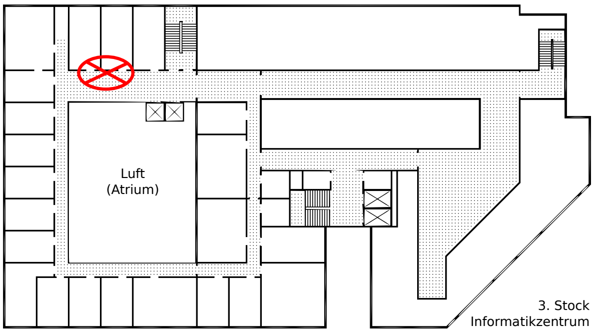
Abteilung Algorithmik **Winter 2016/17**
Institut für Betriebssysteme und Rechnerverbund
TU Braunschweig

Prof. Dr. Sándor Fekete
Christian Rieck

Mathematische Methoden der Algorithmik
Übungsblatt 5 vom 20.01.2017

Die Abgabe der Lösungen zu Blatt 5 ist bis Freitag, den 03.02.2017 um 13:15 Uhr im Hausaufgabenrückgabeschrank der Algorithmik möglich.

Bitte die Blätter vorne deutlich mit eigenem Namen sowie Matrikelnummer versehen und zusammenheften!



Aufgabe 1 (Komplementärer Schlupf): Gegeben sei das folgende lineare Programm:

$$(P)\left\{\begin{array}{lrcrcrcrcrcl}
\max & 7x_1 & + & 6x_2 & + & 5x_3 & - & 2x_4 & + & 3x_5 & & \\
\text{s.t.} & x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & - & 2x_4 & + & 2x_5 & \leq & 4 \\
 & 4x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & + & x_5 & \leq & 3 \\
 & 2x_1 & + & 4x_2 & + & 4x_3 & - & 2x_4 & + & 5x_5 & \leq & 5 \\
 & 3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & - & 2x_5 & \leq & 1 \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5 & \geq & 0
\end{array}\right.$$

a) Formuliere das duale Problem zu (P).

b) Formuliere die Bedingungen für komplementären Schlupf zu (P).

c) Prüfe mit Hilfe des Satzes vom komplementären Schlupf, ob $x^* = (0, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 0)^T$ eine optimale Lösung von (P) ist.

(5+5+10 Punkte)

Aufgabe 2 (Matching und TSP):

a) Betrachte eine Instanz für das Min-Cost-Perfect-Matching mit zehn Knoten. Die Kosten der Kanten sind in Tabelle 1 gegeben. Erzeuge eine `.lp`-Datei für diese Instanz und löse es mit CPLEX. Füge anschließend geeignete Blossom-Constraints hinzu und löse das LP erneut; wiederhole dies bis eine ganzzahlige Lösung gefunden wurde.

b) Betrachte eine Instanz für das Traveling-Salesman-Problem mit zehn Knoten. Die Kosten der Kanten sind in Tabelle 1 gegeben. Erzeuge eine `.lp`-Datei für diese

Instanz und löse es mit CPLEX. Füge anschließend geeignete Subtour-Constraints hinzu und löse das LP erneut; wiederhole dies bis eine ganzzahlige Lösung gefunden wurde.

Abzugeben sind jeweils die initiale `.lp`-Datei und eine Auflistung, welche Constraints in welcher Iteration hinzugefügt wurden. Des Weiteren soll der Zielfunktionswert und die Variablenbelegung abgegeben werden. Nennt die Kantenvariablen (für die Kante von Knoten i zu Knoten j) zur besseren Korrektur bitte x_{ij}.

(Hinweis: Ihr könnt die Variablen für die TSP Instanz als Binary deklarieren.)

u, v	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
1	-	38	66	45	26	50	36	44	50	42
2	-	-	47	37	47	12	13	28	26	63
3	-	-	-	22	46	50	37	35	23	51
4	-	-	-	-	26	39	25	20	17	34
5	-	-	-	-	-	50	35	20	43	21
6	-	-	-	-	-	-	17	31	28	65
7	-	-	-	-	-	-	-	31	15	51
8	-	-	-	-	-	-	-	-	24	36
9	-	-	-	-	-	-	-	-	-	51
0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Tabelle 1: Distanzen zwischen den jeweiligen Knoten.

(13+13 Punkte)

Aufgabe 3 (Modellierung): Modelliere die beiden folgenden Problem jeweils als IP. Beschreibe dabei jede Restriktion kurz mit eigenen Worten.

a) Gegeben sei ein Behälter der Größe W, sowie n Objekte mit Größen w_i und Profiten p_i, $i = 1, \ldots, n$. Ziel ist es, den Behälter so zu befüllen, dass der Profit maximal ist.

b) Gegeben seien unendlich viele Behälter der Größe 1, sowie n Objekte mit Größen w_i, $i = 1, \ldots, n$. Ziel ist es, alle Objekte in möglichst wenige Behälter zu packen. (Hinweis: Eine Menge von Objekten kann in einen Behälter gepackt werden, wenn die Summe der Größen kleiner als die Behältergröße ist.)

(7+7 Punkte)