

DEFINITION S.19 (Median)

(1) Für n Zahlen x_1, \dots, x_n ist ein Median eine Zahl m mit den Eigenschaften

$$|\{x_i \mid x_i \leq m\}| \geq \frac{n}{2}$$

$$|\{x_i \mid x_i \geq m\}| \geq \frac{n}{2}$$

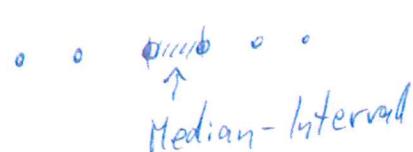
(2) Für Verteilungen:

Mit $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = A$ ist m ein Median, wenn

$$\int_{-\infty}^m f(x) dx \geq \frac{A}{2}$$

$$\text{und } \int_m^{\infty} f(x) dx \geq \frac{A}{2}$$

(3) Für eine ungerade Menge von Zahlen ist ein Median eindeutig, für eine gerade Menge kann (!) es mehr als einen geben.



(4) Verallgemeinert:

m hat Rang k in X , wenn

$$|\{x_i \mid x_i \leq m\}| \geq k$$

$$|\{x_i \mid x_i \geq m\}| \geq n-k$$

PROBLEM 5.20 (Median)

Gegeben: n Zahlen $\{x_1, \dots, x_n\} =: X$

Gesucht: Ein Median n von X

Allgemeiner:

PROBLEM 5.21 (Rang- k -Element)

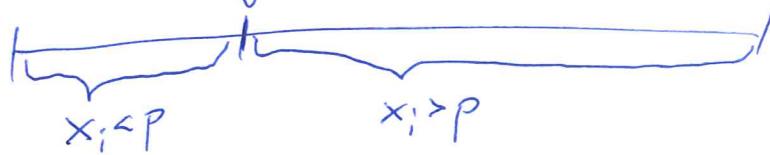
Gegeben: n Zahlen $\{x_1, \dots, x_n\} =: X$, $k \in \{1, \dots, n\}$

Gesucht: Ein Element von Rang k in X

Man kann beide Probleme lösen, indem man sortiert und dann abzählt - Laufzeit $\Theta(n \log n)$.

Gehlt das schneller?

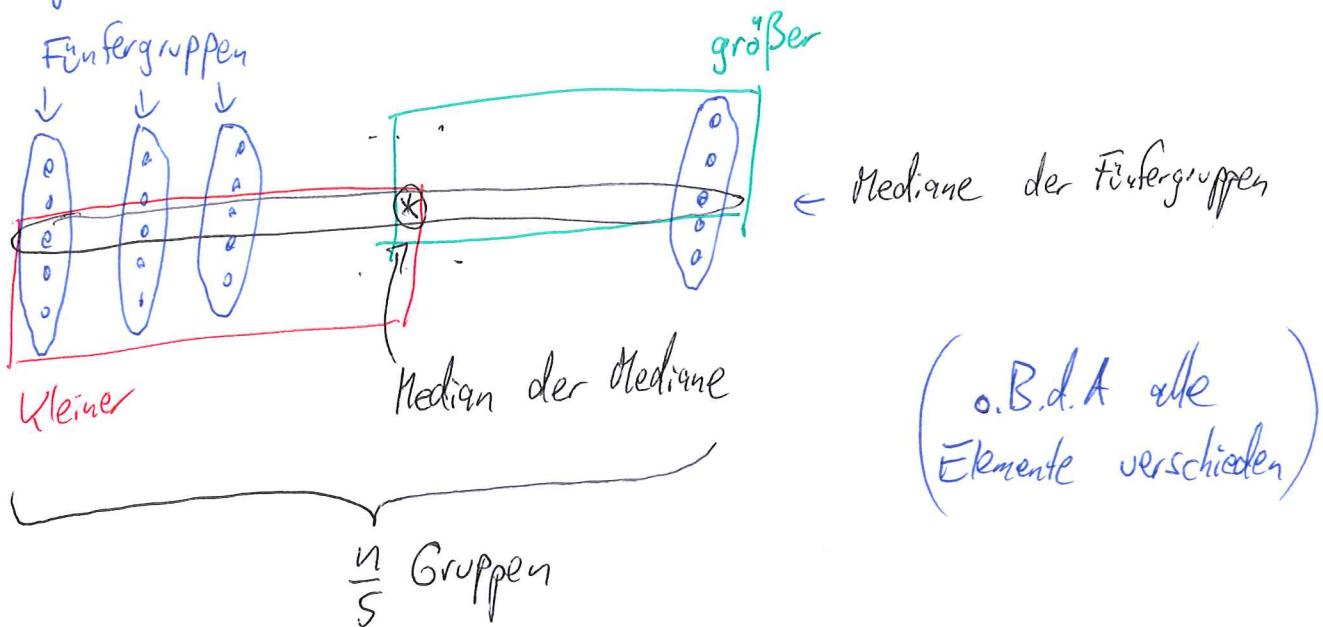
Idee inspiriert von Quicksort!



