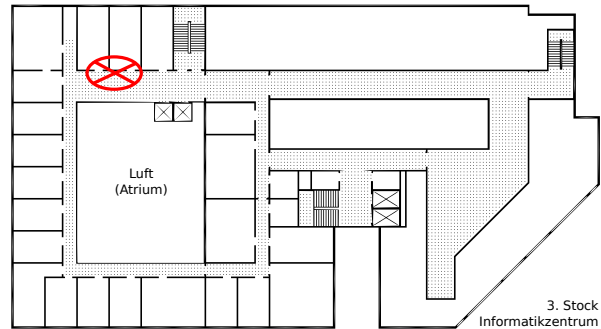


Dr. Christian Scheffer
Andreas Haas

Algorithmische Geometrie Übung 2 vom 1. 12. 2017

Abgabe der Lösungen bis zum Freitag,
den 01.12.2017 um 11:30 im Hausaufga-
benrückgabeschrank.

Bitte die Blätter vorne deutlich mit
eigenem Namen sowie Matrikel- und
Gruppennummer versehen!



Aufgabe 1: Wende Jarvis' March auf der Punktmenge an, die in Abbildung 1 abgebildet ist. Gib hierzu für jede Iteration der REPEAT-Schleife an, welcher neue Eckpunkt der konvexen Hülle gefunden wird. Weiter gib innerhalb jeder Iteration der REPEAT-Schleife nach jeder Aktualisierung von p_{next} an, welcher Punkt p_i der Punkt p_{next} ist. Betrachte für diese Aufgabe folgende Veränderung des Algorithmus Jarvis' March:

- In jeder Iteration der REPEAT – UNTIL-Schleife wird p_{next} initial als der Punkt aus $P \setminus \{p\}$ gewählt, der den kleinsten Index hat.
- In der FOR-Schleife werden die Punkte aus P in der Reihenfolge $\langle p_1, \dots, p_n \rangle$ abgearbeitet.

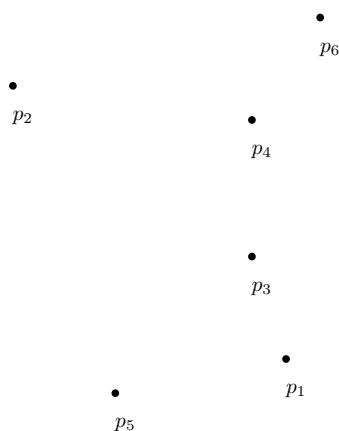


Abbildung 1: Die Punktmenge P für Aufgabe 1.

(5 Punkte)

Aufgabe 2: Gib ein geometrisches Prädikat, mit dem entschieden werden kann, ob ein Liniensegment $\overline{p_1 p_2} \subset \mathbb{R}^3$ ein positiv orientiertes Dreieck $\Delta(v_1, v_2, v_3) \subset \mathbb{R}^3$ durchdringt und begründe, warum das Prädikat die gestellte Aufgabe löst. Benutze hierbei lediglich die Formel für den vorzeichenbehafteten Flächeninhalt $A(\Delta(q_1, q_2, q_3, q_4))$ von Tetraedern $\Delta(q_1, q_2, q_3, q_4)$, die durch vier Punkte aufgespannt sind.

$A(\Delta(q_1, q_2, q_3, q_4))$ ist wie folgt definiert:

- Es sei E die Ebene, auf der die drei Punkte q_1, q_2 und q_3 im Gegenuhrzeigersinn orientiert liegen.
- Dann gilt:

$$A(\Delta(q_1, q_2, q_3, q_4)) \quad \left\{ \begin{array}{ll} = 0 & \text{falls } q_1, q_2, q_3, q_4 \text{ komplanar} \\ > 0 & \text{falls } q_4 \text{ oberhalb von } E \\ < 0 & \text{falls } q_4 \text{ unterhalb von } E \end{array} \right\}.$$

(5 Punkte)

Aufgabe 3: In dieser Aufgabe sollen die Details des in Kapitel 2 bearbeiteten Algorithmus QUICKHULL ausgearbeitet werden.

- Gib an, wie man mit den in der Vorlesung besprochenen elementaren geometrischen Prädikaten das *Pivotelement* h bestimmen kann (verwende nicht explizit die Euklidische Distanzfunktion). Begründe, warum Dein Ansatz korrekt ist.
- Analysiere die Laufzeit des resultierenden Algorithmus. Gib hierbei je eine Familie von Punktemengen (d.h. eine mit n parametrisierbare Konstruktionsvorschrift zum Erzeugen einer Konfiguration mit n Punkten) an, für die QUICKHULL $\Theta(n \log n)$ Zeit bzw. $\Theta(n^2)$ Zeit benötigt. Begründe dabei jeweils, warum die geforderte Laufzeit auch erreicht wird.

(5 Punkte)

Aufgabe 4 ($O(n)$ Space – Sweep Line): Sei k die Anzahl der Schnittpunkte. Ändere den Sweep-Line Algorithmus `FindIntersections` so, dass der Speicherbedarf $O(n)$ statt $O(n+k)$ ist. Der Speicherbedarf bezeichnet den Speicher, der vom Algorithmus tatsächlich benötigt wird, d.h. bereits ausgegebene Schnittpunkte werden nicht dazu gezählt. Eine kurze Beschreibung deiner Idee/Änderung genügt.

Zeige, dass dein neuer Algorithmus $O(n)$ Speicher benötigt und argumentiere wieso die Laufzeit unverändert bleibt.

Kannst du ein Beispiel finden, bei dem der originale Algorithmus mehr als $O(n)$ Speicher benötigt oder kannst du zeigen, dass es keine solche Eingabe gibt und der Speicherbedarf bereits $O(n)$ war?

(5 Punkte)