

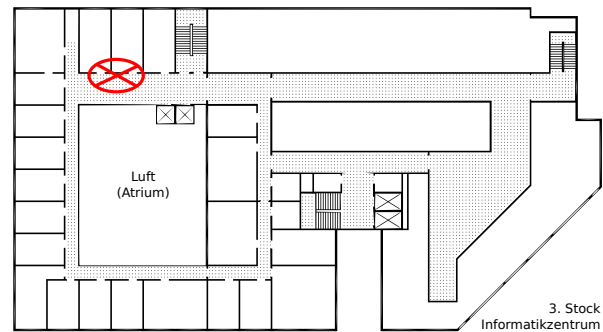
Prof. Dr. Sándor P. Fekete
 Phillip Keldenich
 Arne Schmidt

Algorithmen und Datenstrukturen

Übung 2 vom 14. 11. 2016

Abgabe der Lösungen bis zum Montag, den 28.11.2016 um 13:15 im Hausaufgabenrückgabeschrank.

Bitte die Blätter zusammenheften und vorne deutlich mit eigenem Namen, Matrikel- und Gruppennummer, sowie Studiengang versehen!



Aufgabe 1 (Breiten- und Tiefensuche): Betrachte den Graphen G in Abbildung 1

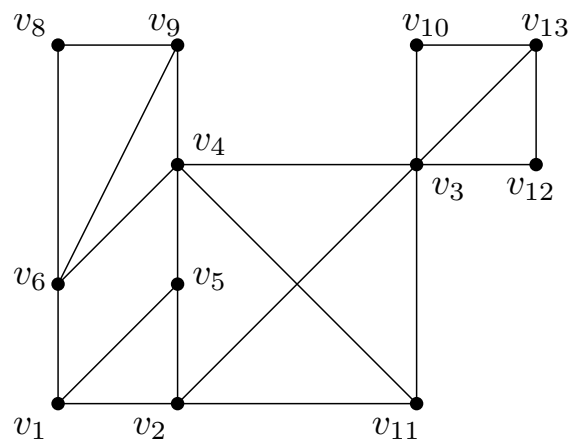


Abbildung 1: Ein Graph G

- a) Wende Breitensuche auf G mit Startknoten v_1 an. Gib dabei **jede** Änderung von R an. Gib den gefundenen Baum an. Kommen zu einem Zeitpunkt mehrere Knoten in Frage, wähle den Knoten mit kleinstem Index.
- b) Wende Tiefensuche auf G mit Startknoten v_1 an. Gib dabei **jede** Änderung von R an. Gib den gefundenen Baum an. Kommen zu einem Zeitpunkt mehrere Knoten in Frage, wähle den Knoten mit kleinstem Index.

(10+10 Punkte)

Aufgabe 2 (Färbbarkeit von Graphen): Bei einer Färbung eines Graphen $G = (V, E)$ betrachten wir eine Funktion $C : V \rightarrow \mathbb{N}$, sodass $C(v) \neq C(w)$ für alle $\{v, w\} \in E$ gilt. Ein Graph heißt k -färbbar, wenn wir den Graphen so färben können, dass $C(v) \leq k$ für alle $v \in V$ gilt.

- Zeige: Ein Graph $G = (V, E)$ ist 2-färbbar $\iff G$ enthält keinen Kreis ungerader Länge.
- Konstruiere einen auf Breitensuche basierenden Algorithmus, der *true* zurückgibt, falls der Graph 2-färbbar ist und *false*, falls er nicht 2-färbbar ist.
- Betrachte nun die Funktion $F : (V, E) \rightarrow (V', E')$, die aus einem Graphen $G = (V, E)$ mit $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ einen Graphen $G' = (V', E')$ wie folgt konstruiert: Es wird für jeden Knoten v_i ein Knoten u_i hinzugefügt. Dann werden Kanten so eingefügt, dass u_i dieselben Nachbarn wie v_i besitzt. Es wird ein weiterer Knoten u_0 hinzugefügt, der adjazent zu allen neuen Knoten u_i ist. Formal:

- $V' = V \cup \{u_0, u_1, \dots, u_n\}$ und
- $E' = E \cup \{\{u_0, u_i\} \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{\{u_i, v_j\} \mid \{v_i, v_j\} \in E\}$

Ein Beispiel ist in Abbildung 2 gegeben. Im Bereich der Graphentheorie findet diese Funktion Anwendung um zu zeigen, dass es dreiecksfreie Graphen mit beliebig hoher chromatischer Zahl¹ gibt. Wir wollen nun die Funktion anwenden:

Sei C_5 der Kreisgraph mit 5 Knoten (siehe Abbildung 3). Zeichne den Graphen $F(C_5)$. Dabei sollen die Knoten v_1, \dots, v_5 die äußersten Knoten bleiben.

- Es ist bekannt, dass C_5 mindestens 3 Farben zum Färben benötigt: Angenommen zwei Farben reichen. Dann können wir o.B.d.A. v_1 die Farbe 1 zuweisen. Die Nachbarn v_2 und v_5 müssen eine andere Farbe bekommen. Also ist $C(v_2) = C(v_5) = 2$. Deren Nachbarn müssen wieder Farbe 1 bekommen. Das liefert $C(v_3) = C(v_4) = 1$. Da v_3 und v_4 benachbart sind, kann das keine gültige Färbung sein. Daher brauchen wir mindestens 3 Farben.