- Wähle ein Pivotelement
- Teile die Menge in größere und kleinere Elemente
- Bei Quicksort: Beide Teile rekursiv weiter unterteilen
Hier: Nur ein Teil! Der mit Median (bzw. Rang k)
- Aber: Bei schlechter Pivotauswahl bleibt nur der größere Teil übrig (Pivot am Rand!), es deuert also $\Omega(n^2)$.
- Ziel: Vermeide Worst Case, indem man jeweils Mindestgröße für beide Teile erreicht.

Umsetzung

(siehe Kapitel 9.3 in Cormen)



- (1) Teile n Elemente in $\lceil \frac{n}{5} \rceil$ Fünfergruppen

$\left. \right\}$ Zeit $\Theta(n)$
 (Ggf. kleinere Gruppe für den Rest - Runden
wird im Weiteren ignoriert, geht in O -Notation unter)
- (2) Bestimme jeweils Mediane der Gruppen

$\left. \right\}$ $\Theta(n)$
 (jeweils $O(1)$)
- (3) Bestimme (rekursiv) Medianen der Medianen x

$\left. \right\}$ $T\left(\frac{n}{5}\right)$
- (4) Verwende Median der Medianen x als Pivot.
Das liefert $i-1$ kleinere; $n-i$ größere Elemente

$\left. \right\}$ $\Theta(n)$

- (5) Falls $i = k$: fertig

$\left. \right\}$ $T(?)$
- Falls $i < k$: $(k-i)$ -tes Element rechts

\uparrow
 Größe des Restarrays
- Falls $i > k$: k -tes Element links

$\left. \right\}$ $T(?)$

↑ Algorithmus

Analyse (6)

Ist x rechts, werden mindestens die jeweils $\frac{11}{10}$ Mediane eliminiert, die kleiner sind als x - es fallen mitsamt der kleineren Elementen aus der Gruppe jeweils 3 Elemente weg, insgesamt mindestens $\frac{3n}{10}$.

Analog wenn x links liegt:

Es fallen mindesten $\frac{3n}{10}$ größere Elemente weg.

Also hat der Restarray höchstens Größe $\frac{7n}{10}$.

(7) Damit bekommt man die Rekursionsgleichung

$$T(n) = T\left(\frac{n}{5}\right) + T\left(\frac{7n}{10}\right) + \Theta(n)$$

(8) Nach Mastertheorem mit

$$k=1, \alpha_1 = \frac{1}{5}, \alpha_2 = \frac{7}{10}$$

$$\text{ist } \left(\frac{1}{5}\right)^k + \left(\frac{7}{10}\right)^k = \frac{9}{10} < 1.$$

Also ist $T(n) \in \Theta(n)$.

SATZ 5.22 (Blum, Floyd, Pratt, Rivest, Tarjan 1973 [BFPRS])
Median der Mediane berechnet ein Element von Rang "R" von RSA
 k in $\Theta(n)$

BEOBACHTUNG 5.23

$\Omega(n)$ ist unvermeidbar für die Berechnung eines Medians,
da man alle Elemente anschauen muss. Das Problem
hat also Komplexität $\Theta(n)$.

FRAGE 5.24

Was passiert, wenn man Dreier statt Fünfergruppen verwendet?
Was passiert bei Siebenergruppen?