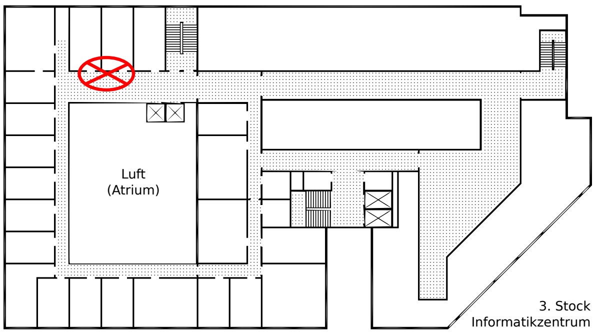
Abteilung Algorithmik **Winter 2018/19**
Institut für Betriebssysteme und Rechnerverbund
TU Braunschweig

Prof. Dr. Sándor Fekete
Dominik Krupke

Mathematische Methoden der Algorithmik
Übungsblatt 5 vom 08.01.2019

Die Abgabe der Lösungen zu Blatt 5 ist bis Dienstag, den 22.01.2019 um 13:15 Uhr im Hausaufgabenrückgabeschrank der Algorithmik möglich.

Bitte die Blätter vorne deutlich mit eigenem Namen sowie Matrikelnummer versehen und zusammenheften!



Aufgabe 1 (Dualisieren): Das duale Problem eines LPs kann mit der folgenden Tabelle hergeleitet werden. Die Hintergründe hierzu, werden wir noch behandeln.

max	min
$Ax \leq b$	$x \geq 0$
$Ax = b$	x frei
$Ax \geq b$	$x \leq 0$
$x \geq 0$	$Ax \geq b$
x frei	$Ax = b$
$x \leq 0$	$Ax \leq b$

Die Tabelle wird wie folgt genutzt: Jeder Constraint wird im Dualen eine Variable und jede Variable wird im Dualen ein Constraint. Wähle die linke Spalte als Ursprung falls dein primales Problem ein Maximierungsproblem ist und andernfalls die rechte Spalte. Wenn dein Problem ein Maximierungsproblem ist und einen $Ax \geq b$ Constraint enthält, würde dieser zu einer $y \leq 0$ Variable im dualen Problem.

Dualisiere die folgenden LPs:

$$\begin{array}{lcrcrcrcl}
\min & & -x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & & \\
\text{s.t.} & - & 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & \geq & -40 \\
 & & x_1 & & & + & x_3 & \leq & 25 \\
 & & & & x_2 & + & 3x_3 & \leq & 30 \\
 & & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{lrcrcrcrl}
\max & 2x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & \\
\text{s.t.} & 3x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 4x_4 & \leq 12 \\
 & x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & \leq 7 \\
 & 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & \leq 10 \\
 & & & & & x_1, & \ldots, & x_4 & \geq 0
\end{array}$$

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
\max & x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & & \\
\text{s.t.} & -\ 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & \geq & -40 \\
 & x_1 & & & + & x_3 & = & 25 \\
 & & & x_2 & + & 3x_3 & \leq & 30
\end{array}
$$

Hinweis: Ihr könnt die Lösung einfach mit einem LP-Solver verifizieren. **(15 Punkte)**

Aufgabe 2 (Abstrakt Dualisieren): Dualisiere das folgende LP und beschreibe dabei deine Vorgehensweise

$$
\begin{aligned}
\min \sum_{e \in E} x_e * c(e) & \\
\text{s.t.} \quad \sum_{e \in E(U, V \setminus U)} x_e \geq 1 & \quad \forall U \subset V, S \neq \emptyset \\
x_e \geq 0 & \quad \forall e \in E
\end{aligned}
$$

(für einen Graphen $G(V,E)$ mit Kantengewichten $c : E \to \mathbb{N}$, $E(U,W) = \{vw \in E \mid v \in U, w \in W\}$)

Ihr könnt auch hier wieder die Lösung mit einer Beispielinstanz und einem LP-Solver verifizieren. **(15 Punkte)**

Aufgabe 3 (Komplementärer Schlupf): Gegeben sei das folgende lineare Programm

$$
(P) \left\{
\begin{array}{lrcrcrcrcrcr}
\max & 7x_1 & + & 6x_2 & + & 5x_3 & - & 2x_4 & + & 3x_5 & & \\
\text{s.t.} & x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & - & 2x_4 & + & 2x_5 & \leq & 4 \\
 & 4x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & + & x_5 & \leq & 3 \\
 & 2x_1 & + & 4x_2 & + & 4x_3 & - & 2x_4 & + & 5x_5 & \leq & 5 \\
 & 3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & - & 2x_5 & \leq & 1 \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5 & \geq & 0
\end{array}
\right.
$$

a) Formuliere das duale Problem zu (P).

b) Formuliere die Bedingungen für komplementären Schlupf zu (P).

c) Prüfe mit Hilfe des Satzes vom komplementären Schlupf, ob $x^* = (0, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 0)^T$ eine optimale Lösung von (P) ist.

(10 Punkte)

Aufgabe 4 (Primale und duale LPs): Ein LP ist entweder unzulässig, unbeschränkt oder optimal lösbar. Wie ist hierbei das Verhältnis von primalen und dualen Problem: Welche der 9 Kombinationsmöglichkeiten sind möglich? Gebe Begründungen oder Beispiele mit an. **(10 Punkte)**

Aufgabe 5 (Column Generation): Für viele Optimierungsprobleme brauchen wir am Ende nur einen Bruchteil der Variablen. Oft lässt sich anhand der Kostenfunktion auch gut vorhersagen, welche Variablen für die optimale Lösung nützlich sein könnten.

Betrachte das Minimum Weight Perfect Matching Problem. Für einen Graph $G(V, E)$ soll ein perfektes Matching gefunden werden, sodass die Summe der Gewichte $d(v, w)$ aller gematchten Knotenpaare $v, w \in V$ minimal ist. Das Linear Program zu dem Problem ist

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{vw \in E} x_{vw} * d(v, w) \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{vw \in E(v)} x_{vw} = 1 \quad \forall v \in V \\ & x_{vw} \geq 0 \quad \forall vw \in E \end{aligned}$$

und das zugehörige duale Problem

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{v \in V} y_v \\ \text{s.t.} \quad & y_v + y_w \leq d(v, w) \quad \forall vw \in E \end{aligned}$$

a) Gegeben sei der Graph $G = (\{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}, \{v_0v_1, v_0v_5, v_2v_3, v_4v_5\})$ mit $d(v_0, v_1) = 1.1$, $d(v_2, v_3) = 1.0$, $d(v_4, v_5) = 1.2$, und $d(v_0, v_5) = 1.0$. Gebe eine optimale primale und duale Lösung an. Hinweis: Dies benötigt keinen Simplex.

b) Das eigentliche Problem hat noch einige weitere Kanten, aber wir wissen, dass diese alle mindestens das Gewicht 2.41 haben. Was passiert im primalen und dualen Problem wenn wir eine weitere Kante zum Graphen hinzufügen? Argumentiere über die duale Lösung, warum wir diese zusätzlichen Kanten nicht betrachten müssen (also keine dieser Kanten unsere optimale Lösung verändert).

c) Was passiert im primalen und dualen Problem wenn wir die Kante v_1v_4 mit $d(v_1, v_4) = 1.0$ hinzufügen? Gebe die zugehörige optimale primale und duale Lösung an.

d) Wie kompliziert ist es eine neue Variable zu einem bereits gelöstem Simplex Tableau hinzuzufügen und dieses zu optimieren? (A_B^{-1} des ehemals optimalen Tableaus wurde gespeichert.)

(10 Punkte)