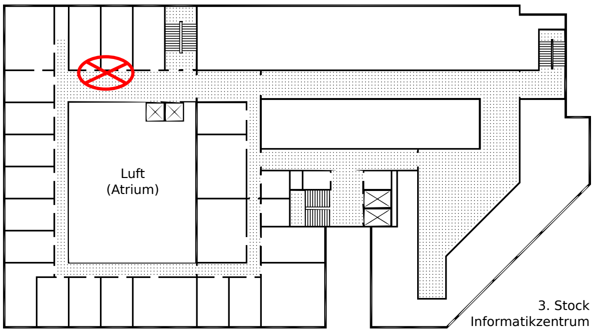
Abteilung Algorithmik **Winter 2018/2019**
Institut für Betriebssysteme und Rechnerverbund
TU Braunschweig

Dr. Christian Scheffer
Andreas Haas

Algorithmische Geometrie
Übung 1 vom 02. 11. 2017

Abgabe der Lösungen bis zum Freitag, den 16. 11. 2018 um 11:30 im Hausaufgabenrückgabeschrank.



Bitte die Blätter vorne deutlich mit eigenem Namen sowie Matrikel- und Gruppennummer versehen!

Aufgabe 1: Gib ein geometrisches Prädikat, mit dem entschieden werden kann, ob ein Liniensegment $\overline{p_1p_2} \subset \mathbb{R}^3$ ein positiv orientiertes Dreieck $\triangle(v_1, v_2, v_3) \subset \mathbb{R}^3$ durchdringt und begründe, warum das Prädikat die gestellte Aufgabe löst. Benutze hierbei lediglich die Formel für den vorzeichenbehafteten Flächeninhalt $A(\triangle(q_1, q_2, q_3, q_4))$ von Tetraedern $\triangle(q_1, q_2, q_3, q_4)$, die durch vier Punkte aufgespannt sind.

$A(\triangle(q_1, q_2, q_3, q_4))$ ist wie folgt definiert:

- Es sei E die Ebene, auf der die drei Punkte q_1, q_2 und q_3 im Gegenuhrzeigersinn orientiert liegen.
- Dann gilt:

$$A(\triangle(q_1, q_2, q_3, q_4)) \quad \left\{\begin{array}{lll} = 0 & \textit{falls} & q_1, q_2, q_3, q_4 \textit{ komplanar} \\ > 0 & \textit{falls} & q_4 \textit{ oberhalb von } E \\ < 0 & \textit{falls} & q_4 \textit{ unterhalb von } E \end{array}\right\}.$$

Zusätzliche Erläuterung:

- Es darf angenommen werden, dass v_1, v_2, v_3 nicht kollinear sind, d.h. sie bilden ein echtes Dreieck.
- Es muss lediglich ein echtes Durchdringen erkannt werden. Sollten p_1 und/oder p_2 die Ebene E nur berühren, dann darf das Prädikat false zurückgeben. Andernfalls wäre eine zusätzliche Fallunterscheidung innerhalb der Ebene mittels eines Orientierungs-Prädikats notwendig.
- Der Fall eines degenerierten Liniensegments (d.h. $p_1 = p_2$) ist durch den obigen Punkt bereits berücksichtigt.

- Die Konvention für die Orientierung ist folgendermaßen: Die durch q_1, q_2 und q_3 induzierte Ebene E ist so orientiert, dass Punkte aus dem positiven Halbraum (oberhalb) von E die drei Punkte q_1, q_2 und q_3 im Gegenuhrzeigersinn sehen. Der vorzeichenbehafteten Flächeninhalt für diese Punkte ist positiv. Punkte im negativen Halbraum (unterhalb) von E sehen q_1, q_2 und q_3 im Uhrzeigersinn, ihr vorzeichenbehafteten Flächeninhalt ist negativ.
- Die Punkte eines positiv orientierten Dreiecks sind im Gegenuhrzeigersinn orientiert.

(5 Punkte)

Aufgabe 2: Es sei P eine gegebene Punktmenge und $p, q \in P$ zwei Punkte, die unter allen Punktpaaren aus P einen maximalen Abstand haben. Beweise das p und q Eckpunkte der konvexen Hülle sind. **(5 Punkte)**

Aufgabe 3: Gegeben sei eine Punktmenge P und dessen Konvexe Hülle in Form der Eckpunkte $\langle q_1, \ldots, q_k \rangle$ der konvexen Hülle im Gegenuhrzeigersinn sortiert. Des Weiteren sei ein Punkt $p \in \mathbb{R}^2$, der nicht notwendigerweise in P liegt, gegeben.

Gib einen Algorithmus an, der in $\mathcal{O}(\log k)$ Zeit bestimmt, ob p innerhalb der konvexen Hülle von P liegt oder nicht. **(5 Punkte)**

Aufgabe 4: Gegeben eine endliche Punktmenge $P \subset \mathbb{R}^2$ in allgemeiner Lage (d.h. keine drei Punkte sind kollinear). Gib einen Algorithmus an, der zwei Punkte $p, q \in P$ bestimmt, sodass folgendes erfüllt ist: Es sei g die Gerade, auf der p und q liegen. Links und rechts von g sollen fast gleich viele Punkte (maximaler Unterschied 1 bzw. -1) liegen. Punkte, die auf g liegen zählen für keine Seite. Du darfst annehmen, dass solch ein Punktpaar (p, q) immer existiert.

Begründe die Korrektheit Deines Algorithmus und analysiere dessen Laufzeit.

Funktioniert Dein Algorithmus auch noch wenn P nicht in allgemeiner Lage ist? Wenn ja, begründe warum. Wenn nein, gib ein Gegenbeispiel an.

(5 Punkte)