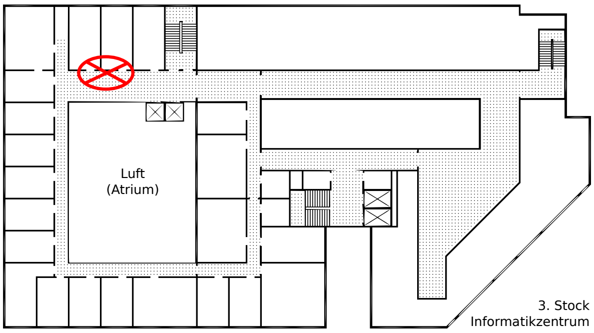
Abteilung Algorithmik **Winter 2016/17**
Institut für Betriebssysteme und Rechnerverbund
TU Braunschweig

Prof. Dr. Sándor Fekete
Christian Rieck

Mathematische Methoden der Algorithmik
Übungsblatt 1 vom 07. 11. 2016

Die Abgabe der Lösungen zu Blatt 1 ist bis Freitag, den 18. 11. 2016 um 13:15 Uhr im Hausaufgabenrückgabeschrank der Algorithmik möglich.

Bitte die Blätter vorne deutlich mit eigenem Namen sowie Matrikelnummer versehen und zusammenheften!



WICHTIG: Um die Studienleistung zu erhalten, müssen am Ende des Semesters insgesamt mindestens 50% der Hausaufgabenpunkte erreicht worden sein. Es wird insgesamt fünf Aufgabenblätter mit je 60 möglichen Punkten geben.

Aufgabe 1 (Formen von LPs): Betrachte das folgende lineare Optimierungsproblem:

$$(P) \left\{ \begin{array}{lrcrcr} \min & x_1 & + & x_2 & & \\ \text{s. t.} & x_1 & + & 3x_2 & \geq & 9 \\ & 2x_1 & + & x_2 & \geq & 8 \\ & 2x_1 & + & 5x_2 & \leq & 40 \\ & x_1 & & & \leq & 8 \\ & x_1 & & & \geq & 0 \\ & & & x_2 & \geq & 0 \end{array} \right.$$

Schreibe das lineare Programm P in den Formen

(a) $\min\{c^T x \mid Ax \leq b\}$

(b) $\max\{c^T x \mid Ax = b, x \geq 0\}$

(c) $\min\{c^T x \mid Ax \leq b, x \text{ frei}\}$.

Die Matrixschreibweise ist nicht gefordert. **(4+5+6 Punkte)**

Aufgabe 2 (Graphische Darstellung von LPs): Gegeben seien die folgenden linearen Ungleichungen:

$$
\begin{aligned}
2x_1 &\geq -x_2 + 2 && (1)\\
x_1 + 2x_2 - 5 &\geq 0 && (2)\\
x_1 &\leq 5 + x_2 && (3)\\
-x_2 &\geq -x_1 - 3 && (4)\\
-4x_1 + 32 &\geq -x_2 && (5)\\
x_1 + x_2 &\leq 11 && (6)\\
x_1 &\geq 1 && (7)\\
x_1 &\leq 8 && (8)\\
x_2 &\geq 0 && (9)\\
x_2 &\leq 9 && (10)
\end{aligned}
$$

(a) Zeichne alle Ungleichungen in ein $\sim 10 \times 10$ cm großes Koordinatensystem ein (also jeweils die Gerade und markiere die zulässigen Seite).

(b) Markiere den Bereich der zulässigen Lösungen.

(c) Bestimme (graphisch) unter den gegebenen Ungleichungen die Lösung für die folgenden Optimierungsprobleme:

  (i) $\min x_1 + x_2$

  (ii) $\min x_1$

  (iii) $\max x_2$

  (iv) $\max 5x_2 + x_1$

  Bestimme dazu die **unnötigen** Ungleichungen für das jeweilige Optimum und berechne anhand der restlichen **relevanten** Ungleichungen die jeweiligen exakten Lösungen.

  Wenn es für ein Problem mehrere Lösungen gibt, erläutere kurz wieviele Lösungen existieren und warum.

(5+3+12 Punkte)

Aufgabe 3 (Matching und Vertex Cover): Sei $G = (V, E)$ ein beliebiger, einfacher Graph. Seien VC_{opt} ein optimales Vertex Cover und M_{opt} ein optimales Matching in G. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass die Ungleichung $|M_{opt}| \leq |VC_{opt}|$ gilt.

(a) Zeige: $|VC_{opt}| \leq 2 \cdot |M_{opt}|$

(b) Gib eine Klasse von Graphen an, für die $|VC_{opt}|$ beliebig groß werden kann und die Ungleichung aus (a) immer mit Gleichheit erfüllt ist (mit kurzer Begründung).

(c) Gib in eigenen Worte wieder, was Dualität ist und warum dieses Konzept so wichtig für Optimierungsprobleme ist.

(10+5+10 Punkte)