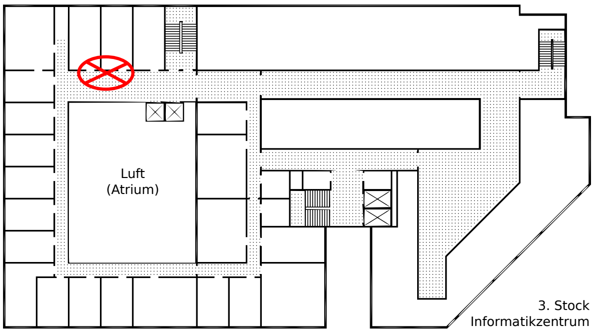
**Abteilung Algorithmik** **Winter 2017/18**
**Institut für Betriebssysteme und Rechnerverbund**
**TU Braunschweig**

Prof. Dr. Sándor P. Fekete
Christian Rieck
Arne Schmidt

# Algorithmen und Datenstrukturen
# Übung 3 vom 04. 12. 2017

Abgabe der Lösungen bis zum Montag, den 18. 12. 2017 um 11:30 im Hausaufgabenschrank bei Raum IZ 337. Es werden nur mit einem dokumentenechten Stift (kein Rot!) geschriebene Lösungen gewertet. **Bitte die Blätter zusammenheften und vorne deutlich mit eigenem Namen, Matrikel- und Gruppennummer, sowie Studiengang versehen!**




**Aufgabe 1 ($\mathcal{O}$-, $\Omega$- und $\Theta$-Notation I):** **(10+6 Punkte)**

a) Zeige durch Angabe geeigneter Konstanten $c$ sowie $n_0$, dass die folgenden Funktionen tatsächlich in der angegebenen Klasse liegen. Beweise, dass deine Konstanten korrekt gewählt sind.

$$\begin{aligned}
f_1(n) &= \tfrac{29}{7}n - 4n^2 + \tfrac{6}{7}n^3 &&\in \mathcal{O}(n^3)\\
f_2(n) &= 12n^2 - 5n + 2^{20} &&\in \mathcal{O}(n^2)\\
f_3(n) &= \tfrac{1}{\sqrt{n}} + 4242 &&\in \mathcal{O}(1)\\
f_4(n) &= 2n^2 - 2n &&\in \Omega(n^2)\\
f_5(n) &= \tfrac{13n^2\log n + 12n - 25n\log n}{n+5} &&\in \Omega(n\log n)
\end{aligned}$$

b) In welcher Beziehung stehen die folgenden Klassen zueinander? Schreibe $\subseteq$ in das Feld, wenn Klasse $A$ in Klasse $B$ enthalten ist, $\supseteq$, wenn Klasse $B$ in Klasse $A$ enthalten ist, $=$, wenn die Klassen $A$ und $B$ übereinstimmen und $\times$, wenn dies alles nicht zutrifft. Eine Begründung ist nicht notwendig.

| A | Relation | B |
|---:|---|---|
| $\mathcal{O}(n^2)$ | | $\Omega(n^2)$ |
| $\Theta(1)$ | | $\mathcal{O}(n)$ |
| $\mathcal{O}(n\log n)$ | | $\mathcal{O}(n^2)$ |
| $\mathcal{O}(\log n)$ | | $\mathcal{O}(\log(n^2))$ |
| $\Theta(n(\sin(n)+3))$ | | $\Theta(n)$ |
| $\mathcal{O}(n^2)\cap\Omega(n^2)$ | | $\Theta(n^2)$ |

**Aufgabe 2 (Abschätzen von Funktionen):** **(4+5+5 Punkte)**
Sei $\mathcal{W}(n)$ eine Funktion, für die $n = \mathcal{W}(n) \cdot e^{\mathcal{W}(n)}$ gilt. Wir wollen zeigen, dass $\mathcal{W}(n)$ in der Klasse $\Theta(\log n)$ liegt. (Hinweis: Für $n \geq 0$ ist $\mathcal{W}(n)$ monoton wachsend.)

a) Bestimme ein $n_0$, sodass $\log_e(\mathcal{W}(n)) \geq 0$ für alle $n \geq n_0$ gilt.

b) Zeige: $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : \mathcal{W}(n) \leq \log_e n$

c) Zeige: $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : \mathcal{W}(n) \geq \frac{1}{2} \log_e n$

**Aufgabe 3 ($\mathcal{O}$-, $\Omega$- und $\Theta$-Notation II):** **(5+5+5 Punkte)**
Betrachte die Funktionen $f_1, f_2, f, g_1, g_2, g, h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit $f(n) := f_1(n) \cdot f_2(n)$ und $g(n) := g_1(n) \cdot g_2(n)$. Zeige oder widerlege folgende Aussagen:

a) $f(n) \in \mathcal{O}(g(n)) \Leftrightarrow g(n) \in \Omega(f(n))$

b) $f(n) \in \mathcal{O}(g(n)) \Rightarrow f_1(n) \in \mathcal{O}(g_1(n)) \wedge f_2(n) \in \mathcal{O}(g_2(n))$

c) $f(n) \in \mathcal{O}(g(n)) \wedge g(n) \in \mathcal{O}(h(n)) \Rightarrow f(n) \in \mathcal{O}(h(n))$

**Aufgabe 4 (Laufzeit von Algorithmen):** **(3+4+5+3 Punkte)**
Du hast einen Input von $n$ Elementen und einen Algorithmus, der einzelne Elemente bearbeitet. Das kostet $n^2 + 7 \log n$ Operationen pro Element. Alle Elemente müssen bearbeitet werden.

a) Wie lange dauert das (mit und ohne $\Theta$-Notation)?

b) Die Bearbeitung zweier Elemente ist unabhängig voneinander, man kann sie also parallelisieren. Dazu stehen 8 Kerne zur Verfügung. Wie wirkt sich dies auf die Gesamtlaufzeit aus (mit und ohne $\Theta$-Notation)?

c) Alternativ kannst du ein Preprocessing verwenden, welches in $3n \log n + 4n - 7$ läuft und danach die Bearbeitungszeit pro Element auf $\log n$ reduziert, allerdings ist die Bearbeitung der Elemente dann nicht mehr parallelisierbar. Wie wirkt sich das auf die Gesamtlaufzeit aus (mit und ohne $\Theta$-Notation)?

d) Für welche Möglichkeit (ursprünglicher Algorithmus, b), oder c)) entscheidest du dich, um die Leistungsfähigkeit des Programms für große Inputmengen zu maximieren? Begründe deine Wahl.