Zeige oder widerlege: $F(C_5)$ benötigt mindestens 4 Farben.

(Hinweis: O.B.d.A. können wir v_1, \dots, v_5 wie folgt in $F(C_5)$ färben:

$C(v_1) = C(v_3) = 1, C(v_2) = C(v_4) = 2, C(v_5) = 3$)

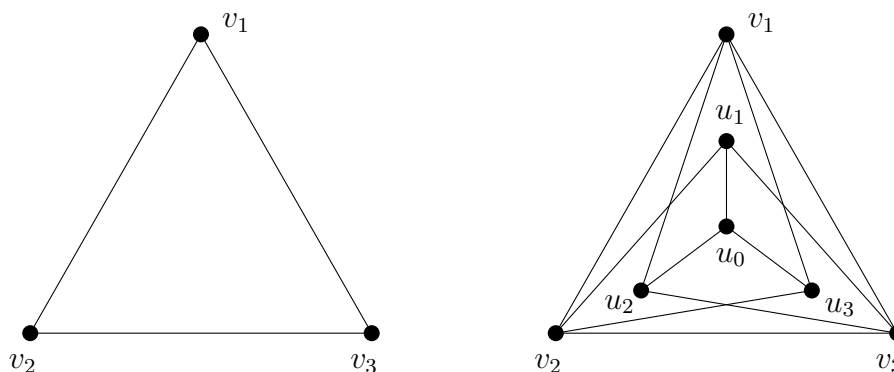


Abbildung 2: Kreisgraph C_3 und der Graph $F(C_3)$.

(5+5+4+6 Punkte)

¹Das ist die kleinste Zahl k , sodass der Graph k -färbbar ist

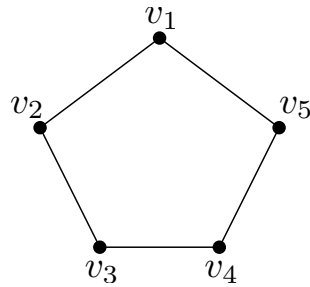


Abbildung 3: Kreisgraph C_5

Aufgabe 3 (Oracle of Kevin Bacon): Dem Orakel von Kevin Bacon liegt der Schauspielergraph S zugrunde: Schauspieler sind durch Knoten repräsentiert. Zwei Schauspielerknoten sind durch eine Kante verbunden, wenn sie gemeinsam in einem Film gespielt haben. Der Knoten von Kevin Bacon hat die *Kevin-Bacon-Zahl* (KBZ) 0; die KBZ eines anderen Schauspielers ist die Länge eines kürzesten Weges im Schauspielergraphen S zu Kevin Bacon. Beispielsweise hat Tom Hanks die KBZ 1, da er mit Kevin Bacon in *Apollo 13* gespielt hat. Falls kein verbindender Weg existiert, ist die KBZ des betrachteten Schauspielers als unendlich definiert.

Das Orakel ist im Web verfügbar: <http://oracleofbacon.org/>. Die zugrundeliegenden Filmdaten sind der *Internet Movie Database* entnommen: <http://www.imdb.com/>.

- a) Wir betrachten einen Pfad für die KBZ z eines Schauspielers A als ein kürzester Pfad in S , der Kevin Bacon und A verbindet und der aus $z + 1$ Knoten besteht. Gib einen Schauspieler mit mindestens KBZ 4 und einen entsprechenden Pfad an.
- b) Wenn man Schauspieler mit möglichst großer KBZ sucht, muss man davon ausgehen, dass man diese nicht kennt; man muss sie also erst als Teil der Suche finden. Beschreiben Sie eine allgemeine Strategie zum sicheren Finden (ohne Raten) von Schauspielern mit hoher KBZ, die jeweils nur ein Browserfenster/-tab mit dem Orakel of Bacon und ein Browserfenster/-tab mit der IMDb verwendet. Welche Rolle spielt dabei die Breitensuche? Welche spielt die Tiefensuche?
- c) Wenn man einen Server wie das Kevin-Bacon-Orakel betreibt, muss man damit rechnen, dass in kurzer Zeit sehr viele Anfragen hereinkommen, die jeweils schnell beantwortet werden müssen. Deshalb lohnt es sich, zwischen Verfahren zu unterscheiden, die eine Aufgabenstellung nur einmal lösen, und solchen, die (nach einem gewissen Aufwand für "Preprocessing" zur Erstellung einer geeigneten Datenstruktur) dieselbe Frage immer wieder neu für unterschiedliche Anfragen ("Queries") beantworten können. Bei einer Anfrage soll nun nicht nur die KBZ des betrachteten Schauspielers, sondern auch ein entsprechender Pfad ausgegeben werden, siehe Aufgabenteil a). Wie kann man es als Betreiber eines Orakels vermeiden, dass man für jede Anfrage eine neue Breitensuche ausführen muss, ohne dass man gigantische Datenmengen vorhalten muss?²

(6+7+7 Punkte)

²Hier geht es nicht um rein technische Lösungen wie Caching, sondern um das Ausnutzen von Struktur.