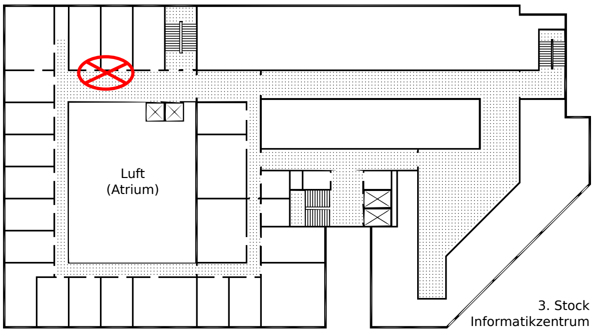
Abteilung Algorithmik **Winter 2018/19**
Institut für Betriebssysteme und Rechnerverbund
TU Braunschweig

Prof. Dr. Sándor Fekete
Dominik Krupke

Mathematische Methoden der Algorithmik
Übungsblatt 1 vom 29. 10. 2018

Die Abgabe der Lösungen zu Blatt 1 ist bis Dienstag, den 13. November 2018 um 13:15 Uhr im Hausaufgabenrückgabeschrank der Algorithmik möglich.



Bitte die Blätter vorne deutlich mit eigenem Namen sowie Matrikelnummer versehen und zusammenheften!

WICHTIG: Um die Studienleistung zu erhalten, müssen am Ende des Semesters insgesamt mindestens 50% der Hausaufgabenpunkte erreicht worden sein. Es wird insgesamt fünf Aufgabenblätter mit je 60 möglichen Punkten geben wobei Fehler durch Bonusaufgaben auf *dem gleichen* Arbeitblatt ausgeglichen werden können.

Aufgabe 1 (Graphische Darstellung von LPs): Gegeben seien die folgenden linearen Ungleichungen:

$$
\begin{aligned}
2x_1 &\geq -x_2 + 2 && (1)\\
x_1 + 2x_2 - 5 &\geq 0 && (2)\\
x_1 &\leq 5 + x_2 && (3)\\
-x_2 &\geq -x_1 - 3 && (4)\\
-4x_1 + 32 &\geq -x_2 && (5)\\
x_1 + x_2 &\leq 11 && (6)\\
x_1 &\geq 1 && (7)\\
x_1 &\leq 8 && (8)\\
x_2 &\geq 0 && (9)\\
x_2 &\leq 9 && (10)
\end{aligned}
$$

(a) Zeichne alle Ungleichungen in ein $\sim 10 \times 10$ cm großes Koordinatensystem ein (also jeweils die Gerade und markiere die zulässigen Seite) und markiere den Bereich der zulässigen Lösungen.

(b) Bestimme mit Hilfe deiner Grafik die Lösung folgender Optimierungsprobleme:

(i) $\min x_1 + x_2$

(ii) $\min x_1$

(iii) $\max x_2$

(iv) $\max 5x_2 + x_1$

Bestimme dazu die **unnötigen** Ungleichungen für das jeweilige Optimum und berechne anhand der restlichen **relevanten** Ungleichungen die jeweiligen exakten Lösungen.

Wenn es für ein Problem mehrere Lösungen gibt, erläutere kurz wieviele Lösungen existieren und warum.

Optional: Im Verlaufe des Semesters werden wir den Simplex-Algorithmus kennen und verstehen lernen, der solche Probleme auch für viele Variablen in der Praxis effizient lösen kann. Du kannst deine Lösung optional mit einem solchen Algorithmus etwa auf der Seite `http://hgourvest.github.io/glpk.js/` überprüfen. Die Syntax hierfür ist beispielsweise wie folgt:

```
Minimize
x1 + x2

Subject To
2 x1 + 1 x2 >= 1
3 x1 - 2 x2 <= 3

End
```

Konstanten dürfen nur auf der rechten Seite stehen und Variablen nur auf der linken, daher musst du obige Ungleichungen eventuell umformen.

(c) Im Laufe der Vorlesung werden wir es primär mit hochdimensionalen Räumen zu tun haben. Die 2- oder 3-dimensionale geometrische Darstellung kann in vielen Fällen das Verständnis erleichtern. Hierbei sollte man jedoch im Hinterkopf behalten, dass manche Dinge in höherdimensionalen Räumen kontraintuitiv sind und insbesondere die mit mit der Dimension steigende Komplexität schnell übersehen wird. Für diesen Zweck wollen wir den n-diensionalen Würfel betrachten.

Wie viele Flächen hat ein n-dimensionaler Würfel? Wie viele Ungleichungen braucht man um den Inhalt des Würfels zu begrenzen? Wie viele Ecken hat ein n-dimensionaler Würfel?

(5+10+5 Punkte)

Aufgabe 2 (Matching und Vertex Cover): Sei $G = (V, E)$ ein beliebiger, einfacher Graph. Seien VC_{opt} ein optimales Vertex Cover und M_{opt} ein optimales Matching in G. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass die Ungleichung $|M_{opt}| \leq |VC_{opt}|$ gilt.

(a) Zeige: $|VC_{opt}| \leq 2 \cdot |M_{opt}|$

(b) Gib eine Klasse von Graphen an, für die $|VC_{opt}|$ beliebig groß werden kann und die Ungleichung aus (a) immer mit Gleichheit erfüllt ist (mit kurzer Begründung). Ein Graph muss nicht zusammenhängend sein.

(c) Gib in eigenen Worte wieder, was Dualität ist und warum dieses Konzept so wichtig für Optimierungsprobleme ist.

(d) Gib einen optimalen polynominellen Algorithmus für Vertex Cover in Bäumen an. Neben der Lösung soll dieser auch ein Zertifikat für dessen Optimalität liefern.

(10+5+5+10 Punkte)

Aufgabe 3 (Lineare Unabhängigkeit):

a) Skizziere die folgenden Mengen von Vektoren im $\mathbb{R}^2$ und die davon aufgespannten Unterräume.

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

b) Welche der folgenden Mengen sind linear abhängig? Begründe deine Antwort.

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} \right\},$$
$$\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix} \right\},$$
$$\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$
$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(3+7 Punkte)