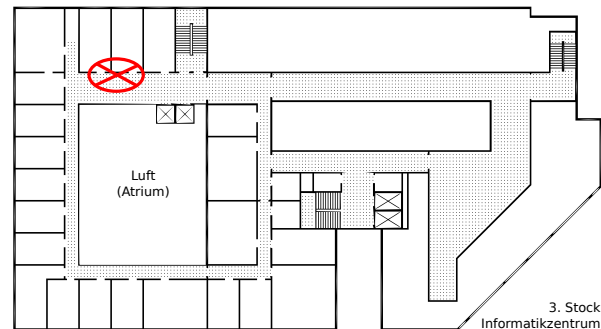


Prof. Dr. Sándor Fekete
Dominik Krupke

Mathematische Methoden der Algorithmik Übungsblatt 3 vom 27. 11. 2018

Die Abgabe der Lösungen zu Blatt 3 ist bis Dienstag, den 11. 12. 2018 um 13:15 Uhr im Hausaufgabenrückgabeschrank der Algorithmik möglich.

Bitte die Blätter vorne deutlich mit eigenem Namen sowie Matrikelnummer versehen und zusammenheften!



Aufgabe 1 (Naiver LP-Solver mit Fundamentalsatz): Implementiere mit Python und NumPy einen Algorithmus der Lineare Programme in der Standardform $\min c^T x, Ax = b, x \geq 0$ optimal lösen kann indem er alle Basen ausprobiert. Warum ist die Lösung optimal? **(20 Punkte)**

Aufgabe 2 (Integer Programming: Bottleneck-MST): Das Minimum Spanning Tree Problem, das in einem gewichteten Graph $G = (V, E)$ nach einem Baum minimalen Gewichts sucht, kann in folgender Form als Integer Program angegeben werden.

$$\min \sum_{e \in E} w_e * \mathbf{x}_e \quad (1)$$

$$\sum_{e \in E} x_e = |V| - 1 \quad (2)$$

$$\sum_{e \in E(S, V \setminus S)} \mathbf{x}_e \geq 1 \quad \forall S \subsetneq V, S \neq \emptyset \quad (3)$$

$$\mathbf{x}_e \in \mathbb{B} \quad \forall e \in E \quad (4)$$

$x_e = 1$ bedeutet hierbei, dass die Kante e im Baum enthalten ist. Wir minimieren die Summe des Gewichts w_e der verwendeten Kanten. Die beiden Bedingungen geben an, dass eine Lösung mit $|V| - 1$ Kanten suchen die zusätzlich zusammenhängend ist (was einen Baum beschreibt).

Euch ist vielleicht aufgefallen, dass es exponentiell viele Ungleichungen in diesem Integer Program gibt. Tatsächlich ist dies gewöhnlich kein Problem, solange effizient bestimmt werden kann ob eine beliebige Lösung (fraktional) gültig ist oder ansonsten eine verletzte

Bedingungen genannt werden kann. In der Praxis würde man die zusätzlichen Bedingungen dann nach und nach hinzufügen bis wir eine gültige Lösung erhalten.

Ändere die Formulierung nun so ab, dass das Gewicht der größten Kante in dem Baum minimiert wird. **(10 Punkte)**

Aufgabe 3 (Mixed Integer Programming): Gib ein Mixed Integer Program an, das einen MST findet, bei dem das Gewicht jedes Pfades zu einer bestimmten Wurzel v_r maximal l sein darf.

Also: Finde einen MST mit beschränkter Tiefe.

Hinweis: Nutze eine Zusätzliche fraktionale Variable für jeden Knoten. **(15 Punkte)**

Aufgabe 4 (Lösungsmengen von LPs): Betrachte ein LP in der Form

$$(P) \begin{cases} \max & c^T x \\ \text{s. t.} & Ax \leq b \\ & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Dabei sei $L = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ die Menge der zulässigen Lösungen von (P) . Beweise oder widerlege folgende Aussagen:

- (a) Es gilt immer $L \neq \emptyset$.
- (b) Wenn $L \neq \emptyset$, dann existiert auch $\max\{c^T x \mid x \in L\}$.
- (c) Wenn $\max\{c^T x \mid x \in L, x \text{ Basislösung}\}$ existiert, dann existiert keine weitere Basislösung mit dem selben Optimalwert.

