Technische Universität Braunschweig
Institut für Betriebssysteme und Rechnerverbund
Abteilung Algorithmik

Sommersemester 2018

Prof. Dr. Sándor P. Fekete
Christian Rieck
Arne Schmidt

Klausur
Algorithmen und Datenstrukturen
05.09.2018

Name: ....

Vorname: ....

Matr.-Nr.: ....

Studiengang: ....

☐ Bachelor ☐ Master ☐ Andere

Klausurcode:
Dieser wird benötigt, um das Ergebnis der Klausur abzurufen.

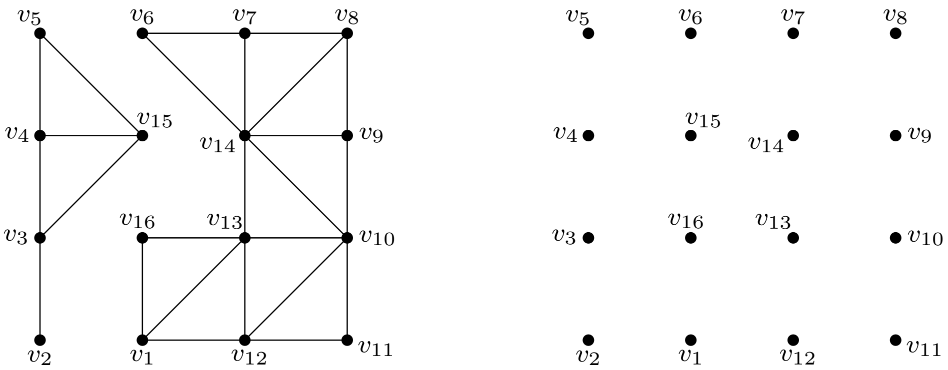
Hinweise:

- Bitte das Deckblatt in Druckschrift vollständig ausfüllen.
- Die Klausur besteht aus 14 Blättern, bitte auf Vollständigkeit überprüfen. Die Heftung darf nicht entfernt werden
- Erlaubte Hilfsmittel: Keine.
- Eigenes Papier ist nicht erlaubt.
- Die Rückseiten der Blätter dürfen beschrieben werden.
- Die Klausur ist mit 50 % der Punkte bestanden.
- Antworten die *nicht* gewertet werden sollen bitte deutlich durchstreichen. Kein Tippex verwenden.
- Mit *Bleistift* oder in *Rot* geschriebene Klausurteile können nicht gewertet werden.
- Werden mehrere Antworten gegeben, werten wir die mit der geringsten Punktzahl.
- Sämtliche Algorithmen, Datenstrukturen, Sätze und Begriffe beziehen sich, sofern nicht explizit anders angegeben, auf die in der Vorlesung vorgestellte Variante.
- Sofern nicht anders angegeben, sind alle Graphen als einfache Graphen zu verstehen.
- Die Bearbeitungszeit für die Klausur beträgt 120 Minuten.

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	Σ
Punkte	**16**	**10**	**18**	**12**	**9**	**18**	**7**	**10**	**100**
Erreicht									
Note	—	—	—	—	—	—	—	—	

Aufgabe 1: Graphen **(8+4+4 Punkte)**

a) Wende Breitensuche auf den Graphen G aus Abbildung 1(a) an; starte dabei mit dem Knoten v_1. Kommen in einem Schritt des Algorithmus mehrere Knoten in Frage, wähle denjenigen mit dem kleinsten Index. Gib die entsprechende Datenstruktur R nach **jeder** Änderung an und zeichne die Kanten des gefundenen Breitensuchbaums in Abbildung 1(b).



(a) Der Graph G (b) Knoten von G

Abbildung 1: Graph und Knoten für Breitensuche

b) Sei H ein zusammenhängender einfacher Graph. Zeige oder widerlege: Es existiert immer mindestens ein Knoten v in H, sodass H nach Entfernen von v zusammenhängend bleibt.

c) Sei der Graph S aus Abbildung 2 gegeben. Zeige oder widerlege: Es lassen sich Kanten so in S einfügen, dass der resultierende einfache Graph eine Eulertour besitzt.

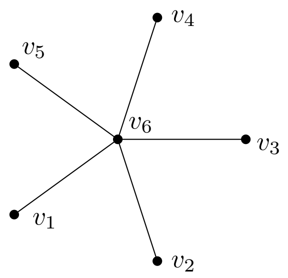
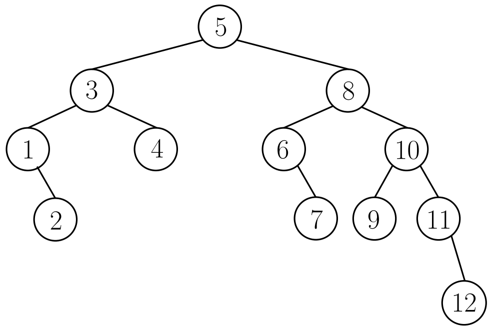


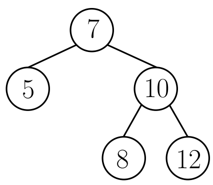
Abbildung 2: Der Graph S.

