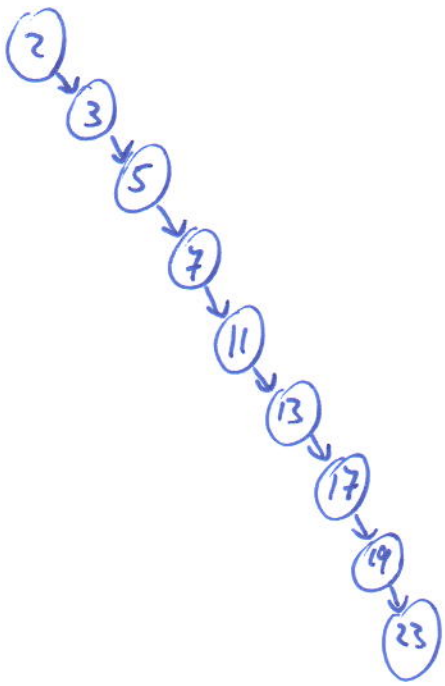
4.6 AVL-Bäume

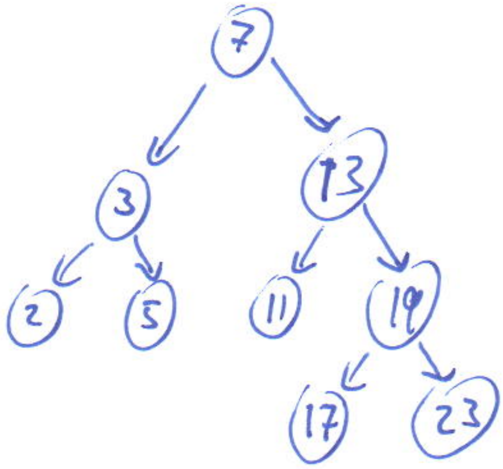
Entscheidend bei binären Suchbäumen: Höhe!

(Einfügen und Entfernen jeweils in $O(h)$)

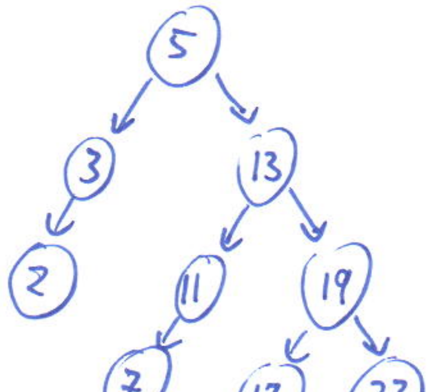
Schlecht:



Gut:



Auch gut:



Idee 1: Gestalte Baum „balanciert", d.h. linken und rechten Teilbaum gleich groß.

Problem 1: Nicht immer möglich!

<u>Idee 2:</u> Betrachte „annähernd balanciert".

<u>Problem 2:</u> Gewicht ist keine lokale Eigenschaft bei lokalen Eigenschaften – eher global...
(Wie setzt man das schnell und lokal um ?!)

<u>Idee 3:</u> wichtig ist eigentlich gar nicht das Gewicht, sondern die Tiefe / Höhe!

Das verfolgt

<u>DEFINITION 4.7</u> (AVL-Baum, nach Adel'son-Vel'skij und Landis, 1962)

(1) Ein binärer Suchbaum ist <u>höhenbalanciert</u>, wenn sich für jeden inneren Knoten v die Höhe der beiden Kinder von v um höchstens 1 unterscheidet.

(2) Ein höhenbalancierter Suchbaum heißt auch AVL-Baum.

Beispiele „gut" auf vorheriger Seite sind beide höhenbalanciert.

<u>Problem 3:</u> Reicht „höhenbalanciert", um logarithmische Höhe zu garantieren?

<u>Problem 4:</u> Wie sorgt man dafür, dass die Eigenschaft „höhenbalanciert" bei INSERT und DELETE erhalten bleibt?