(1+2+2 Punkte)

Aufgabe 5 (Basen, Nichtbasen, Basiswechsel): Gegeben ist das LP (P) in Abbildung 1 mit Ungleichungen $(1), \dots, (7)$, dessen zulässige Lösungsmenge grau markiert ist.

- a) Gib alle Basen von (P) an, deren Basislösungen im gestrichelten Bereich liegen. Markiere diese in Abbildung 1. Es reicht die Variablen anzugeben, die nicht in der Basis auftreten. Dabei sei x_i die Schlupfvariable von Ungleichung (i) . (Hinweis: Es werden nur x_1, \dots, x_7 benötigt.)
- b) Zeichne den Graphen G , dessen Knoten die Menge aller Basen aus der vorigen Teilaufgabe sind. Zwischen zwei Basen existiert genau dann eine Kante, wenn sie sich in nur einer Basisvariable unterscheiden. Beschrifte die Knoten mit der assoziierten Basis und die Kanten mit den auszutauschenden Variablen.
- c) Seien B_1 und B_2 diejenigen zulässigen Basen, deren Basislösungen den geringsten bzw. höchsten Zielfunktionswert besitzen. Gib eine Sequenz von Basiswechseln an, die nur zulässige Basen enthält und von B_1 zu B_2 führt. Markiere diese Sequenz in Abbildung 1 bzw. in G .

(10 Punkte)

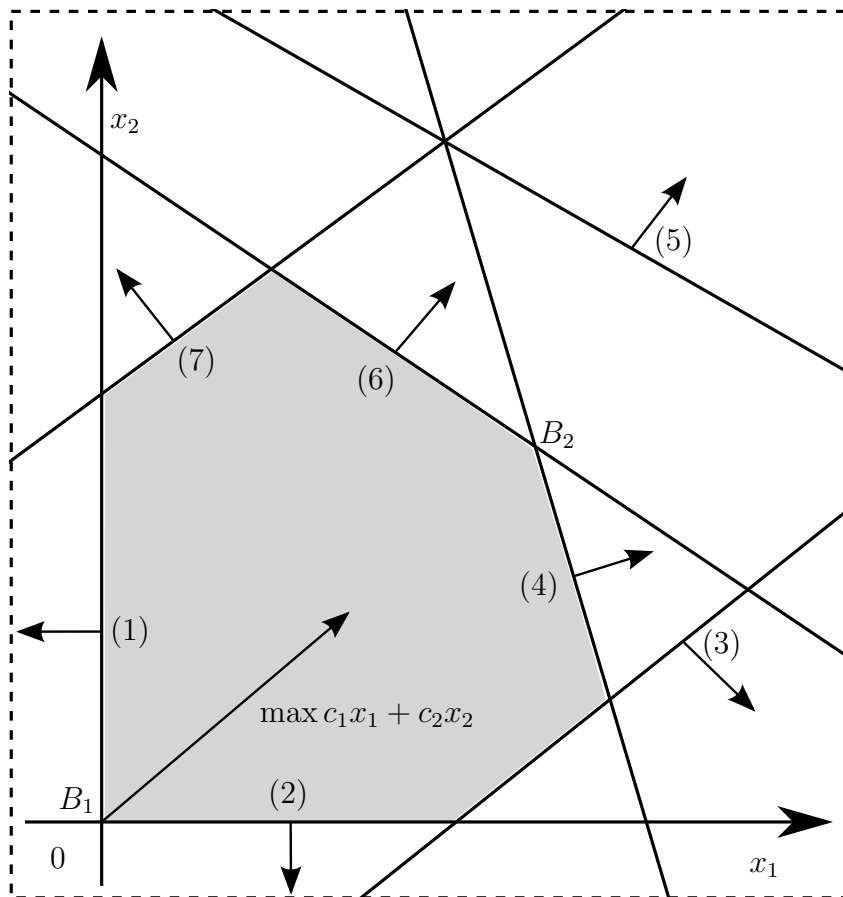


Abbildung 1: Das LP (P) aus Aufgabe 5