Aufgabe 2: AVL-Bäume **(2+2+2+4 Punkte)**

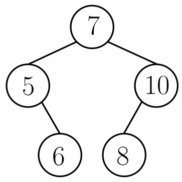
a) Führe $\textsc{Delete}(T_1, 5)$ auf dem AVL-Baum aus. Gib den Baum nach der Löschoperation sowie nach jeder Rotationsoperation an.



b) Führe $\textsc{Insert}(T_2, 11)$ auf dem AVL-Baum aus. Gib den Baum nach der Einfügeoperation sowie nach jeder Rotationsoperation an. (Hinweis: Die Einfügeoperation darf in dem angegebenen Baum durchgeführt werden.)



c) Führe Insert(T_3, 9) auf dem AVL-Baum aus. Gib den Baum nach der Einfügeoperation sowie nach jeder Rotationsoperation an. (Hinweis: Die Einfügeoperation darf in dem angegebenen Baum durchgeführt werden.)



d) Zeige: Ein AVL-Baum der Höhe h hat höchstens $2^h - 1$ Knoten.

Aufgabe 3: Asymptotisches Wachstum **(6+3+3+3+3 Punkte)**

a) Kreuze an, in welchen Klassen die jeweilige Funktion liegt (ohne Begründung).

$f(n)$	$\mathcal{O}(1)$	$\Omega(n)$	$\Theta(n)$	$\Omega(n \log n)$	$\mathcal{O}(n^2)$
$2n - \log n$					
$3^{0.1n}$					
$n \log(n!)$					
$\frac{24}{n}$					
$4n + 5$					
$5\sqrt{n}$					

b) In welcher Beziehung stehen die folgenden Klassen zueinander? Schreibe $\subseteq$ in das Feld, wenn Klasse A in Klasse B enthalten ist, $\supseteq$, wenn Klasse B in Klasse A enthalten ist, $=$, wenn die Klassen A und B übereinstimmen und $\times$, wenn dies alles nicht zutrifft. Eine Begründung ist nicht notwendig.

A	Relation	B
$\Theta(1)$		$\Omega(1)$
$\mathcal{O}(n^2)$		$\Omega(n \log n)$
$\Omega(\frac{1}{n})$		$\Omega(n)$
$\Theta(\log n)$		$\mathcal{O}(n \log n)$
$\mathcal{O}(2^n)$		$\mathcal{O}(3^n)$
$\Theta(\frac{n^2}{\log n})$		$\Omega(n^2)$

c) Seien $f, g, h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ Funktionen.
Zeige oder widerlege: $f(n) \in \mathcal{O}(g(n)) \land g(n) \in \Omega(h(n)) \Rightarrow f(n) \in \mathcal{O}(h(n))$

d) Seien $f_1, f_2, g_1, g_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $f := f_1 \cdot f_2$ und $g := g_1 \cdot g_2$.
Zeige oder widerlege: $f(n) \in \mathcal{O}(g(n)) \Rightarrow f_1(n) \in \mathcal{O}(g_1(n)) \wedge f_2(n) \in \mathcal{O}(g_2(n))$.

e) Sei $p(n) := 5n^3 - 10n^2 + 2n - 3$. Bestimme Konstanten c_1, c_2, n_0 um zu zeigen, dass $p(n) \in \Theta(n^3)$.

Aufgabe 4: Rekursionen **(3+3+3+3 Punkte)**

Bestimme mithilfe des Mastertheorems das asymptotische Wachstum der Rekursionen aus den Aufgabenteilen a) - d), falls das Mastertheorem anwendbar ist oder begründe, warum dieses nicht funktioniert. Ist das Mastertheorem anwendbar, bestimme die Werte aller auftretenden Parameter.

a)

$$T(n) = 10 \cdot T\left(\frac{n}{5}\right) + n \log n + 60 \cdot T\left(\frac{n}{10}\right) + 28n^2$$

b)

$$U(n) = 2 \cdot U\left(\frac{n}{2}\right) + 3n^2 + U(n) - 7$$

c)

$$V(n) = 7n + 27 \cdot V\left(\frac{n}{3}\right) + 4n^2 - n \log n$$

d)

$$W(n) = 7 \cdot W\left(\frac{n}{2}\right) + 3n^3 - 2n^2 \log n + 4 \cdot W\left(\frac{n}{4}\right) + 5n$$

Aufgabe 5: Mediane **(1+4+4 Punkte)**

a) Sei X eine Menge von Zahlen. Wie lautet die Definition eines Rang-k Elements m?

b) Betrachte die untenstehenden, vorsortierten Fünfergruppen.

