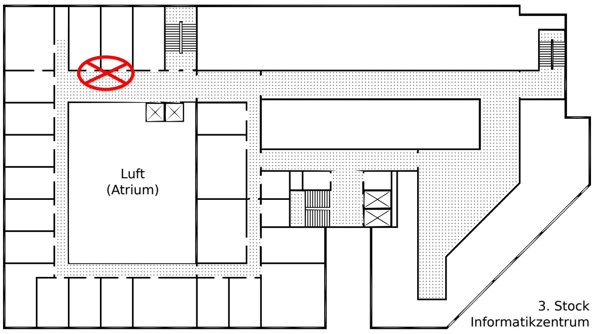
Abteilung Algorithmik **Winter 2016/17**
Institut für Betriebssysteme und Rechnerverbund
TU Braunschweig

Prof. Dr. Sándor Fekete
Christian Rieck

Mathematische Methoden der Algorithmik
Übungsblatt 4 vom 19.12.2016

Die Abgabe der Lösungen zu Blatt 4 ist bis Freitag, den 20.01.2017 um 13:15 Uhr im Hausaufgabenrückgabeschrank der Algorithmik möglich.



Bitte die Blätter vorne deutlich mit eigenem Namen sowie Matrikelnummer versehen und zusammenheften!

Aufgabe 1 (Dualität): Gegeben sei ein LP der Form

$$(\Pi)\left\{\begin{array}{llll} \max & c^T x & & \\ \text{s.t.} & Ax & \leq & b \\ & x & \text{frei} & \end{array}\right.$$

Sei Γ das duale LP zu Π. Zeige, dass das duale LP zu Γ wieder Π ist. **(15 Punkte)**

Aufgabe 2 (Simplex-Tableau):

(a) Löse das folgende LP mit dem Simplex-Algorithmus.

$$\begin{array}{lrcrcrcl} \max & x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & & \\ \text{s.t.} & -\ 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & \geq & -40 \\ & x_1 & & & + & x_3 & \leq & 25 \\ & & & x_2 & + & 3x_3 & \leq & 30 \\ & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Benutze zum Lösen des LPs die Darstellung im Tableau. Argumentiere in jedem Schritt kurz, warum du die gewählte Variable in die Basis aufnimmst, welches das neue Pivotelement ist und warum.

(b) Dualisiere das LP aus Aufgabenteil (a).

(c) Löse das LP aus Aufgabenteil (b) mit dem Simplex-Algorithmus. Benutze zum Lösen des LPs wieder die Darstellung im Tableau. Argumentiere in jedem Schritt kurz, warum du die gewählte Variable in die Basis aufnimmst, welches das neue Pivotelement ist und warum.

(6+5+6 Punkte)

Aufgabe 3 (CPLEX): Löse die beiden LPs aus Aufgabe 2 (das gegebene LP und sein Duales) mit CPLEX. Abzugeben ist wieder ein Ausdruck der `.lp`-Dateien und der relevanten Teile aus der `cplex.log`. Nutze die Lösung von CPLEX, um deine Lösungen aus Aufgabe 2 zu verifizieren. **(4+4 Punkte)**

Aufgabe 4 (Reduzierte Kosten):

(a) Sei $c^T = (4, 6, 0, 0, 0)$ gegeben. Angenommen, das folgende Tableau ist ein Zwischenschritt im Simplex. Berechne die reduzierten Kosten $\overline{c}_i, 1 \leq i \leq 5$ und den aktuellen Zielfunktionswert z.

$\overline{c}_1$	$\overline{c}_2$	$\overline{c}_3$	$\overline{c}_4$	$\overline{c}_5$	$-z$
-1	1	1	0	0	11
2	0	-1	1	0	16
7	0	-5	0	1	35

(b) Sei $c^T = (3, 2, 1, 0, 0, 0)$ gegeben. Angenommen, das folgende Tableau ist ein Zwischenschritt im Simplex. Berechne die reduzierten Kosten $\overline{c}_i, 1 \leq i \leq 6$ und den aktuellen Zielfunktionswert z.