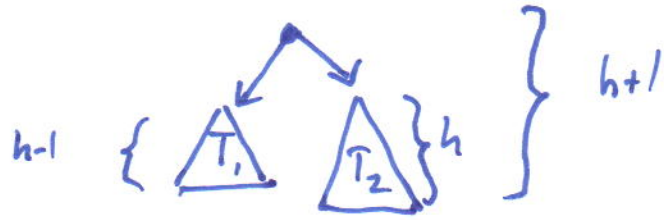
Beobachtung:
Wenn ein Baum höhenbalanciert ist, sind es auch alle seine Teilbäume, d.h. Höhenbalanciertheit ist eine rekursive Eigenschaft!

<u>Idee 3:</u> Wieviele Knoten braucht man mindestens für einen AVL-Baum der Höhe h?

(D.h. wir untersuchen nicht
Höhe in Abhängigkeit von der Knotenzahl
sondern
Knotenzahl in Abhängigkeit von der Höhe!)

Wenn n mindestens exponentiell in h wächst,
dann wächst h höchstens logarithmisch in n.

Betrachte allgemein:



Mit $n(1)=1$ und $n(2)=2$  bzw. 

und $n(h+1) = 1 + n(h) + n(h-1)$

erhält man

h	$n(h)$
1	1
2	2
3	4
4	7
5	12
6	20
7	33
8	54

(Sehr ähnlich:
$f(0)=1$, $f(1)=1$, $f(h+1) = f(h) + f(h-1)$
liefert 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34
→ Fibonacci-Zahlen!)

Sauber bewiesen:

Satz 4.8

Die Höhe eines AVL-Baumes mit n Knoten ist $O(\log n)$.

Beweis:

Statt einer oberen Schranke für die Höhe eines AVL-Baumes zeigen wir zunächst eine untere Schranke für die Zahl der Knoten eines AVL-Baumes!

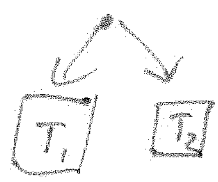
Sei $n(h)$ die kleinste Zahl von Knoten eines AVL-Baumes der Höhe h.

Wir beobachten

$$n(1) = 1 \quad \text{(ein Knoten erforderlich)}$$
$$n(2) = 2 \quad \text{(zwei Knoten erforderlich wegen Höhe)}$$

Noch einmal gilt

$$n(h) = \underbrace{1}_{\text{Wurzelknoten}} + \underbrace{n(h-1)}_{\text{Teilbaum}} + \underbrace{n(h-2)}_{\text{Teilbaum}}.$$



Wir zeigen per Induktion:

$$n(h) \geq 2^{\frac{h}{2}-1}$$

Induktionsanfang:

Die Behauptung gilt für

$h=1$: $n(1) = 1 \geq 2^{-\frac{1}{2}} = 2^{\frac{h}{2}-1}$

$h=2$: $n(2) = 2 \geq 2^{0} = 2^{\frac{h}{2}-1}$

Induktionsschritt:

Gelte die Behauptung für alle $h \in \{0, \ldots, k\}$.

Wir zeigen: Die Behauptung gilt für $h = k+1$!

Betrachte also

$$n(k+1) = 1 + n(k) + n(k-1).$$

Da $n(h)$ monoton wächst (für größere Höhe braucht man mindestens so viele Knoten wie für niedrigere!), gilt

$$n(k) \geq n(k-1).$$

Also ist

$$\begin{aligned} n(k+1) &\geq 1 + 2 \cdot n(k-1) \\ &\geq 1 + 2 \cdot 2^{\frac{k-1}{2}-1} \\ &= 1 + 2^{\frac{k+1}{2}-1} \end{aligned}$$

Ind.annahme

Damit gilt die Behauptung auch für $h = k+1$.

<u>Induktionsschluss:</u>
Für alle $h \in \mathbb{N}$ gilt $n(h) \geq 2^{\frac{h}{2}-1}$!

Damit ist auch

$$\log_2 (n(h)) \geq \frac{h}{2} - 1$$

oder

$$h \leq 2(\log_2 n + 1)$$

denn $n(h)$ ist die kleinstmögliche Knotenzahl bei Höhe h.

Damit hat ein AVL-Baum mit n Knoten höchstens die Höhe $2(\log_2 n + 1)$, also $O(\log n)$.

$\square$

Es bleibt Problem 4:
Wie bewahrt man Höhenbalanciertheit bei INSERT und DELETE?