(i) Markiere den Median der Mediane m und grenze in jeder Gruppe ab, welche Elemente größer bzw. kleiner als m sind.

(ii) Welche Elemente müssen wir weiterhin betrachten, falls wir nach dem Rang-32 Element der 45 Elemente suchen? (Hinweis: Die Zahlen 1 bis 50 tauchen jeweils einmal auf.)

(iii) Wie viel Prozent machen diese Elemente von allen aus?

9	19	12	2	1	11	4	15	7
17	23	30	3	6	14	8	20	10
27	36	31	5	13	32	21	39	16
28	37	34	38	18	33	22	40	24
29	41	43	44	35	42	25	45	26

c) Mit dem Median der Mediane von Fünfergruppen können wir immer so pivotisieren, dass wir eine Laufzeit von $O(n)$ erhalten, um ein Rang-k Element zu finden. Was passiert mit der Laufzeit, wenn man Dreiergruppen statt Fünfergruppen benutzt?

Aufgabe 6: Sortieren (8+2+3+5 Punkte)

a) Wir betrachten Radixsort zum Sortieren von 10 in Abbildung 3 angegebenen Zahlen mit jeweils vier Ziffern. Sortiere das Array A aus Abbildung 3 mit Radixsort. Gib A nach jeder Iteration an – nutze dazu Abbildung 3.

1234				
1990				
6271				
0900				
7854				
1954				
1337				
2014				
1974				
2018				

Abbildung 3: Radixsort im Array A.

b) Der in Radixsort verwendete Sortieralgorithmus muss *stabil* sein. Wann ist ein Sortieralgorithmus stabil?

c) Betrachten wir nun QUICKSORT. Wende PARTITION aus der Vorlesung auf das Array B in Tabelle 1 an. (Hinweis: Als Pivotelement wurde stets das Element ganz rechts gewählt. Der Platz unter der Tabelle ist für Nebenrechnungen gedacht.)

6	2	3	5	1	4

Tabelle 1: Array B.

d) Es ist bekannt, dass QUICKSORT aus der Vorlesung im Worst-Case eine Laufzeit von $\Theta(n^2)$ besitzt. Zeige oder widerlege: Es kann in PARTITION immer ein Pivotelement gewählt werden, sodass für QUICKSORT eine Laufzeit von $\Theta(n \log n)$ garantiert werden kann.

Aufgabe 7: Algorithmenentwurf **(7 Punkte)**

Betrachte einen binären Suchbaum B mit n Knoten. Jeder Knoten v in B besitzt ein Label $h(v)$, worin die Höhe von v gespeichert ist. Zur Vereinfachung gilt $h(\textsc{nil}) = 0$. Die Höhendifferenz an einem Knoten v ist die Differenz der Höhen der beiden Kinder von v.

Schreibe einen rekursiven Algorithmus in Pseudocode, der in $\mathcal{O}(n)$ Zeit überprüft, ob der gegebene binäre Suchbaum B ein AVL-Baum ist.

Zeige, dass dein Algorithmus korrekt ist und die Laufzeit einhält.

Aufgabe 8: Kurzfragen **(2+2+2+2+2 Punkte)**

Kreuze an, welche Aussagen korrekt sind. Es gibt nur Punkte für vollständig korrekt angekreuzte Teilaufgaben. (Hinweis: In jeder Teilaufgabe ist immer mindestens eine Aussage korrekt.)

a) Besitzt ein Graph G nur Knoten geraden Grades, dann...

- besitzt G immer eine Eulertour. ☐
- besitzt G immer einen Hamiltonkreis. ☐
- muss weder ein Hamiltonkreis noch eine Eulertour existieren. ☐

b) Mit welchem Verfahren können kürzeste Wege in einem ungewichteten Graphen gefunden werden?

- Tiefensuche ☐
- Breitensuche ☐
- Fleury ☐

c) Aus welcher Datenstruktur lässt sich ein Element x immer in $O(1)$ Zeit löschen, wenn die Position von x bekannt ist?

- Doppelt-verkettete Liste ☐
- Einfach-verkettete Liste ☐
- AVL-Bäume ☐

d) In einem Baum mit mindestens zwei Knoten...

- gibt es mindestens zwei Blätter (d.h. Knoten von Grad 1). ☐
- ist jeder Pfad zwischen zwei Knoten eindeutig. ☐
- ist der höchste Knotengrad drei. ☐

e) Sei X eine Menge von Zahlen, die paarweise verschieden sind. Welche Aussagen sind wahr?

- Den Median zu finden benötigt $\Theta(n)$ Zeit. ☐
- Der Median ist immer eindeutig. ☐
- Nur bei ungerade vielen Elementen ist der Median eindeutig. ☐

Viel Erfolg ☺