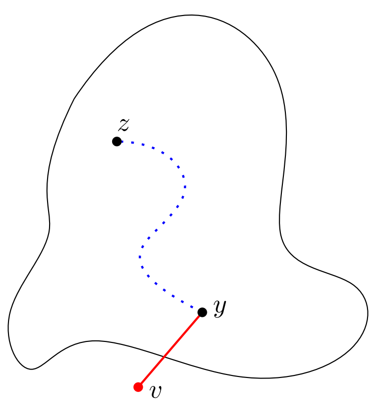

Abbildung 3: Verlängerung der Pfade aus G um die Kante $\{v, y\}$.

Wie passt hier nun das Beispiel aus Abbildung 2 hinein? Nutzen wir nun den shrink-down, grow-back Ansatz im Induktionsschritt, passiert folgendes: Sei G' ein Graph mit $n+1$ Knoten. Lösche einen beliebigen Knoten v aus G' und erhalte einen Graphen G'' mit n Knoten bei dem jeder Knoten mindestens den Grad 1,... whoops. Es können Knoten vom Grad 0 entstehen, so dass auf diesen Graphen die Induktionsvoraussetzung nicht angewendet werden kann; zum Glück, denn die Behauptung aus Beispiel 18 ist, wir wir in Abbildung 2 gesehen haben, falsch.