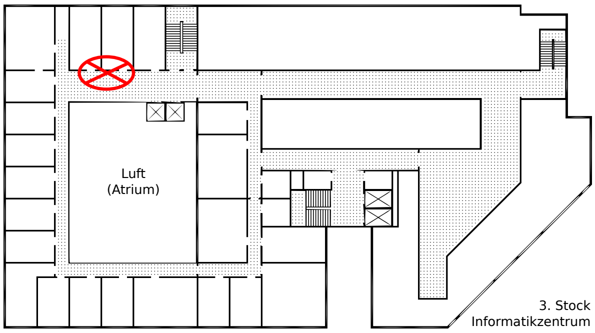
Abteilung Algorithmik **Winter 2016/17**
Institut für Betriebssysteme und Rechnerverbund
TU Braunschweig

Prof. Dr. Sándor P. Fekete
Phillip Keldenich
Arne Schmidt

Algorithmen und Datenstrukturen
Übung 1 vom 31. 10. 2016

Abgabe der Lösungen bis zum Montag, den 14. 11. 2016 um 13:15 im Hausaufgabenrückgabeschrank bei Raum IZ 337.

Bitte die Blätter zusammenheften und vorne deutlich mit eigenem Namen, Matrikel- und Gruppennummer, sowie Studiengang versehen!



Aufgabe 1 (Algorithmus von Fleury):

a) Wende Fleurys Algorithmus auf den Graphen G aus Abbildung 1 an. Starte am Knoten v und wähle in jedem Schritt, in dem mehrere Kanten zur Auswahl stehen, diejenige mit dem kleinsten Index. Gib die Reihenfolge der gewählten Kanten an.

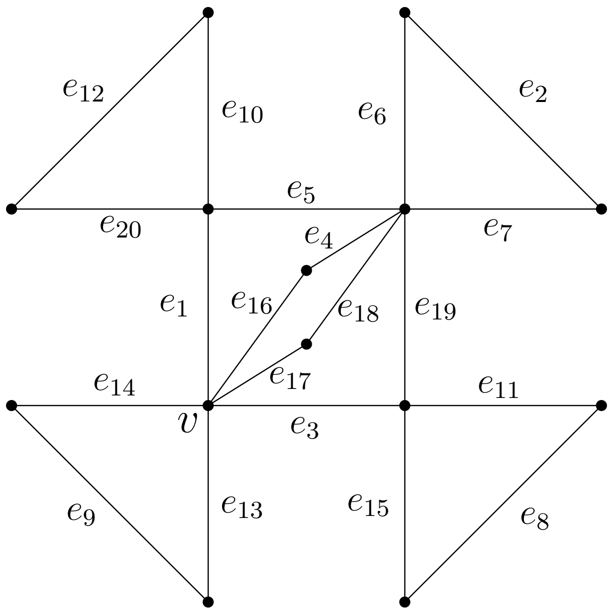


Abbildung 1: Der Graph G

b) Zeige oder widerlege: Jeder einfache Graph auf genau 4 Knoten, der keinen Eulerweg enthält, enthält auch keinen Hamiltonkreis.

(15+5 Punkte)

Aufgabe 2 (Beweistechniken):

a) Zeige durch einen Widerspruchsbeweis, dass $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl sein kann. Nimm dazu an, dass $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$ mit $p, q \in \mathbb{N}$, und $\mathrm{ggT}(p,q) = 1$ eine gekürzte Darstellung von $\sqrt{2}$ als rationale Zahl ist.

b) Zeige oder widerlege: Jeder Graph G mit höchstens 8 Knoten und mindestens 27 Kanten hat einen Hamiltonkreis.

c) Führe einen direkten Beweis des sogenannten *Handshake-Lemmas*:

In jedem Graphen G ist die Anzahl der Knoten mit ungeradem Grad gerade.

Betrachte dazu die Summe $\sum_{v \in V(G)} d(v)$ der Knotengrade in G.

d) Zeige mithilfe von vollständiger Induktion: Für alle natürlichen Zahlen n gilt

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6} \cdot n(n+1)(2n+1).$$

(4+5+8+8 Punkte)

Aufgabe 3 (Eulertouren und Hamiltonkreise): Betrachte die Graphen P_1 und P_2 aus Abbildung 2, die beide nicht hamiltonsch sind.

a) Wie viele Knoten (einschließlich inzidenter Kanten) muss man mindestens aus P_2 entfernen, damit der resultierende Graph einen Hamiltonkreis enthält? Begründe deine Antwort!

b) Enthält P_1 eine Eulertour? Falls ja, gib eine Eulertour in P_1 an. Andernfalls *füge möglichst wenige Kanten zu P_1 hinzu*, sodass der resultierende *einfache* Graph P_1' eine Eulertour enthält, und gib eine Eulertour in P_1' an.

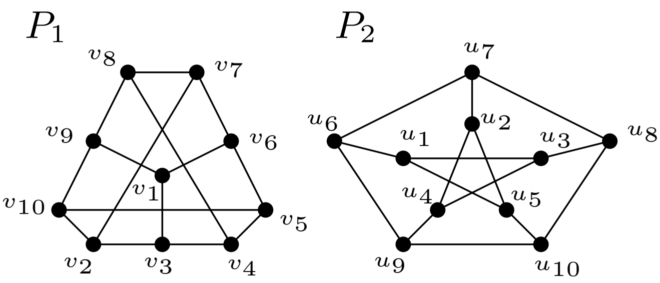


Abbildung 2: Die Graphen P_1 und P_2

(5+10 Punkte)