Technische Universität Braunschweig
IBR - Abteilung Algorithmik
Prof. Dr. Sándor Fekete
Dr. Christiane Schmidt

Wintersemester 2012/13

Klausur
Algorithmen und Datenstrukturen
19.02.2013

Name: ....

Vorname: ....

Matr.-Nr.: ....

Studiengang: ....

Bachelor ☐ Master ☐ Diplom ☐ Andere ☐

Mit der Veröffentlichung des Klausurergebnisses nur mit der Matrikelnummer über die Mailingliste und auf der Homepage bin ich einverstanden.

....
Unterschrift

Hinweise:

- Bitte das Deckblatt ausfüllen. Die Heftung der Blätter darf nicht entfernt werden. Eigenes Papier ist nicht erlaubt. Die Rückseiten dieser Blätter dürfen beschrieben werden.
- Die Klausur besteht aus 15 Blättern.
- Hilfsmittel: keine.
- Die Klausur ist mit 50 von 100 Punkten bestanden.
- Alle Graphen in dieser Klausur sind einfache Graphen, d. h. sie haben keine Multikanten und keine parallelen Kanten; das gilt auch für die von Dir zu konstruierenden Graphen.
- Mit *Bleistift* oder *in rot* geschriebene Klausurteile können nicht gewertet werden.
- Die Bearbeitungszeit für die Klausur ist 120 Minuten.
- **Bearbeitete Aufgaben bitte unten ankreuzen.**

Punktzahlen für die Korrektur freilassen!

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	Σ
Bearbeitet ($\times$)										
Punkte	**17**	**10**	**19**	**17**	**11**	**5**	**6**	**5**	**10**	**100**
Erzielte Punkte										

1.Aufgabe: **Graphen** **9+3+5 Punkte**

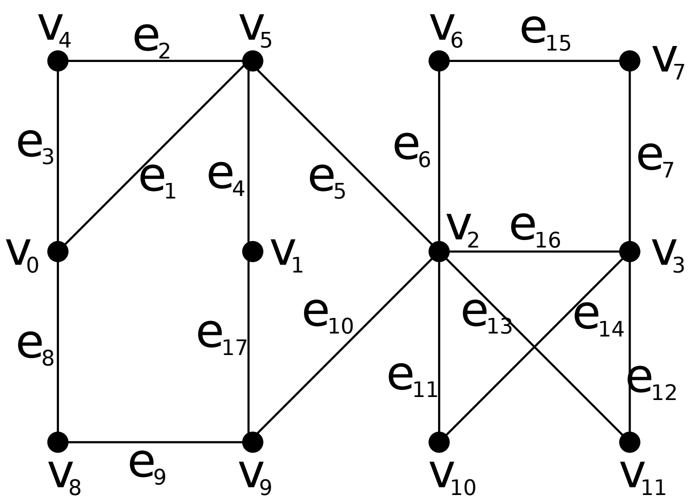

Abbildung 1: Der Graph H.

a) Wende Fleurys Algorithmus auf den Graphen H aus Abbildung 1 an; starte dabei mit dem Knoten v_0. Falls zu einem Zeitpunkt mehrere Kanten für den nächsten Schritt in Frage kommen, wähle diejenige mit dem kleinsten Index. Gib die Kanten in der Reihenfolge in der sie besucht werden an. Zeichne die gefundene Lösung.

b) Zeichne einen zusammenhängenden Graphen mit 4 Knoten und 4 Kanten, der einen Eulerweg und einen Hamiltonpfad, aber weder einen Hamiltonkreis noch eine Eulertour hat. Kennzeichne Eulerweg und Hamiltonpfad.

c) Sei G ein einfacher Graph.

Beweise, dass $m \leq \binom{n}{2}$ gilt. Wann gilt Gleichheit?

2.Aufgabe: Binäre Suchbäume (keine AVL-Bäume) **10 Punkte**

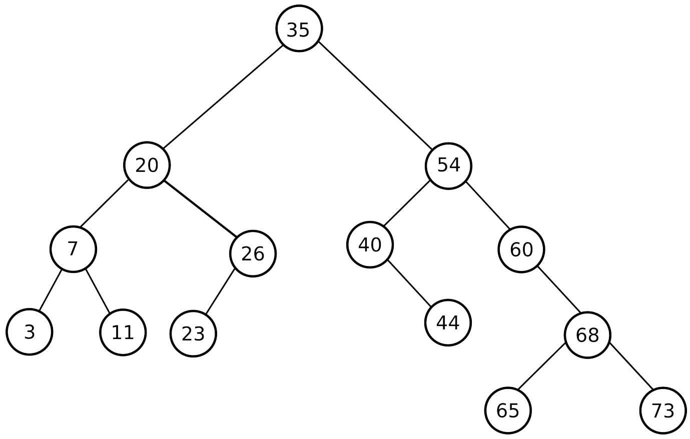

Abbildung 2: Der binäre Suchbaum T.

Gegeben sei der binäre Suchbaum T aus Abbildung 2. Führe nacheinander die folgenden Operationen aus:

a) INSERT(T, 58);

b) DELETE(T, 26);

c) INSERT(T, 66);

d) INSERT(T, 26);

e) DELETE(T, 60);

Zeichne alle Schritte jeder Operation in einen seperaten Baum.

