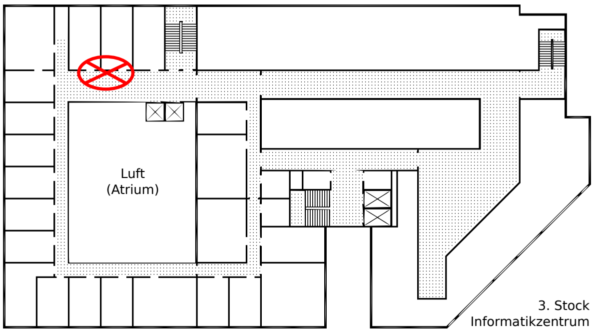
Abteilung Algorithmik **Winter 2016/17**
Institut für Betriebssysteme und Rechnerverbund
TU Braunschweig

Prof. Dr. Sándor Fekete
Christian Rieck

Mathematische Methoden der Algorithmik
Übungsblatt 2 vom 18. 11. 2016

Die Abgabe der Lösungen zu Blatt 2 ist bis Freitag, den 02. 12. 2016 um 13:15 Uhr im Hausaufgabenrückgabeschrank der Algorithmik möglich.

Bitte die Blätter vorne deutlich mit eigenem Namen sowie Matrikelnummer versehen und zusammenheften!



Aufgabe 1 (Dualität):

a) Das Problem

$$\begin{array}{rrcl} \min & c^T x & & \\ \text{s. t.} & Ax & = & b \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

habe eine endliche Optimallösung. Zeige, dass das Problem

$$\begin{array}{rrcl} \min & c^T x & & \\ \text{s. t.} & Ax & = & b' \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

für jedes beliebige b' nicht unbeschränkt ist.

b) Sei $A = A^T$. Zeige, dass jede zulässige Lösung von

$$\begin{array}{rrcl} \min & c^T x & & \\ \text{s. t.} & Ax & = & c \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

optimal ist.

(10+10 Punkte)

Aufgabe 2 (Gauß-Verfahren): Zeige, dass die folgenden Operationen den Lösungsraum eines linearen Gleichungssystems nicht verändern.

- Vertauschen von zwei Gleichungen
- Multiplikation einer Gleichung mit einem Skalar
- Addition eines skalaren Vielfachen einer Gleichung zu einer anderen Gleichung

Zeige dazu, dass jede Lösung x vor einer Operation, auch eine Lösung nach der Operation ist. Zeige zusätzlich, dass eine Operation mit einer anderen Operation rückgängig gemacht werden kann. **(10 Punkte)**

Aufgabe 3 (Lineare Unabhängigkeit):

a) Skizziere die folgenden Mengen von Vektoren im $\mathbb{R}^2$ und die davon aufgespannten Unterräume.

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}, \left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right\}, \left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\right\}$$

b) Welche der folgenden Mengen sind linear abhängig? Begründe deine Antwort.

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}8\\2\end{pmatrix}\right\},$$
$$\left\{\begin{pmatrix}4\\8\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\7\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\9\\6\end{pmatrix}\right\},$$
$$\left\{\begin{pmatrix}4\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}9\\7\\1\end{pmatrix}\right\},$$
$$\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

(3+7 Punkte)

Aufgabe 4 (LP-Formulierung eines Optimierungsproblems): Formuliere das folgende Optimierungsproblem als LP: Gegeben n Punkte (x_i, y_i) in der Ebene. Gesucht ist eine Gerade, die das Maximum der vertikalen Abstände zu den Punkten minimiert. Wie lautet das dualisierte Problem? **(20 Punkte)**