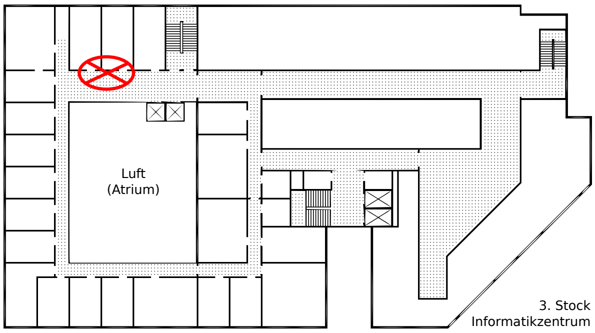
Abteilung Algorithmik **Winter 2017/18**
Institut für Betriebssysteme und Rechnerverbund
TU Braunschweig

Prof. Dr. Sándor P. Fekete
Christian Rieck
Arne Schmidt

Algorithmen und Datenstrukturen
Übung 1 vom 06. 11. 2017

Abgabe der Lösungen bis zum Montag, den 20. 11. 2017 um 11:30 im Hausaufgabenschrank bei Raum IZ 337. Es werden nur mit einem dokumentenechten Stift (kein Rot!) geschriebene Lösungen gewertet. **Bitte die Blätter zusammenheften und vorne deutlich mit eigenem Namen, Matrikel- und Gruppennummer, sowie Studiengang versehen!**



Aufgabe 1 (Beweistechniken): **(4+5+8+8 Punkte)**

a) Zeige durch einen Widerspruchsbeweis, dass $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl sein kann. (Hinweis: Nimm dazu an, dass $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$ mit $p, q \in \mathbb{N}$, und $\mathrm{ggT}(p, q) = 1$ eine gekürzte Darstellung von $\sqrt{2}$ als rationale Zahl ist.)

b) Zeige oder widerlege: In einem einfachen Graphen mit mindestens zwei Knoten gibt es mindestens zwei Knoten mit gleichem Grad.

c) Führe einen direkten Beweis des sogenannten *Handshake-Lemmas*:

In jedem Graphen G ist die Anzahl der Knoten mit ungeradem Grad gerade.

(Hinweis: Betrachte dazu die Summe $\sum_{v \in V(G)} d(v)$ der Knotengrade in G.)

d) Zeige mithilfe von vollständiger Induktion: Für alle natürlichen Zahlen n gilt

$$\left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} i^3.$$

Aufgabe 2 (Hamilton und Euler): **(5+5+5+5 Punkte)**

a) Zeige oder widerlege: Wenn jeder Knoten eines einfachen, zusammenhängenden Graphen den Grad 3 besitzt, besitzt der Graph einen Hamiltonkreis.

b) Zeige oder widerlege: Es gibt einfache Graphen mit mindestens fünf Knoten, die einen Eulerweg, allerdings keinen Hamiltonpfad, keinen Hamiltonkreis und auch keine Eulertour haben.

c) Zeige: Besitzt jeder Knoten einen Grad von mindestens $d \geq 3$, dann besitzt der Graph einen Kreis der Länge $\geq d + 1$. (Hinweis: Betrachte einen längsten Pfad in dem Graphen und den letzten Knoten auf diesem Pfad.)

d) Ein *rechteckiger Gittergraph* $G_{a,b}$ ist ein Graph auf $a \cdot b$ vielen Knoten, die auf ganzzahligen Koordinaten innerhalb eines Rechteckes der Größe $a \times b$ im kartesischen Koordinatensystem liegen. Zwei Knoten sind verbunden, wenn sie im Gitter benachbart sind, d.h. Distanz 1 haben.

Betrachte nun die beiden Graphen $G_{3,3}$ und $G_{4,4}$ aus Abbildung 1.

- Besitzt der $G_{3,3}$ einen Hamiltonkreis?
- Besitzt der $G_{4,4}$ einen Hamiltonkreis?
- Welche Eigenschaften müssen a und b erfüllen, damit der $G_{a,b}$ einen Hamiltonkreis besitzt?

(Hinweis: Eine Angabe ohne Begründung ist hier ausreichend.)

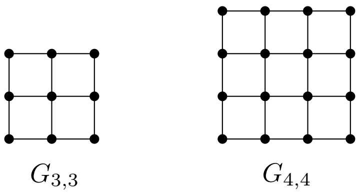


Abbildung 1: Die Graphen $G_{3,3}$ und $G_{4,4}$.

Aufgabe 3 (Algorithmus von Fleury): (15 Punkte)

Wende Fleurys Algorithmus (wird in der Vorlesung am 08.11.2017 vorgestellt) auf den Graphen G aus Abbildung 2 an. Starte am Knoten v_1 und wähle in jedem Schritt, in dem mehrere Kanten zur Auswahl stehen, diejenige, die zum Knoten mit dem jeweils kleinsten Index führt. Gib die Reihenfolge der besuchten Knoten an.

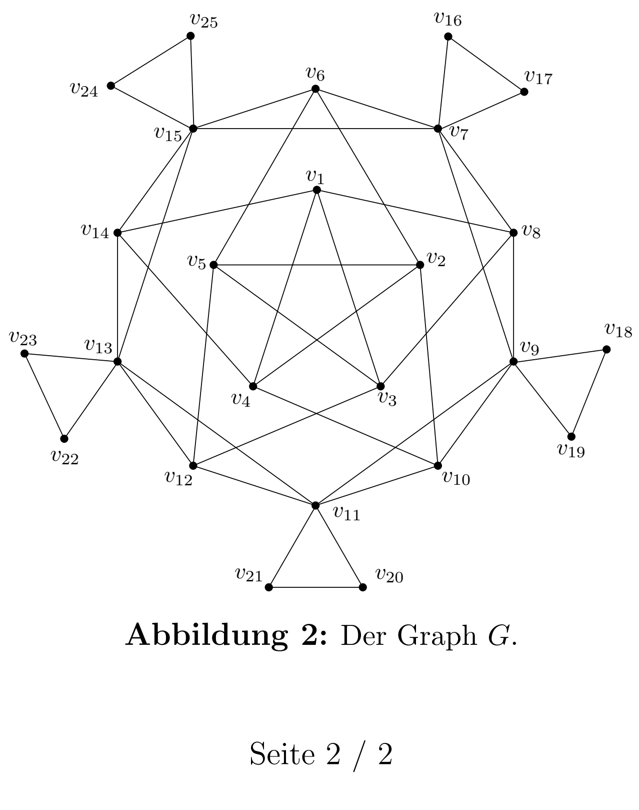


Abbildung 2: Der Graph G.