$\overline{c}_1$	$\overline{c}_2$	$\overline{c}_3$	$\overline{c}_4$	$\overline{c}_5$	$\overline{c}_6$	$-z$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{15}{2}$
0	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{90}{2}$
0	$\frac{7}{4}$	$\frac{11}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	1	$\frac{65}{2}$

(4+6 Punkte)

Aufgabe 5 (Santa Claus): Santa hat ein Problem: Gerade als er alle Geschenke ausgeliefert hat und in seinen wohlverdienten Jahresurlaub starten will, schneit es. Als es aufhört, schaut Santa ganz ungläubig: ein Meter Neuschnee!

Da er dieses Jahr auf den Keys und nicht wie letztes Jahr die Zeit mit Forschung im Marie-Byrd-Land verbringen will, droht sich sein Urlaub zu verzögern, sollte ihm nicht schnell etwas einfallen. Der Grund: er bekommt seinen Sommerschlitten nicht aus der Garage. Gerade als er aufgeben will, fällt ihm ein, dass ihm Väterchen Frost letztens einen Snow-Blower mitgebracht hat. Ein kurzer Blick in die Gebrauchsanweisung lässt ihn aufatmen. Die Höhe des Schnees scheint für den Snow-Blower kein Problem zu sein, denn Schnee bis zu einer Höhe von einem Meter kann man räumen, mehr allerdings nicht. Eine weitere Einschränkung ist, dass man den Schnee nur in Fahrtrichtung nach rechts wegräumen kann. Da die Garage von Santa am rechten Rand seiner Einfahrt steht, ist dies kein Problem.

Um keine weitere Zeit zu verschwenden, macht er sich eine Skizze von seiner Garageneinfahrt (Abbildung 1) um damit die optimale Räumstrategie zu ermitteln. So einfach ist das aber alles gar nicht, weshalb er sich dann doch dazu durchringt, das Problem noch mal etwas mathematischer zu betrachten, auch wenn er Mathematik ja immer nicht gemocht hat.

Gegeben: Ein 3×3-Gitter sowie eine Garage, ein Snow-Blower und eine Einheit Schnee auf jedem Gitterfeld. Der Snow-Blower kann Schnee von maximal einer Einheit immer um ein Feld nach rechts (in Fahrtrichtung) werfen und sich nur horizontal und vertikal von Feld zu Feld bewegen. Der Schnee eines Feldes darf nur auf ein anderes Feld geworfen werden, wenn auf diesem vorher kein Schnee mehr lag (man kann also keinen Schnee innerhalb des Gitters stapeln). Der Schnee gilt als geräumt, wenn er über den Rand des Gitters geworfen wurde (die Höhe des Schnees außerhalb des Gitters ist beliebig). Der Snow-Blower selbst darf die Grenzen des 3×3-Gitters sowie der Garage nicht verlassen.

Gesucht: Eine optimale Strategie die in der Garage startet, den Schnee aus dem gesamten 3×3-Gitter entfernt, dabei keinen Schnee in die Garage wirft und danach wieder in die Garage zurückkehrt.

Hilf Santa und löse die folgenden Aufgaben:

(a) Finde eine Strategie, die möglichst wenige Schritte benötigt.

(b) Zeige, dass deine Strategie optimal ist, d.h., dass es keine Strategie gibt, die mit weniger Schritten auskommt.

(Hinweis: Die Aufgabe hat an sich nur wenig mit linearer Optimierung zu tun. Es ist sinnvoll, sich einige Eigenschaften zu überlegen, die die optimale Tour erfüllen muss. Dies wäre eine untere Schranke. Insbesondere sollen nicht alle Touren enumeriert und verglichen werden.)

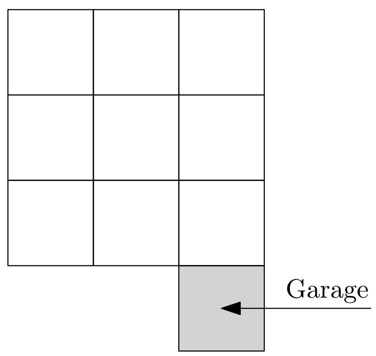


Abbildung 1: Die Garage von Santa mit der zugehörigen Einfahrt.

(10 Punkte)

Frohe Weihnachten und einen guten Rutsch!