3.Aufgabe: Komplexität **3+3+3+5+5 Punkte**

Seien $f, g : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$ drei Funktionen.

a) Zeige oder widerlege: $f \in O(g), g \in \Theta(h) \Rightarrow f \in \Theta(h)$

b) Zeige oder widerlege: $f \in O(g), h \in \Omega(g) \Rightarrow f \in O(h)$

c) Zeige: $5n^7 - 4n^6 + n^2 + 13 \in O(n^7)$. Gib dazu explizit geeignete Konstanten c und n_0 aus der Definition an und zeige, dass sie die Definition erfüllen.

d) Sortiere die folgenden Funktionsklassen nach Inklusion (Du musst die Antwort nicht begründen). Kennzeichne identische Klassen und beweise deren Identität.

$$O(2^n) \;\; O(\ln n) \;\; O(735) \;\; O(n^n) \;\; O(n) \;\; O(3n^2) \;\; O(n!) \;\; O(e^{(\ln 2)n})$$

e) Maximiere die Leistungsfähigkeit eines Programms. Dafür hast Du für einen Input der Größe n eine der folgenden Möglichkeiten zur Auswahl:

   (i) Anschaffung einer besseren Rechenanlage mit der dreifachen Rechenleistung.

   (ii) Verbesserung der Laufzeit des zugrundeliegenden Algorithmus von $4n^4$ auf $3n^3$.

   (iii) Reduktion der Datenmenge durch einen vorgeschalteten Algorithmus (Zeitbedarf $2n^3$) auf $\frac{n}{2}$.

   Begründe Deine Wahl und zeige, für welchen Wertebereich von n Deine Wahl die beste ist (betrachte den jeweiligen Zeitbedarf).

4.Aufgabe: Rekursionen **4+4+4+5 Punkte**

a) Wie lautet das Mastertheorem aus der Vorlesung?

b) Bestimme mit Hilfe des Mastertheorems das asymptotische Wachstum der Rekursion
$U(n) = 3 \cdot U(\frac{n}{6}) + 4 \cdot U(\frac{n}{12}) + 3n^2$.
Bestimme die Werte aller im Mastertheorem auftretenden Parameter.

c) Bestimme mit Hilfe des Mastertheorems das asymptotische Wachstum der Rekursion
$V(n) = 14 \cdot V(\frac{n}{2}) + 2n^4 + 32 \cdot V(\frac{n}{4})$.
Bestimme die Werte aller im Mastertheorem auftretenden Parameter.

d) Bestimme mit Hilfe des Mastertheorems das asymptotische Wachstum der Rekursion
$T(n) = 27 \cdot T(\frac{n}{3}) + 23n^2$.
Bestimme die Werte aller im Mastertheorem auftretenden Parameter.

5.Aufgabe: Hashing — 11 Punkte

Wir betrachten ein leeres Array A der Größe 8, d.h. es gibt die Speicherzellen $A[0], A[1], \ldots, A[7]$; in diesem führen wir offenes Hashing mit der folgenden Hashfunktion durch:

$$t(i, x) = (x^2 + i) \bmod 8$$

Dabei ist x ein einzusetzender Schlüssel und i die Nummer des Versuches, x in eine unbesetzte Speicherzelle des Arrays zu schreiben (beginnend bei $i = 0$).
Berechne zu jedem der folgenden Schlüssel die Position, die er in A bekommt:

$$2, 6, 10, 11, 15$$

(Hinweis: Die Schlüssel sollen in der gegebenen Reihenfolge eingefügt werden und der Rechenweg sollte klar erkennbar sein.)

Trage die Elemente in folgendes Array ein:

0	
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	

6.Aufgabe: Sortieren **5 Punkte**

Wende die Funktion Merge aus der VL auf das folgende Array A an, also Merge(A,1,3,6):

2	4	5	1	3	6

Gib dabei **alle Zwischenschritte und Parameter** an.

7.Aufgabe: Algorithmenentwurf **6 Punkte**

Gegeben sei ein Array $A[1, \dots, n]$, sowie ein Array $B[1, \dots, n-1]$, das genau um eine Position kürzer ist. Beide Arrays enthalten nur ganzzählige Einträge (zwischen 1 und 1.000.000). Alle Einträge von B sind auch in A vorhanden, A enthält jedoch eine weitere Zahl.
Gib einen Algorithmus an, der in Linearzeit bestimmt, welche Zahl in B fehlt.

8.Aufgabe: Listen **5 Punkte**

In der Vorlesung wurden die Operationen LIST-INSERT(L,x) und LIST-DELETE(L,x) für doppelt verkette Listen vorgestellt. Können diese Operation für einfach verkettete Listen auch mit einer Laufzeit von $O(1)$ durchgeführt werden?

9.Aufgabe: Kurzfragen **2+2+2+2+2 Punkte**

a)	In einem Rot-Schwarz-Baum haben die Wurzel und alle Blätter die gleiche Farbe.	☐ wahr ☐ falsch
b)	Ein Max-Heap mit n Knoten kann in $O(n)$ gebaut werden.	☐ wahr ☐ falsch
c)	Auf einem vollständigen Graphen erzeugen Breiten- und Tiefensuche den gleichen Baum.	☐ wahr ☐ falsch
d)	Jeder Baum enthält einen Hamiltonpfad.	☐ wahr ☐ falsch
e)	Im Worst Case hat Quicksort eine Laufzeit von $\Theta(n^2)$.	☐ wahr ☐ falsch

Viel Erfolg!!!